Matyáš Lerch
Další studie v oboru Malmsténovských řad

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 3 (1894), 8. 28, 1–63

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501780

Další studie v oboru Malmsténovských řad.

Píše M. Lerch.

Podáno dne 4. září 1894.

I.

1. V následujících úvahách chceme se zabývati zejména krajními případy Lipschitzovy funkce

$$(1) \qquad \mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n x \pi i}}{(w+n)^s}.$$

Nejprve vzpomeňme důležitého vztahu *Lipschitzova*

$$(2) \qquad e^{2wx\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} e^{2nx\pi i} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\nu w\pi i}}{(-ix+i\nu)^s},$$

jehož obsah na různých místech rozmanitými způsoby byl dokázán.*)

Tu se předpokládá, že w jest realné a sice mezi 0 a 1, a že konvergenční podmínky jsou splněny, t. j. že realná část veličiny s je kladna, a jeli větší neb rovna jedné, že pomyslná časť veličiny x je kladna.

Veličina v podstatě mnohoznačná $(-ix+i\nu)^s$ dána jest jednoznačně vzorcem

$$(-ix+i\nu)^s = e^{s\log(-ix+i\nu)},$$

v němž logarithmus má realnou časť v mezích $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Volme za x veličinu ryze pomyslnou a kladnou; blížíli se x nulle, stává se v pravo jediný člen, totiž $\nu = 0$, nekonečně velikým; násobímeli tedy obě strany veličinou $(-2x\pi i)^s$, a přejdeme k mezím pro $x = 0$, vznikne vzorec

$$\lim_{x=0} (-2x\pi i)^s \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} e^{2x\pi i(w+n)} = \Gamma(s).$$

Píšemeli zde $e^{2x\pi i} = z$, takže z je kladné, realné a menší než 1, obdržíme vzorec

$$(3) \qquad \lim_{z=1} \left(\log\frac{1}{z}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} z^{w+n} = \Gamma(s),$$

*) Lipschitz v Journal für die reine und angewandte Mathematik, sv. 54 a 105; dále viz naše publikace v Acta mathematica sv. 11, pak naši rozpravu Základové theorie Malmsténovských řad § 3—5, kde též v úvodu podána literatura příbuzných studií.

který platí ovšem též pro jiné přechody limitní než realnými hodnotami, poněvadž $(-ix)^s$ blíží se nulle zároveň s x i když x není ryze pomyslné; jeli totiž $-ix = e^{\alpha+i\beta}$, $s = \sigma + i\sigma'$, bude $|(-ix)^s| = e^{\alpha\sigma-\beta\sigma'}$; přechod limitní $x = 0$ má býti takový, že α obdrží záporné nekonečně veliké hodnoty, kdežto β zůstává mezi $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$, t. j. dovolené přechody limitní jsou takové, že x se blíží nulle zůstávajíc stále v severní polovici roviny, čili že z blíží se bodu $z = 1$, probíhajíc určitou čáru uvnitř kruhu $|z| = 1$.

Vzhledem k rovnici $\lim \frac{\log \frac{1}{z}}{1-z} = 1$ možno vzorec (3) psáti také

$$\lim_{z=1} (1-z)^s \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} z^{w+n} = \Gamma(s)\,; \tag{3^a}$$

zvláštní případ tohoto vzorce, příslušný k hodnotě $w = 1$, totiž

$$\lim_{z=1} (1-z)^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} z^n = \Gamma(s)\,, \tag{3^b}$$

byl uvažován pp. *Alex. Bergerem,**) *Picardem***) a *Cesàronem.****)

Vzorec (2) ovšem líčí chování se funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} z^{w+n}$$

poblíže bodu $z = 1$ způsobem mnohem určitějším; neboť po vyloučení členu $\nu = 0$ zůstane v pravo funkce, která na místě $x = 0$ jest pravidelnou a lze ji psáti

$$a_0 + a_1 (2x\pi i) + a_2 (2x\pi i)^2 + \ldots,$$

pokud $|x| < 1$; přejdemeli tedy k proměnné z, máme poblíže místa $z = 1$ rozvoj

$$\sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} z^{w+n} = \frac{\Gamma(s)}{(\log \frac{1}{z})^s} + a_0 + a_1 \log z + a_2 \log z^2 + \ldots, \tag{3*}$$

v němž stálý člen a_0 má hodnotu

$$\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{\nu}{}' \frac{e^{2\nu w\pi i}}{(i\nu)^s}, \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

t. j.

$$a_0 = \frac{2\,\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nw\pi - \frac{s\pi}{2})}{n^s}. \tag{3$_0$*}$$

---

*) Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres (Nova Acta Reg. Societatis Scient. Upsaliensis, vol. XIV., ser. III.).

**) Traité d'Analyse, t. I., p. 208.

***) Sulla determinazione assintotica delle serie di potenze. (Rendiconti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, 28. října 1893.)

Abychom obdrželi a_1, derivujme obě strany rovnice (3^*) dle z a násobme z; i vznikne tak po krátké redukci

$$\sum_{n=0}^{\infty}(w+n)^s z^{w+n} = \frac{\Gamma(s+1)}{(\log \frac{1}{z})^{s+1}} + a_1 + 2a_2 \log z + 3a_3 (\log z)^2 + \dots,$$

a tudíž dle (3_0^*) bude

$$(3_1^*) \qquad a_1 = \frac{2\Gamma(s+1)}{(2\pi)^{s+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nw\pi - \frac{s+1}{2}\pi)}{n^{s+1}};$$

obecně obdrželi bychom opakováním tohoto postupu

$$(3_p^*) \qquad a_p = \frac{2\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nw\pi - \frac{s+p}{2}\pi)}{n^{s+p}}.$$

Ve zvláštním či lépe krajním případě $w = 1$ máme pak poblíže místa $z = 1$ rozvoj

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} z^n = \frac{\Gamma(s)}{(\log \frac{1}{z})^s} + a'_0 + a'_1 \log z + a'_2 \log^2 z + \dots,$$

kde součinitelé jsou dáni rovnicemi

$$(4_p) \qquad a'_p = \frac{2\Gamma(s+p) \, . \cos(\frac{s+p}{2}\pi)}{p!\,(2\pi)^{s+p}} \zeta(s+p),$$

v nichž užito označení Riemannova

$$(4^0) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

jako ve všech dosavadních našich rozpravách.

2. Způsob, jakým p. *Cesàro* odůvodnil rovnici (3^b), jest v nejvyšší míře pozoruhodným. Za základ slouží mu totiž následující velezajímavá věta:

Jsouli
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$
dvě řady s kladnými součiniteli, konvergentní pro všecka x menší jedné, ale divergentní pro $x = 1$, pak platí vztah

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n},$$

jakmile existuje pravá strana.

Pan Cesàro volí pak

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} x^n,$$

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} x^n;$$

poněvadž tu

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n=\infty} \frac{n!\, n^{s-1}}{s(s+1)\dots(s+n-1)} = \Gamma(s)$$

existuje, bude

$$\lim_{x=1} (1-x)^s \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} x^n = \Gamma(s)\,,$$

t. j. právě vzorec (3^b).

Poněvadž dále opět

$$\lim_{n=\infty} \frac{n!\,(w+n)^{s-1}}{s(s+1)\dots(s+n-1)} = \Gamma(s)\,,$$

můžeme voliti

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} x^n\,,$$

a obdržíme

$$\lim_{x=1} (1-x)^s \sum_{n=0}^{\infty} (w+n)^{s-1} x^n = \Gamma(s)\,,$$

což se kryje se vzorcem naším (3^a).

