Lerch, Matyáš: Other works

Matyáš Lerch

Neuer Beweis einer Kirchhoff'schen Formel

Schlömilch Z. 34 (1888), 63–64

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501791

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Gegenüber der grossen Ausbeute, welche durch Anwendung der Doppelschnittsverhältnisse gewonnen worden ist, darf man wohl erwarten, dass die mitgetheilte Verallgemeinerung des Doppelschnittsverhältnisses noch zu vielen interessanten Resultaten führen wird. Endlich liegt es auch nahe, bei mehr als zwei Curven oder Flächen mittlere Vectoren nach den allgemeineren Formeln

$$r = \Sigma \varkappa_n r_n \quad \text{und} \quad \frac{1}{r} = \sum \frac{\mu_n}{r_n}$$

zu construiren und damit Analoga zu den vorigen Hauptsätzen aufzustellen.

Ein sehr einfaches Beispiel hierzu ist folgendes. Wird ein aus n Strahlen bestehender ebener Büschel, dessen Mittelpunkt C ist, von einer beliebigen, durch den festen Punkt O gelegten Transversale in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ geschnitten und

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \cdots + \frac{1}{OP_n}\right)$$

genommen, so ist der Ort von P eine Gerade, welche durch C geht. Um dieselbe rasch zu construiren, errichte man in C senkrecht zu OC die willkürliche Strecke CD und lege durch D parallel zu OC eine Gerade, welche die Strahlen des ursprünglichen Büschels in $E_1, E_2, \ldots, E_n$ schneidet; wird nun DE gleich dem arithmetischen Mittel zwischen $DE_1, DE_2, \ldots, DE_n$ auf der Geraden $DE_1E_2\ldots$ abgeschnitten, so fallen die Strahlen CE und CP zusammen.

O. Schlömilch.

III. Neuer Beweis einer Kirchhoff'schen Formel.

(Aus einem an A. Gutzmer gerichteten Briefe.)

... Die Kirchhoff'sche Formel* in Betreff der Reihe

$$R(x, y, z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{y^\alpha}{1 - xz^\alpha},$$

für welche Sie kürzlich einen Beweis veröffentlicht haben**, welcher sich auf die Heine'sche Reihe stützt, kann auch auf folgende Weise hergeleitet werden.

Nehmen Sie in der obigen Reihe die absoluten Beträge der Argumente x, y, z kleiner als Eins, so erhalten Sie offenbar:

$$R(x, y, z) = \Sigma x^\beta y^\alpha z^{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich theile nun die Glieder dieser absolut convergenten Reihe in zwei Gruppen. In die erste sollen alle diejenigen Glieder aufgenommen werden,

---

* Sitzungsberichte der Königl. Preuss. Akademie d. Wissenschaften zu Berlin, 1885, S. 1007—1013.

** Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira, vol. VIII, p. 81—88.

bei welchen $\alpha \geqq \beta$ ist; die zweite soll diejenigen umfassen, bei denen $\alpha < \beta$ ist. In der ersten Gruppe kann man also $\alpha = \mu + \nu$, $\beta = \mu$ und in der zweiten $\alpha = \mu$, $\beta = \mu + \nu + 1$ setzen, wo μ und ν irgendwelche nicht negative Zahlen bezeichnen. Hiernach folgt aus obiger Formel:

$$R(x, y, z) = \Sigma x^{\mu} y^{\mu+\nu} z^{\mu(\mu+\nu)} + \Sigma x^{\mu+\nu+1} y^{\mu} z^{\mu(\mu+\nu+1)}$$

oder:

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu} y^{\mu} z^{\mu^2}}{1 - y z^{\mu}} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^{\mu+1} y^{\mu} z^{\mu(\mu+1)}}{1 - x z^{\mu}},$$

und hieraus ergiebt sich schliesslich die Kirchhoff'sche Formel:

$$R(x, y, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1 - x y z^{2\mu}}{(1 - x z^{\mu})(1 - y z^{\mu})} \cdot x^{\mu} y^{\mu} z^{\mu^2},$$

welche wir herleiten wollten.

Prag, am 15. Mai 1888.

M. Lerch,
Docent am Böhm. Polytechnikum zu Prag.

IV. Erklärung.

Bezugnehmend auf die Note von S. 161, Bd. II der Darstellenden Geometrie von Herrn Professor Wiener und auf die in dieser Zeitschrift erschienene Recension von Herrn Professor Rodenberg erlaube ich mir, Folgendes zu erklären:

Die Anmerkung zu meiner Abhandlung über Imaginärprojection (S. 29 des XXX. Bandes der Vierteljahrsschrift der naturf. Gesellschaft in Zürich) erregte den Schein, als beanspruche ich gegenüber von Herrn Professor Wiener die Priorität. Sofort nachdem ich die Note Bd. II S. 161 von Herrn Prof. Wiener gelesen, erklärte ich ihm, dass mir dieser Anspruch fern liege. Es sei ja klar, dass das im I. und II. Bande der Darstellenden Geometrie über Imaginärprojection Entwickelte aus langen Studien hervorgegangen sei. Meine Abhandlung dagegen wurde erst im Winter 1883/84 geschrieben. Im folgenden Winter trug ich dieselbe der naturforschenden Gesellschaft in Zürich vor. Der Druck verzögerte sich, weil ich einige Abhandlungen zusammenstellte, welche durch denselben Gedanken verknüpft sind. So konnte ich noch die literarische Notiz hinzufügen, welche sich auf den unterdessen (1884) erschienenen I. Band der Darstellenden Geometrie von Herrn Professor Wiener bezieht.

Zürich, 15. November 1888.

Dr. Christian Beyel.