Při této příležitosti podejme další applikaci uvedené věty. Budiž a celistvé kladné číslo; pak bude, jak snadno shledáme

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(n^{\frac{1}{a}}\right) z^n\,,$$

značíli jak obyčejem $E(u)$ celky veličiny u; volme nyní

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(n^{\frac{1}{a}}\right) z^n\,, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{a}} z^n\,;$$

poněvadž tu

$$\lim_{n=\infty} \frac{E\left(n^{\frac{1}{a}}\right)}{n^{\frac{1}{a}}} = 1\,,$$

bude dle uvedené věty obecné také

$$\lim_{z=1} \frac{f(z)}{g(z)} = 1\,;$$

odtud ale plyne, násobímeli rovnicí

$$\lim_{z=1} (1-z)^{1+\frac{1}{a}} g(z) = \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)\,,$$

výsledek

$$\lim_{z=1} (1-z)^{1+\frac{1}{a}} f(z) = \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

čili

(5) $$\lim_{z=1} \sqrt[a]{1-z} \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^a} = \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)^{*}.$$

Výsledek ten lze podobně jako vzorec (3[a]) vyvinouti přímo následujícím způsobem. Pišme $z = e^{-x}$, a znamenejme na okamžik

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^a x};$$

sečtemeli nerovnosti

$$e^{-n^a x} > \int_n^{n+1} e^{-t^a x}\, dt > e^{-(n+1)^a x},$$

vznikne

$$S > \int_0^{\infty} e^{-t^a x}\, dt > S - 1,$$

takže

$$S = \int_0^{\infty} e^{-t^a x}\, dt + \vartheta = \frac{1}{a}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) x^{-\frac{1}{a}} + \vartheta,$$

kde ϑ značí neznámou funkci, jejíž hodnota je stále kladná a menší jedné.

Tím ale dokázán zároveň výsledek obsažnější

$$(5^*) \qquad 1 + z + z^{2^a} + z^{3^a} + z^{4^a} + \ldots = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{a})}{\sqrt[a]{\log \frac{1}{z}}} + \vartheta.$$

3. Chceme nyní vyšetřiti různé krajní případy funkce $\mathfrak{R}(w, x, s)$ a zejména odvoditi různé tvary, jaké v těchto případech zaujme Lipschitzův vztah

$$(6) \qquad \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\,\mathfrak{R}(w, x, 1 - s) = e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx)}\,\mathfrak{R}(x, 1 - w, s) + e^{\pi i(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))}\,\mathfrak{R}(1 - x, w, s).$$

Pokavad realná část veličiny s je kladnou, platí známý vzorec

$$(7) \qquad \mathfrak{R}(w, x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1 - e^{2x\pi i - t}},$$

v němž zároveň komplexní proměnná w musí míti realnou část kladnou. Jde nám hlavně o to, abychom zjednali si pro funkci $\mathfrak{R}(w, x, s)$ výraz, ve kterém s může býti libovolné. Za tím účelem rozložme integrál (7) dle schematu

$$\int_0^{\omega} + \int_{\omega}^{\infty},$$

kde ω značí kladnou malou veličinu, a užijme v prvém z obou těchto integrálů mocninového rozvoje

$$\frac{e^{-wt}}{1 - e^{2x\pi i - t}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w, x)\, t^n,$$

jehož součinitelé jsou celistvé funkce veličiny w; proměnná x byla původně podrobena podmínce, aby její pomyslná část byla kladnou, aneb když x je realným, aby nebylo celistvým. Integrál (7) ale zůstává jednoznačnou funkcí analytickou proměnné x, pokud příslušný jí bod v rovině probíhá rovinu (x), vyhybaje se řezům, které sestávají z polovičních přímek vycházejících z bodů $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ a probíhajících v *jižní* polovici roviny kolmo na osu realnou. Pokud x náleží tomuto oboru, konverguje poslední rozvoj pro všecka komplexní t, obsažená uvnitř jistého okolí bodu $t = 0$. Jeli ω menší než poloměr tohoto okolí, bude lze integrovati řadu v mezích 0 a ω; a sice obdržíme tak

$$\int_0^\omega \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1 - e^{2x\pi i - t}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(w, x) \cdot \frac{\omega^{s+n}}{s+n} = \mathfrak{L}(s),$$

načež

$$\mathfrak{R}(w, x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \mathfrak{L}(s) + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1 - e^{2x\pi i - t}}; \tag{8}$$

řada $\mathfrak{L}(s)$ konverguje pro všecka s a definuje analytickou funkci jednoznačnou proměnné s; podobně druhý integrál (vzatý od ω do ∞) existuje pro všecka s a je celistvá funkce transcendentní. Poněvadž $\Gamma(s)$ je právě tak jako $\mathfrak{L}(s)$ nekonečným v prvém stupni na místech $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$, bude podíl $\frac{\mathfrak{L}(s)}{\Gamma(s)}$ celistvým; odtud plyne, že $\mathfrak{R}(w, x, s)$ *je celistvá funkce transcendentní proměnné* s.

Přejděme nyní k prvému krajnímu případu, kdy totiž x přejde v nullu; řada (1) tu obdrží tvar

$$R(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(w+n)^s}, \tag{9}$$

v němž dlužno předpokládati (již k vůli přechodu limitnímu) splněnu podmínku ke konvergenci nutnou, aby realná část proměnné s byla větší jedné. V tomto případě máme sice opět vzorec podobný rovnici (7)

$$R(w, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1 - e^{-t}}, \tag{10}$$

ale úvaha poslední postrádá zde platnosti; tu bude totiž

$$\frac{e^{-wt}}{1 - e^{-t}} = \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(w)\, t^n, \qquad |t| < 2\pi,$$

a tedy pro $\omega < 2\pi$

$$\int_0^\omega \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}}{1 - e^{-t}} dt = \frac{\omega^{s-1}}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(w) \frac{\omega^{s+n}}{s+n};$$

znamenámeli tedy

$$\mathfrak{L}_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A'_n(w) \frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{\omega^{s-1}}{s-1},$$

bude

$$R(w, s) = \frac{\mathfrak{L}_0(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-wt} t^{s-1} dt}{1 - e^{-t}}; \tag{11}$$

poněvadž druhý člen v pravo je celistvá funkce transcendentní vůči s, a prvý člen $\frac{\mathfrak{L}_0(s)}{\Gamma(s)}$ má jediné místo zvláštní a sice pól stupně prvního $s = 1$ pocházející ze členu $\frac{\omega^{s-1}}{s-1}$, takže jest

$$\frac{\mathfrak{L}_0(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s-1} + G(s),$$

kde $G(s)$ značí celistvou funkci transcendentní, nacházíme, že *rozdíl*

$$R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

je celistvá funkce transcendentní proměnné s.

Druhým krajním případem funkce $\mathfrak{R}(w, x, s)$ jest řada

$$L(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{n^s}, \tag{12}$$

která odpovídá hodnotě $w = 1$; tu bude dle (7)

$$L(x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{e^{t - 2x\pi i} - 1}, \tag{13}$$

a dále podle vzorce (8)

$$L(x, s) = \frac{\overline{\mathfrak{L}}(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{t^{s-1} dt}{e^{t - 2x\pi i} - 1}, \tag{14}$$

kde položeno

$$\overline{\mathfrak{L}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(1, x) e^{2x\pi i} \frac{\omega^{s+n}}{s+n};$$

a tu opět shledáváme, že $L(x, s)$ *je celistvá funkce transcendentní proměnné* s.

Z rovnice (8) a (14) plyne, že *pro všecka* s platí rovnice

$$\lim_{w=1} \mathfrak{R}(w, x, s) = e^{-2x\pi i} L(x, s). \tag{15^a}$$

Co se tkne chování se funkce $\mathfrak{R}$ pro nekonečně malá w, tu je patrno z řady (1), že

$$\lim_{w=0} \mathfrak{R}(w, x, s) = \infty, \quad \text{pokud} \quad \text{Real.}\, s > 0. \tag{15^b}$$

Zbývá ještě vyšetřiti tuto limitu v případě, kdy realná část veličiny s je záporna. Tu užijeme vzorce (8) a obdržíme

$$\lim_{w=0} \mathfrak{K}(w, x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0, x) \frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{t^{s-1}\, dt}{1 - e^{2x\pi i - t}};$$

užijemeli rozkladu

$$\frac{1}{1 - e^{-t+2x\pi i}} = 1 + \frac{1}{e^{t-2x\pi i} - 1},$$

obdržíme se zřetelem k podmínce Real. $s < 0$

$$\int_{\omega}^{\infty} \frac{t^{s-1}\, dt}{1 - e^{2x\pi i - t}} = -\frac{\omega^s}{s} + \int_{\omega}^{\infty} \frac{t^{s-1}\, dt}{e^{t-2x\pi i} - 1};$$

kromě toho máme

$$1 = \frac{1 - e^{-t+2x\pi i}}{1 - e^{-t+2x\pi i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n(0, x) - e^{2x\pi i} A_n(1, x)\right] t^n,$$

takže bude

$$A_0(0, x) = 1 + e^{2x\pi i} A_0(1, x),$$
$$A_n(0, x) = e^{2x\pi i} A_n(1, x),$$

a náš výsledek obdrží tvar

$$\lim_{w=0} \mathfrak{K}(w, x, s) = \frac{e^{2x\pi i}}{\Gamma(s)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(1, x) \frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\omega}^{\infty} \frac{t^{s-1}\, dt}{e^{t-2x\pi i} - 1},$$

a tudíž dle (14)

(15^c) $\qquad \lim_{w=0} \mathfrak{K}(w, x, s) = L(x, s)$ pokud Real. $s < 0$.

Vzorec (15^b) lze ještě doplniti takto

(15^d) $\qquad \lim_{w=0} w^s \mathfrak{K}(w, x, s) = 1$ pokud Real. $s > 0$.

Vraťme se nyní opětně k funkci $\mathfrak{K}(w, x, s)$ pro nekonečně malá x; užijme opětně vztahu Lipschitzova, v němž nahraďme veličinu $\mathfrak{K}(x, 1-w, s)$ hodnotou

$$\frac{1}{x^s} + e^{-2w\pi i} \mathfrak{K}(x+1, 1-w, s),$$

takže bude

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \mathfrak{K}(w, x, 1-s) = {} & \frac{e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx)}}{x^s} \\ & + \left[e^{\pi i(\frac{1}{2}s - 2wx - 2w)} \mathfrak{K}(x+1, 1-w, s)\right. \\ & \left. + e^{\pi i(-\frac{1}{2}s + 2w(1-x))} \mathfrak{K}(1-x, w, s)\right]. \end{aligned} \right.$$

Pro nekonečně malá x mají výrazy v závorce hodnotu konečnou, takže vše závisí na chování se prvého členu pravé strany; shledáváme, že funkce

$\mathfrak{R}(w, x, 1-s)$ je nekonečně velikou při nekonečně malých x, jeli realná část veličiny s kladnou; t. j. vyměnímeli s za $1-s$,

$$\lim_{x=0} \mathfrak{R}(w, x, s) = \infty \quad \text{pro} \quad \text{Real.}\, s < 1\,. \tag{16^a}$$

Hodnotu této limity v případě, kdy realná část veličiny s je větší jedné, obdržíme přímo z řady (1), a sice

$$\lim_{x=0} \mathfrak{R}(w, x, s) = R(w, s) \quad \text{pro} \quad \text{Real.}\, s > 1\,. \tag{16^b}$$

Ze vzorce (α) plyne, že, jeli s veličina ryze pomyslná a od nully různá, stává se výraz $\mathfrak{R}(w, x, 1-s)$ *neurčitým* pro nekonečně malé kladné hodnoty x; jeli však $s=0$, zmizí $\frac{1}{\Gamma(s)}$ a rovnice (α) neposkytne odpovědi k naší otázce. Zde máme přímo

$$\mathfrak{R}(w, x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n x \pi i}}{w+n},$$

což lze psáti

$$\mathfrak{R}(w, x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2nx\pi i}\left(\frac{1}{w+n} - \frac{1}{n+1}\right) + e^{-2x\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nx\pi i}}{n};$$

čili

$$\mathfrak{R}(w, x, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2nx\pi i}\left(\frac{1}{w+n} - \frac{1}{n+1}\right) - e^{-2x\pi i}\log\left(1 - e^{2x\pi i}\right);$$

pro nekonečně malá x zůstává prvá řada v pravo konečnou, kdežto logarithmus stává se nekonečně velikým, a tedy *platí* (16^a) *též pro* $s=1$.

Předpokládámeli Real. $s<0$, máme z (α) pro $x=0$ se zřetelem k rovnicím (15)

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} R(w, 1-s) = e^{\frac{1}{2}s\pi i} L(1-w, s) + e^{-\frac{1}{2}s\pi i} L(w, s)\,; \tag{17}$$

jestliže dále v rovnici (6) předpokládáme Real. $s>1$ a přejdeme k limitě pro $w=1$, obdržíme

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} L(x, 1-s) = e^{\frac{1}{2}s\pi i} R(x, s) + e^{-\frac{1}{2}s\pi i} R(1-x, s)\,. \tag{18}$$

Ježto funkce $R(w, s)$ a $L(x, s)$ jsou vůči s analytické a jednoznačné, musí vzorce (17) a (18) míti platnosť všeobecnou, t. j. pro všecky hodnoty s.

Pokud Real. $s>1$, máme patrně

$$\lim_{w=0} R(w, s) = \infty\,;$$

jeli však Real. $s<1$, plyne z (11)

$$\lim_{w=0} R(w, s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A'_n(0)\frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{\omega^{s-1}}{s-1}\right\}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(s)} \lim_{w=0} \int_{\omega}^{\infty} \frac{e^{-wt} t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}}\,;$$

integrál se přetvoří pomocí rozkladu

$$\frac{e^{-wt}}{1-e^{-t}} = e^{-wt} + \frac{e^{-wt}}{e^t - 1},$$

a obdržíme

$$\int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}} = \frac{1}{w^s} \int_{\omega w}^\infty e^{-z} z^{s-1}\, dz + \int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{e^t - 1}.$$

Jeli nyní $0 < \text{Real. } s < 1$, máme odtud

$$\int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}} = \frac{\Gamma(s)}{w^s} - \frac{1}{w^s} \int_0^{\omega w} e^{-z} z^{s-1}\, dz + \int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-t}\, dt}{e^t - 1};$$

tu pro nekonečně malá w je prvý člen v pravo nekonečně velikým, kdežto druhé dva zůstávají konečnými; tedy platí vůbec vzorec

$$\lim_{w=0} R(w, s) = \infty, \quad \text{jakmile Real. } s > 0.$$

Jeli dále realná část veličiny s zápornou, užijeme původního tvaru

$$\int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}},$$

z něhož plyne

$$\lim_{w=0} \int_\omega^\infty \frac{e^{-wt}\, t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}} = \int_\omega^\infty \frac{t^{s-1} dt}{1-e^{-t}},$$

a tedy máme

$$\lim_{w=0} R(w, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \sum_{n=0}^\infty A'_n(0) \frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{\omega^{s-1}}{s-1} \right\} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_\omega^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}}$$

aneb použitím rozkladu

$$\int_\omega^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{1-e^{-t}} = \int_\omega^\infty t^{s-1}\, dt + \int_\omega^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{e^t - 1},$$

$$\lim_{w=0} R(w, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \left\{ \sum_{n=0}^\infty A'_n(0) \frac{\omega^{s+n}}{s+n} + \frac{\omega^{s-1}}{s-1} \right\}$$

$$- \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\omega^s}{s} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_\omega^\infty \frac{t^{s-1}\, dt}{e^t - 1};$$

pravou stranu lze vyčísliti za pomoci vzorce (4*) § 1. naší rozpravy »*Základové theorie Malmsténovských řad*«. Neboť tam bylo kladeno

$$\frac{2}{e^t - 1} = \frac{2}{t} - 1 + c_1 t + c_2 t^3 + c_3 t^5 + \ldots,$$

tedy přičtemeli 2 a dělíme dvěma,

$$\frac{1}{1-e^{-t}}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c_1 t+\frac{1}{2}c_2 t^3+\frac{1}{2}c_3 t^5+\ldots.$$
$$=\frac{1}{t}+\sum_{n=0}^{\infty}A'_n(0)\, t^n,$$

takže

$$A'_0=\frac{1}{2},\ A'_1=\frac{1}{2}c_1,\ A'_3=\frac{1}{2}c_2,\ A'_5=\frac{1}{2}c_3,\ldots,$$
$$A'_2=A'_4=A'_6=\ldots=0;$$

rovnici naši lze tedy psáti

$$\lim_{w=0}R(w,s)=\frac{1}{2\Gamma(s)}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n\,\omega^{s+2n-1}}{s+2n-1}-\frac{2\omega^{s-1}}{1-s}-\frac{\omega^s}{s}+2\int_{\omega}^{\infty}\frac{x^{s-1}\,dx}{e^x-1}\right\},$$

a pravá strana skutečně splývá s výrazem (4*) na citovaném místě.

Máme tedy vzorec

$$(19)\qquad \lim_{w=0}R(w,s)=\begin{cases}\zeta(s) & \text{pro Real. } s<0,\\ \infty & \text{pro Real. } s>0.\end{cases}$$

Připojímeli ještě vzorec všeobecně platný

$$(19^a)\qquad \lim_{w=1}R(w,s)=\zeta(s),$$

obdržíme pomocí vzorce (18)

$$\lim_{x=0}L(x,s)=\begin{cases}(2\pi)^{s-1}\,2\sin\frac{s\pi}{2}\,.\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s) & \text{pro Real. } s>1\\ \infty \text{ pro Real. } s<1.\end{cases}$$

Avšak v případě Real. $s>1$ máme přímo z řady (12) vzorec

$$\lim_{x=0}L(x,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s),$$

tudíž

$$(20)\qquad \lim_{x=0}L(x,s)=\begin{cases}\zeta(s) & \text{pro Real. } s>1,\\ \infty & \text{pro Real. } s<1,\end{cases}$$

a zároveň máme porovnáním s hořejším výsledkem Riemannův vztah

$$\zeta(s)=(2\pi)^{s-1}\,.\,2\sin\frac{s\pi}{2}\,\Gamma(1-s)\,.\,\zeta(1-s).$$

4. Jak jsme dokázali, jest rozdíl

$$R(w,s)-\frac{1}{s-1}$$

celistvá funkce transcendentní proměnné s a lze jej tedy vyvinouti v řadu stále konvergentní

$$(21)\quad R(w,s)=\frac{1}{s-1}+A_0(w)+A_1(w)(s-1)+A_2(w)(s-1)^2+\ldots;$$

součinitelé tohoto rozvoje jsou úkony veličiny w; my se omezíme na určení součinitele $A_0(w)$; k tomu účelu užijme vzorce (11); tu máme především

$$\frac{\omega^{s-1}}{s-1}\cdot\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{s-1}+\log\omega-\Gamma'(1)+\ldots,$$

a tedy

$$A_0=\log\omega-\Gamma'(1)+\sum_{n=0}^{\infty}A'_n\frac{\omega^{n+1}}{n+1}+\int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-wt}\,dt}{1-e^{-t}}$$

aneb

$$A_0=\sum_{0}^{\infty}A'_n\frac{\omega^{n+1}}{n+1}+\left[\log\omega+\int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{1-e^{t}}\right]+\int_{\omega}^{\infty}\frac{e^{-wt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt-\Gamma'(1);$$

přejdemeli zde k limitě $\omega=0$, odpadá jak řada tak uzávorkovaný výraz a zbývá

$$A_0(w)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-wt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt-\Gamma'(1)=-\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}.$$

Máme tudíž větu:

První dva členové rozvoje (21) *znějí:*

(21*) $$R(w\,,s)=\frac{1}{s-1}-\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}+\ldots.$$

Dále se chová funkce $R(w\,,s)$ na místě $s=0$ pravidelně, a tedy existuje rozvoj

(22) $$R(w\,,s)=B_0(w)+B_1(w)\,s+B_2(w)\,s^2+\ldots,$$

konvergentní v oboru $|s|<1$.

Tu jest podle (11)

$$B_0(w)=R(w\,,0)=A'_0=\tfrac{1}{2}-w;$$

abychom obdrželi $B_1(w)$, differencujme (22) podle w a užijme vztahu platného pro všecka s:

$$\frac{\partial R(w\,,s)}{\partial w}=-s\,R(w\,,s+1);$$

levá strana tu bude

$$\frac{dB_0}{dw}+\frac{dB_1}{dw}s+\frac{dB_2}{dw}s^2+\ldots,$$

kdežto pravá strana má dle (21*) hodnotu

$$-1+\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}s+\ldots;$$

porovnáním součinitelů při s nacházíme

$$\frac{dB_1}{dw}=\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

a tedy integrací:

$$B_1(w) - B_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = \log \Gamma(w) - \log \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Tu zbývá ještě určiti číslo $B_1\left(\frac{1}{2}\right)$, a funkce $B_1(w)$ bude stanovena; znamenámli toto číslo prostě b_1, máme rozvoj

$$R\left(\tfrac{1}{2}, s\right) = b_1 s + b_2 s^2 + \ldots,$$

z rovnice (18) pak plyne pro $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} L\left(\tfrac{1}{2}, 1-s\right) = 2 \cos \frac{s\pi}{2} \cdot R\left(\tfrac{1}{2}, s\right);$$

levá strana začíná svůj mocninový rozvoj členem $s L\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, pravá členem $2 b_1 s$, tedy máme

$$2 b_1 = L\left(\tfrac{1}{2}, 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2,$$

následkem čehož

$$B_1\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\log \sqrt{2};$$

dosazením této hodnoty do hořejšího výsledku obdržíme konečně

$$B_1(w) = \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}};$$

tím dokázána věta:

První dva členové Maclaurinovského rozvoje funkce $R(w, s)$ znějí:

$$R(w, s) = \left(\tfrac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} s + \ldots, \tag{22*}$$

takže máme vzorec

$$\log \Gamma(w) = \log \sqrt{2\pi} + D_{s=0} R(w, s), \tag{22•}$$

který pro $\log \Gamma(w)$ poskytne tolik tvarů, kolik výrazů platných v okolí místa $s = 0$ máme pro funkci $R(w, s)$. Differencujemeli na př. rovnici (17) dle s a klademe po té $s = 1$, vznikne

$$2\pi (\log 2\pi - \Gamma'(1))\left(\tfrac{1}{2} - w\right) - 2\pi \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left[L(w, 1) + L(1-w, 1)\right] + i\left[D_{s=1} L(1-w, s) - D_{s=1} L(w, s)\right];$$

při tom se předpokládá $0 < w < 1$, tedy

$$L(w, 1) = -\log\left(1 - e^{2w\pi i}\right) = \left(\tfrac{1}{2} - w\right)\pi i - \log(2 \sin w\pi);$$

odtud plyne

$$L(w, 1) + L(1-w, 1) = -2 \log(2 \sin w\pi)$$

a tedy máme výsledek

$$\log \Gamma(w) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin w\pi}{\pi} + \left(w - \tfrac{1}{2}\right)(\log 2\pi - \Gamma'(1))$$

$$= \frac{i}{2\pi}\left\{D_{s=1} L(w, s) - D_{s=1} L(1-w, s)\right\}. \tag{23}$$

Dosadímeli sem rozvoj

$$L(w\,,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nw\pi i}}{n^s}\,,$$

z něhož plyne

$$D_{s=1}L(w\,,s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2nw\pi i}\log n}{n}\,,$$

obdržíme

$$\frac{i}{2\pi}\{D_{s=1}L(w\,,s)-D_{s=1}L(1-w\,,s)\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sin 2nw\pi\,,$$

a tedy rovnice (23) poskytne

$$(23^*)\quad \left|\begin{aligned}&\log\Gamma(w)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin w\pi}{\pi}+(w-\tfrac{1}{2})(\log 2\pi-\Gamma'(1))\\&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n\pi}\sin 2nw\pi\,,\end{aligned}\right.$$

známý to vzorec Kummerův.

Užijemeli k stanovení pravé strany v (23) vzorce (13), z něhož se obdrží

$$D_{s=1}L(w\,,s)=\int_0^{\infty}\frac{\log t\,dt}{e^{t-2w\pi i}-1}-\Gamma'(1)\,L(w\,,1)\,,$$

čili

$$D_{s=1}L(w\,,s)=\int_0^{\infty}\frac{\log t\,dt}{e^{t-2w\pi i}-1}-\Gamma'(1)\left\{(\tfrac{1}{2}-w)\pi i-\log(2\sin w\pi)\right\},$$

obdrží výraz na pravé straně v (23) tvar

$$(\tfrac{1}{2}-w)\,\Gamma'(1)-\frac{\sin 2w\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\log t\,dt}{e^t+e^{-t}-2\cos 2w\pi}\,,$$

takže vzorec (23) obdrží tvar

$$(24)\quad \begin{aligned}&\log\Gamma(w)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\sin w\pi}{\pi}+(w-\tfrac{1}{2})\log 2\pi\\&\qquad=-\frac{\sin 2w\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\log t\,.\,dt}{e^t+e^{-t}-2\cos 2w\pi}\,,\end{aligned}$$

ve kterém $0<w<1$.

5. Ve své rozpravě *Základové theorie Malmsténovských řad* dokázali jsme vzorec*)

$$\mathfrak{R}(w\,,x\,,s)=-e^{-\pi i(\frac{s}{2}+2wa)}\frac{(2\pi)^s}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x(z-ai)}(z-ai)^{-s}\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+ai}}\,.$$

) Str. 26, čís. (5). Tam omylem vynecháno znamení záporu (—), což tuto opravujeme.

Přejdemeli zde k mezím pro $x=0$, předpokládajíce ovšem, že realná část veličiny s je větší jedné, obdržíme

$$R(w,s)=-e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\frac{(2\pi)^s}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}};$$

veličina α v obou vzorcích je kladná a menší než $2w\pi$, jinak libovolná, a mimo to se předpokládá $0<w<1$. Integrál poslední konverguje pouze tehdy, jeli realná část proměnné s větší jedné; abychom z něho obdrželi výraz všeobecně platný, rozložme jej ve dvě části

$$\varphi(s)=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}},\quad\text{a}\quad \psi(s)=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}};$$

tu jest patrně $\varphi(s)$ konvergentním pro všecka s, a zbývá jen přetvořiti $\psi(s)$ To podaří se pomocí identity

$$\frac{1}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}}=1+\frac{1}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1}$$

a sice obdrží se tím způsobem

$$\psi(s)=\int\limits_{0}^{\infty}(z-\alpha i)^{-s}\,dz+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1},$$

aneb vyčíslímeli první integrál,

$$\psi(s)=\frac{1}{s-1}(-\alpha i)^{1-s}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1};$$

vložímeli hodnoty za $\varphi(s)$ a $\psi(s)$ do rovnice

$$R(w,s)=-e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\frac{(2\pi)^s}{2\pi i}\left[\varphi(s)+\psi(s)\right],$$

obdržíme výsledek

$$R(w,s)=\frac{1}{s-1}\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1-s}-e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\frac{(2\pi)^s}{2\pi i}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1}\right.$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(z-\alpha i)^{-s}\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}}\right\}^{0}.$$

Differencujme na obou stranách vůči s, po té klaďme $s=0$ a dosaďme do vzorce (22^a); tím vznikne

$$\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}=-\frac{\alpha}{2\pi}-\frac{\alpha}{2\pi}\log\frac{2\pi}{\alpha}$$

$$-\left(-\tfrac{1}{2}\pi i+\log 2\pi\right)\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dz}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1}+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}}\right\}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\log(z-\alpha i)\,dz}{e^{2w\pi i+z-\alpha i}-1}+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\log(z-\alpha i)\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+\alpha i}}\right\}.$$

Nahradímeli výraz

$$-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2w\pi i+z-ai}-1}+\int_{-\infty}^0 \frac{dz}{1-e^{-2w\pi i-z+ai}}\right\}$$

jeho hodnotou

$$\frac{\alpha}{2\pi}+R(w,0)=\frac{\alpha}{2\pi}+\left(\tfrac{1}{2}-w\right),$$

vznikne

$$\log\frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}}=-\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{\alpha}{2\pi}\log\alpha-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\alpha}{2\pi}+\tfrac{1}{2}-w\right)+\left(\tfrac{1}{2}-w\right)\log 2\pi$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^\infty \frac{\log(z-\alpha i)\,.\,dz}{e^{2w\pi i+z-ai}-1}+\int_{-\infty}^0 \frac{\log(z-\alpha i)\,dz}{1-e^{-2w\pi i-z+ai}}\right\}.$$

Poslední integrál přetvořme substitucí $-z$ za z a užijme při tom rovnice

$$\log(-z-\alpha i)=\log(z+\alpha i)-\pi i,$$

čímž integrál ten obdrží tvar

$$-\int_0^\infty \frac{\log(z+\alpha i)\,dz}{e^{-2w\pi i+z+ai}-1}+\pi i\int_0^\infty \frac{dz}{e^{ai-2w\pi i+z}-1};$$

pišme nyní $\alpha=2u\pi$, čímž náš výsledek obdrží tvar

$$\log\Gamma(w)+u-u\log u-(u-w+1)\log 2\pi=-\frac{\pi i}{2}\left(u-w+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{\log(z-2u\pi i)}{e^{2\pi i(w-u)+z}-1}-\frac{\log(z+2u\pi i)}{e^{2\pi i(u-w)+z}-1}\right]dz$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi i(u-w)+z}-1}.$$

Avšak

$$\int_0^\infty \frac{dz}{e^{2\pi i(u-w)+z}-1}=\left[\log\left(1-e^{2\pi i(w-u)-z}\right)\right]_{z=0}^{z=\infty}$$

$$=-\log\left(1-e^{2\pi i(w-u)}\right)=\left(\frac{1}{2}-w+u\right)\pi i-\log\left(2\sin\pi(w-u)\right);$$

dosazením této hodnoty do poslední rovnice vznikne konečně

$$\log\Gamma(w)+u-u\log u-\left(u-w+\frac{1}{2}\right)\log 2\pi+\frac{1}{2}\log\frac{\sin(w-u)\pi}{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[\frac{\log(z-2u\pi i)}{e^{2\pi i(w-u)+z}-1}-\frac{\log(z+2u\pi i)}{e^{2\pi i(u-w)+z}-1}\right]dz.$$

XXVIII.

Píšemeli tu $w = u + v$, obdržíme výsledek

$$(25)\quad \begin{cases} \log \Gamma(u+v) - u \log u + u + \left(v - \frac{1}{2}\right) \log 2\pi + \frac{1}{2} \log \frac{\sin v\pi}{\pi} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\log (z - 2u\pi i)}{e^{z+2v\pi i} - 1} - \frac{\log (z + 2u\pi i)}{e^{z-2v\pi i} - 1} \right) dz \,. \end{cases}$$

Při odvození se předpokládalo, že u a v jsou dvě kladné realné veličiny, jichž součet jest menší jedné. Pravá strana však konverguje a zůstává pravidelnou funkcí analytickou, pokud proměnná v probíhá *pás* omezený osou pomyslnou a rovnoběžkou vedenou bodem $v = 1$, při čemž u může býti jakákoli veličina komplexní s kladnou částí realnou.

Zvláštním případem vzorce (25) jest rovnice (24), a sice vznikne, přejdemeli k mezím pro $u = 0$. Jiný zvláštní případ obdržíme pro $v = \frac{1}{2}$, a sice bude pak pravá strana zníti

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \frac{\log (z + 2u\pi i) - \log (z - 2u\pi i)}{e^z + 1} dz \,,$$

což lze uvésti na tvar

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{2u\pi}{z} \, dz}{e^z + 1} \,;$$

máme tudíž

$$(26)\qquad \log \Gamma\left(u + \frac{1}{2}\right) - u \log u + u - \frac{1}{2} \log \pi = 2 \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{x} \, dx}{e^{2x\pi} + 1} \,,$$

aneb přetvořímeli integrál částečnou integrací:

$$(26^*)\qquad \log \Gamma\left(u + \frac{1}{2}\right) - u \log u + u - \frac{1}{2} \log 2\pi$$

$$= - \frac{u}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{dx}{u^2 + x^2} \log (1 + e^{-2x\pi}) \,.$$

Tento vzorec splývá v podstatě se vzorcem (27) naší publikace *Theorie funkce gamma* (Věstník České Akademie z r. 1893.).

Vzorec (25) možno přetvořiti částečnou integrací; pravá strana obdrží především tvar

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \log (2u\pi i) \log (1 - e^{2v\pi i}) - \log (-2u\pi i) \,.\, \log (1 - e^{-2v\pi i}) \right\}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty \left(\frac{\log (1 - e^{-z-2v\pi i})}{z - 2u\pi i} - \frac{\log (1 - e^{-z+2v\pi i})}{z + 2u\pi i} \right) dz \,;$$

prvý člen tohoto výrazu má hodnotu

$$\left(v-\frac{1}{2}\right)\log 2u\pi+\frac{1}{2}\log(2\sin v\pi)\,,$$

a následkem toho vzorec (25) poskytne

$$(25^a)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\Gamma(u+v)-\left(u+v-\frac{1}{2}\right)\log u+u-\log\sqrt{2\pi}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left(\frac{\log(1-e^{-z+2v\pi i})}{z+2u\pi i}-\frac{\log(1-e^{-z-2v\pi i})}{z-2u\pi i}\right)dz\,.\end{aligned}\right.$$

Přejdemeli zde k mezím pro $v=0$, obdržíme vzorec *Binetův*

$$(26^b)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\Gamma(u)-\left(u-\frac{1}{2}\right)\log u+u-\log\sqrt{2\pi}\\&=-2u\int_0^\infty\frac{dz}{z^2+4u^2\pi^2}\log(1-e^{-z})\,,\end{aligned}\right.$$

čili

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\Gamma(u)=\left(u-\frac{1}{2}\right)\log u-u+\log\sqrt{2\pi}\\&\qquad-\frac{u}{\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{u^2+x^2}\log(1-e^{-2x\pi})\,.\end{aligned}\right.$$

Ve vzorci (25^a) dosaďme $1-v$ za v (neb veličina ta náleží taktéž našemu pásu) a výsledek přičtěme k (25^a); i obdržíme

$$\log\Gamma(u+v)\,\Gamma(u+1-v)-2u\log u+2u-2\log\sqrt{2\pi}$$

$$=-2u\int_0^\infty\frac{\log(1-2e^{-z}\cos 2v\pi+e^{-2z})}{z^2+4u^2\pi^2}dz\,;$$

užijemeli v levo rovnice $\Gamma(u+1-v)=(u-v)\,\Gamma(u-v)$, a klademeli v integrálu $z=2\pi x$, vznikne

$$(28)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\Gamma(u+v)\,\Gamma(u-v)+\log(u-v)-2u\log u+2u-2\log\sqrt{2\pi}\\&=-\frac{u}{\pi}\int_0^\infty\frac{\log(1-2e^{-2x\pi}\cos 2v\pi+e^{-4x\pi})}{u^2+x^2}dx\,.\end{aligned}\right.$$

Integrál tento lze tedy vyjádřiti transcendentami elementarnými, jeli u celistvé. Pro $u=1$ máme na příklad

$$(29)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\log(1-2e^{-2x\pi}\cos 2v\pi+e^{-4x\pi})\,.\,\frac{dx}{1+x^2}\\&=\log\sin v\pi-\log[v(1-v)]+\log 2-2\,.\end{aligned}\right.$$

Klademeli však ve vzorci (25) $1-v$ za v a přičteme ke vzorci původnímu, obdržíme

$$\log\Gamma(u+v)\,\Gamma(u+1-v)-2u\log u+2u+\log\frac{\sin v\pi}{\pi}$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{2(e^z\cos 2v\pi-1)}{e^{2z}-2e^z\cos 2v\pi+1}\log\frac{z-2u\pi i}{z+2u\pi i}\,dz.$$

Píšemeli zde $z=2x\pi$, a vyjádříme logarithmus funkcí arcus tangentis, vznikne

$$(30)\quad\begin{cases}\log\Gamma(u+v)\,\Gamma(u-v)+\log(u-v)-2u\log u+2u\\ +\log\dfrac{\sin v\pi}{\pi}=-4\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{2x\pi}\cos 2v\pi-1}{e^{4x\pi}-2e^{2x\pi}\cos 2v\pi+1}\operatorname{arctg}\frac{u}{x}\,dx.\end{cases}$$

Pro $u=1$ máme odtud vzorec s výsledkem (29) rovnocenný

$$(31)\quad\Big\{1+\log\sqrt{v-v^2}=-2\int_0^\infty\frac{e^{2x\pi}\cos 2v\pi-1}{e^{4x\pi}-2e^{2x\pi}\cos 2v\pi+1}\operatorname{arccot}x\,dx,$$

tedy na př. pro $v=\frac{1}{4}$:

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{arccot}x\,dx}{e^{4x\pi}+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log\frac{3}{16},$$

a pro $v=\frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty\frac{\operatorname{arccot}x\,dx}{e^{2x\pi}+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2.$$

Z rovnice

$$\log\Gamma(u)-\left(u-\frac{1}{2}\right)\log u+u-\log\sqrt{2\pi}=\int_0^\infty\frac{2\operatorname{arctg}\frac{x}{u}\,dx}{e^{2x\pi}-1}$$

odvodili jsme před nedávnem*) vzorec

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}\log\left(1-e^{2\pi(\alpha x-\sqrt{\alpha^2x^2+\beta})}\right)$$
$$=\left(w_1-\frac{1}{2}\right)\log w_1+\left(w_2-\frac{1}{2}\right)\log w_2-2\alpha-\log\Gamma(w_1)\,\Gamma(w_2)+\log 2\pi,$$

kde w_1 a w_2 značí kořeny kvadratické rovnice

$$w^2-2\alpha w+\beta=0.$$

---

*) Giornale di Matematishe diretto dal Professore G. Battaglini, sv. XXXI. Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 1894.

Zvláště v případě $w_1 = w_2 = w$ máme

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1 - e^{2w\pi(x-\sqrt{x^2+1})}\right)$$
$$= \left(w - \frac{1}{2}\right)\log w - w + \log\Gamma(w) + \log\sqrt{2\pi},$$

a za druhé v případě $w_1 + w_2 = 1$, tedy $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = w - w^2$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1 - e^{x\pi - \pi\sqrt{x^2+4(w-w^2)}}\right)$$
$$= \left(w - \frac{1}{2}\right)\log\frac{w}{1-w} + \log\sin w\pi - 1 + \log 2.$$

Podobným způsobem lze naložiti s rovnicí (26).

Klademeli totiž v (26) jednou $u = w_1$, po druhé $u = w_2$ a sečtemeli výsledky, obdržíme

$$\log\Gamma\left(w_1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(w_2 + \frac{1}{2}\right) - w_1\log w_1 - w_2\log w_2 + w_1 + w_2 - \log\pi$$
$$= 2\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{Arctg}\frac{(w_1+w_2)x}{x^2 - w_1 w_2}}{e^{2x\pi}+1}\,dx,$$

kde Arctg značí oblouk obsažený v mezích 0 a π, tedy

$$\operatorname{Arctg} z = \operatorname{arctg} z \text{ pro } z > 0, \text{ ale } \operatorname{Arctg} z = \operatorname{arctg} z + \pi \text{ pro } z < 0.$$

Tu pišme nyní $w_1 + w_2 = 2\alpha$, $w_1 w_2 = \beta$, a přetvořme integrál substitucí

$$\frac{x^2 - \beta}{2\alpha x} = t, \quad \text{t. j. } x^2 - 2\alpha t x - \beta = 0,$$

při níž jest

$$x = \alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta},$$

takže pravá strana našeho vzorce zní

$$2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\left(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}\right)}{e^{2\pi\left(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}\right)} + 1}\operatorname{Arccot} t;$$

částečnou integrací obdrží tento výraz tvar

$$-\frac{1}{\pi}\Big|_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Arccot} t \,.\, \log\left(1 + e^{-2\pi\left(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}\right)}\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}\log\left(1 + e^{-2\pi\left(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}\right)}\right).$$

XXVIII.

Funkce Arccot t jest v intervallu $(-\infty \ldots + \infty)$ spojita, a má na $-\infty$ hodnotu π, na ∞ hodnotu 0, takže náš výraz má konečný tvar

$$\log 2 - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \log\left(1 + e^{-2\pi(\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta})}\right)$$

a tedy máme výsledek

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\log \Gamma\left(w_1 + \tfrac{1}{2}\right)\Gamma\left(w_2 + \tfrac{1}{2}\right) - w_1 \log w_1 - w_2 \log w_2 + 2\alpha - \log 2\pi \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\log\left(1 + e^{-2\pi(\alpha x + \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})}\right), \end{aligned}\right.$$

kde w_1 a w_2 značí kořeny kvadratické rovnice

$$w^2 - 2\alpha w + \beta = 0.$$

Klademeli zvláště $w_1 = w_2 = w$, tedy $\alpha = w$, $\beta = w^2$, máme

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\log \Gamma(w) - w \log w + w - \log \sqrt{2\pi} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\log\left(1 + e^{-2w\pi(x + \sqrt{x^2+1})}\right); \end{aligned}\right.$$

volímeli však $w_1 = w$, $w_2 = 1 - w$, tedy $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = w - w^2$, vznikne

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\log\left(1 + e^{-\pi x - \pi\sqrt{x^2 + 4(w - w^2)}}\right) \\ &= \log \cos w\pi - \log\left(\tfrac{1}{2} - w\right) + w \log w + (1-w)\log(1-w) + \log 2 - 1, \end{aligned}\right.$$

kde jsme [k vůli rozkladu $\Gamma(\frac{3}{2} - w) = (\frac{1}{2} - w)\,\Gamma(\frac{1}{2} - w)$] předpokládali $w < \frac{1}{2}$.

Podobné obraty jsou možny u rovnice (30). Pišme tam opětně $u = w_1$, resp. $u = w_2$, a sečtěme, čímž se obdrží rovnice

$$\begin{aligned} &\log \Gamma(w_1 + v)\,\Gamma(w_2 + v)\,\Gamma(w_1 - v)\,\Gamma(w_2 - v) + \log(w_1 - v)(w_2 - v) \\ &\quad - 2w_1 \log w_1 - 2w_2 \log w_2 + 2(w_1 + w_2) + 2\log\frac{\sin v\pi}{\pi} \\ &= -4\int_0^{\infty} \frac{e^{2x\pi}\cos 2v\pi - 1}{e^{4x\pi} - 2e^{2x\pi}\cos 2v\pi + 1}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2\alpha x}{x^2 - \beta}\,.\,dx. \end{aligned}$$

Toutéž substitucí jako výše obdrží pravá strana tvar

$$-4\int_{t=-\infty}^{t=\infty} \frac{e^{2\pi x}\cos 2v\pi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x}\cos 2v\pi + 1}\,\mathrm{Arccot}\,t\,.\,dx,$$

kde litera x značí $\alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}$; částečnou integrací vznikne výraz

$$2 \log 2 + 2 \log \sin v\pi - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} \log (1 - 2 e^{-2x\pi} \cos 2 v\pi + e^{-4x\pi}),$$

$$x = \alpha t + \sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta}.$$

Dosadímeli tento výsledek do hořejší rovnice, nacházíme hledaný vztah

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \log \Gamma(w_1 + v)\, \Gamma(w_2 + v)\, \Gamma(w_1 - v)\, \Gamma(w_2 - v) \\ & \quad - 2 (w_1 \log w_1 + w_2 \log w_2) + \log (v^2 - 2 \alpha v + \beta) + 4\alpha - 2 \log 2\pi \\ & \quad = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log \left(1 - 2 e^{-2\pi(\alpha x + \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})} \cos 2 v \pi + e^{-4\pi(\alpha x + \sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta})}\right), \end{aligned} \right.$$

kde opětně w_1, w_2 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$w^2 - 2 \alpha w + \beta = 0;$$

ve všech těchto vzorcích, tedy zejména (32) a (35) má býti α i β kladné.

Volímeli zde opětně $w_1 + w_2 = 1$, tedy $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = w - w^2$, obdržíme

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log \left(1 - 2 e^{-\pi x - \pi \sqrt{x^2 + 4(w - w^2)}} \cos 2 v \pi + e^{-2\pi x - 2\pi \sqrt{x^2 + 4(w-w^2)}}\right) \\ & \quad = \log \sin (w + v)\pi \,.\, \sin (w - v)\pi + 2 \left(w \log w - (1 - w) \log(1 - w)\right) \\ & \quad - \log (v^2 - v + w - w^2) + 2 \log 2 - 2, \end{aligned} \right.$$

kde ovšem se předpokládá $v < w$, $v < 1 - w$.

II.

1. Binetův a Cauchyův integrál

$$\varpi(a) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-at} \frac{dt}{t}$$

považovati možno za zvláštní případ obecnější funkce

$$(1) \qquad \varpi(a, s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \right) e^{-at} t^{s-1}\, dt.$$

Konvergence tohoto integrálu vyžaduje, aby realné části veličin a a $s + 1$ byly kladny; za této podmínky jest pak $\varpi(a, s)$ funkcí analytickou obou proměnných. My chceme nejdříve předpokládati, že realná část veličiny s dokonce je větší jedné. V případě tom lze integrál (1) rozložiti v součet

$$\varpi(a, s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} t^{s-1}}{1 - e^{-t}} dt - \int_0^{\infty} e^{-at} t^{s-2}\, dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-at} t^{s-1}\, dt,$$

poněvadž za zmíněné okolnosti každý z těchto integrálů existuje. Tu pak jest

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at} t^{s-1} dt}{1-e^{-t}} = \Gamma(s) \, . \, R(a, s),$$

$$\int_0^\infty e^{-at} t^{s-2} dt = \frac{\Gamma(s-1)}{a^{s-1}}, \quad \int_0^\infty e^{-at} t^{s-1} dt = \frac{\Gamma(s)}{a^s},$$

a tedy bude

(2) $$\varpi(a, s) = \Gamma(s) R(a, s) - \frac{\Gamma(s-1)}{a^{s-1}} - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s)}{a^s} \, .$$

Odtud plyne

$$\varpi(a, s) - \varpi(a+1, s) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s)}{a^s} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s)}{(a+1)^s} + \frac{\Gamma(s-1)}{(a+1)^{s-1}} - \frac{\Gamma(s-1)}{a^{s-1}}$$

čili

(3) $$\varpi(a, s) - \varpi(a+1, s) = \Gamma(s-1) \left[\frac{a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s}{(a+1)^s} - \frac{a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} s}{a^s} \right];$$

klademeli zde $a+\nu$ za a, a sečtemeli pro $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, vznikne

$$\varpi(a, s) - \varpi(a+n, s) = \Gamma(s-1) \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[\frac{a+\nu+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} s}{(a+\nu+1)^s} - \frac{a+\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} s}{(a+\nu)^s} \right]$$

a poněvadž, jak z (1) patrno,

$$\lim_{n=\infty} \varpi(a+n, s) = 0,$$

máme rozvoj

(4) $$\varpi(a, s) = \Gamma(s-1) \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{a+\nu+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} s}{(a+\nu+1)^s} - \frac{a+\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} s}{(a+\nu)^s} \right),$$

který se od vzorce (2) liší pouze nepatrně. Ovšem ale řada tato konverguje pro všecka s, jichž realná část jest větší záporné jednotky, kdežto řada

$$R(a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}$$

konverguje pouze při real. $s > 1$. Důkaz toho lze vésti tak, že se odvodí rovnice (3) přímo z integrálu (1), vzatého pro hodnoty $a, a+1$, za supposice Real. $s > -1$, načež plyne bezprostředně vzorec (4). Ostatně lze konvergenci řady (4) vyšetřiti přímo tím, že se určí asymptotická hodnota vzdálených členů.

Přejdemeli ve (4) k mezím pro $s = 0$, vznikne *řada Gudermannova*

(5[a]) $$\varpi(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(a+n+\tfrac{1}{2}) \log \frac{a+n+1}{a+n} - 1 \right].$$

Z rovnice (2) máme dále

$$\varpi(a, s) = \frac{\Gamma(s)}{s-1}\left[(s-1)R(a, s) - a^{1-s} - \tfrac{1}{2}(s-1)a^{-s}\right],$$

a tedy

$$\lim_{s=0} \varpi(a, s) = -D_{s=0}\left[(s-1)R(a, s) - a^{1-s} - \tfrac{1}{2}(s-1)a^{-s}\right],$$

takže obdržíme se zřetelem ke známé hodnotě $D_{s=0} R(a, s)$:

$$\varpi(a) = \log\frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}} - (\tfrac{1}{2} - a) - a\log a + \tfrac{1}{2}\log a + \tfrac{1}{2}$$

čili

$$(5^b) \qquad \varpi(a) = \log\Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2})\log a + a - \log\sqrt{2\pi},$$

kterýžto známý vzorec lze považovati za nové potvrzení výsledku (22^a).

2. Veličinu $\varpi(a, s)$ lze dále ještě zobecniti, čímž zároveň podstata rozvojů tu se vyskytujících ještě určitěji vynikne.

Znamenejme jak zvykem

$$B_1, B_2, B_3, \ldots B_n, \ldots$$

Bernoulliova čísla definovaná mocninovým rozvojem

$$(6) \qquad \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} B_n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!},$$

konvergentním pro $|x| < 2\pi$; rovnomocný s tímto vzorcem je rozvoj

$$(6^a) \qquad \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} B_n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}.$$

To předeslavše, znamenejme

$$(7) \quad \varpi_p(a, s) = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu)!}\right) e^{-ax} x^{s-1}\, dx.$$

Poněvadž výraz v závorce obsažený v okolí místa $x = 0$ začíná mocninový rozvoj členem $(-1)^p B_{p+1} \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+2)!}$, existuje integrál, pokud realná část veličiny $s + 2p + 1$ je kladnou, a ovšem též realná část veličiny a.

Předpokládámeli na okamžik Real. $s > 1$, obdržíme

$$(8) \quad \left\{\begin{aligned} \varpi_p(a, s) &= \Gamma(s) R(a, s) - \frac{\Gamma(s-1)}{a^{s-1}} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(s)}{a^s} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{(2\nu)!}\frac{\Gamma(s + 2\nu - 1)}{a^{s+2\nu-1}}, \end{aligned}\right.$$

a tato rovnice musí platit pro všecka s, pro něž obě strany existují; zároveň shledáváme, že $\varpi_p(a, s)$ jest jednoznačná funkce analytická proměnné s.

Z rovnice té obdržíme dále

$$\varpi_p(a,s)-\varpi_p(a+1,s)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(s)}{(a+1)^s}+\frac{\Gamma(s-1)}{(a+1)^{s-1}}$$

$$+\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}B_\nu\frac{\Gamma(s+2\nu-1)}{(a+1)^{s+2\nu-1}}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma(s)}{a^s}-\frac{\Gamma(s-1)}{a^{s-1}}$$

$$-\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}B_\nu\frac{\Gamma(s+2\nu-1)}{a^{s+2\nu-1}}.$$

Znamenejme nyní

$$\varphi_p(x,s)=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}B_\nu\binom{s+2\nu-2}{2\nu}x^{2p-2\nu+1}, \tag{9}$$

i shledáme, že tu bude

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\varpi_p(a,s)-\varpi_p(a+1,s)}{\Gamma(s-1)}&=\frac{(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s)(a+1)^{2p}+\varphi_p(a+1,s)}{(a+1)^{s+2p}}\\&\quad-\frac{(a+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)a^{2p}+\varphi_p(a,s)}{a^{s+2p}},\end{aligned}\right. \tag{10}$$

a odtud obdržíme podobně jako u vzorců (3) a (4)

$$\left\{\begin{aligned}\varpi_p(a,s)=\Gamma(s-1)\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{&\frac{(a+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s)(a+n+1)^{2p}+\varphi_p(a+n+1,s)}{(a+n+1)^{s+2p}}\\&-\frac{(a+n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)(a+n)^{2p}+\varphi_p(a+n,s)}{(a+n)^{s+2p}}\Bigg\}.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Tato řada konverguje, pokud realná část veličiny $s+2p+1$ je kladnou. Abychom to přímo ukázali, vyšetřme asymptotickou hodnotu vzdálených členů.

Tu máme především

$$(a+n+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)(a+n+1)^{-s}=\sum_{k=0}^{\infty}(a+n)^{-s-k}\binom{-s}{k+1}$$

$$+(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}s)\sum_{k=0}^{\infty}(a+n)^{-s-k}\binom{-s}{k},$$

$$\frac{\varphi_p(a+n+1,s)}{(a+n+1)^{2p}}=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}B_\nu\binom{s+2\nu-2}{2\nu}(a+n+1)^{-s-2\nu+1}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}B_\nu\binom{s+2\nu-2}{2\nu}\sum_{m=0}^{\infty}(a+n)^{-s-2\nu-m+1}\binom{-s-2\nu+1}{m}.$$

Dosadímeli tyto rozvoje, obdrží obecný člen naší řady

$$u_n=\frac{(a+n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}s)(a+n+1)^{2p}+\varphi_p(a+n+1,s)}{(a+n+1)^{s+2p}}$$

$$-\frac{(a+n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s)(a+n)^{2p}+\varphi_p(a+n,s)}{(a+n)^{s+2p}}$$

tvar nekonečné řady mocnin

$$u_n = \sum_{r=0}^{\infty} A_r (a+n)^{-s-r},$$

kde konstanty A_r nezávisejí na a ani na n. Chceme ukázati, že tyto konstanty mizejí až po incl. A_{2p+1}.

Hodnota koefficientu A_r patrně zní

$$\binom{-s}{r+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right)\binom{-s}{r}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} B_\nu \binom{s+2\nu-2}{2\nu} \binom{-s-2\nu+1}{r+1-2\nu} - \varepsilon_r,$$

kde symbol ε_r značí nullu, jeli r sudé, aneb jeli r liché a větší než $2p$, ale

$$\varepsilon_r = (-1)^{\frac{r-1}{2}} B_{\frac{r+1}{2}} \binom{s+r-1}{r+1},$$

jeli r liché a menší než $2p$.

Tudíž pro $r \leqq 2p+1$ možno psáti

$$A_r = \binom{-s}{r+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}s\right)\binom{-s}{r}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^{\nu-1} B_\nu \binom{s+2\nu-2}{2\nu} \binom{-s-2\nu+1}{r+1-2\nu},$$

a o tomto výrazu máme tedy dokázati, že se rovná nulle.

Tu máme především

$$\binom{s+2\nu-2}{2\nu}\binom{-s-2\nu+1}{r+1-2\nu} = (-1)^{r+1} \frac{(s-1)s(s+1)\dots(s+r-1)}{(2\nu)!\,(r+1-2\nu)!},$$

$$\binom{-s}{r+1} = (-1)^{r+1} \frac{s(s+1)\dots(s+r)}{(r+1)!},$$

a stačí tedy dokázati, že

$$\frac{s+r}{(r+1)!} - \frac{1+s}{2\,.\,r!} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{s-1}{(2\nu)!\,(r+1-2\nu)!} = 0,$$

aneb což totéž jest, že

$$\frac{1}{(r+1)!} - \frac{1}{2}\frac{1}{r!} + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^{\nu-1} B_\nu \frac{1}{(2\nu)!\,(r+1-2\nu)!} = 0.$$

Tato rovnice je však správna a obdrží se, násobímeli rovnici (6) příslušnýma stranama rovnice

$$e^x - 1 = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!},$$

a porovnámeli po té součinitele při x^r.

XXVIII.

Řada naše začíná tedy členy

$$u_n = A_{2p+2}(a+n)^{-s-2p-2} + A_{2p+3}(a+n)^{-s-2p-3} + \ldots,$$

z čehož plyne, že

$$u_n = \frac{\mathfrak{a}_n}{(a+n)^{s+2p+2}},$$

kde $\mathfrak{a}_n$ jest konečné pro $a+n=\infty$. Jeli tedy realná část veličiny $s+2p+1=\sigma$ kladnou, konverguje naše řada

$$\varpi_p(a,s) = \Gamma(s-1)\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

absolutně, poněvadž

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_n}{(a+n)^{\sigma+1}}.$$

Pro veliká a má tato řada $\dfrac{\varpi_p(a,s)}{\Gamma(s-1)}$ hodnotu malou, takže nám vzorec (8) podává pro funkci $R(a,s)$ totéž co vzorec Stirlingův pro $\log\Gamma(a)$. Možno jej psáti

$$(8^*)\quad \left\{\begin{aligned} R(a,s) &= \frac{1}{(s-1)a^{s-1}} + \frac{1}{2a^s}\frac{1}{a^{s+2\nu-1}} \\ &+ \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu}\binom{s+2\nu-2}{2\nu-1}\frac{1}{a^{s+2\nu-1}} + \frac{\varpi_p(a,s)}{\Gamma(s)}. \end{aligned}\right.$$

Veličina $\dfrac{\varpi_p(a,s)}{\Gamma(s)}$ zde patrně hraje roli zbytku při rozvoji v řadu *semikonvergentní*. Differencujemeli vůči s a klademe po té $s=0$, obdržíme známý vzorec z theorie funkce gamma. Při tom se objeví zbytek jako zobecnění řady Gudermannovy.

3. Úvahy předešlé nutí samy k zobecnění, které jest velmi jednoduché. *Budiž $f(x)$ funkce realná, pro niž existuje integrál*

$$F(a) = \int_0^{\infty} f(x)\, e^{-ax}\, dx.$$

Této funkci $f(x)$ nechť odpovídá řada

$$c_0 x^{\alpha_0} + c_1 x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha_2} + \ldots, \quad (\alpha_\nu > -1),$$

konvergentní nebo divergentní, mající tu vlastnosť, že rozdíl

$$(12)\qquad f(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu x^{\alpha_\nu}$$

jest při všech kladných x ve své absolutní hodnotě menší než prvý vynechaný člen $c_p x^{\alpha_p}$.

Pak bude patrně integrál

$$R_p = \int_0^\infty \left[f(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \, x^{\alpha_\nu} \right] e^{-ax} \, dx$$

míti hodnotu

$$R_p = F(a) - \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{c_\nu \, \Gamma(\alpha_\nu + 1)}{a^{1+\alpha_\nu}}$$

a z nerovnosti

$$\left| f(x) - \sum_{\nu=0}^{p-1} c_\nu \, x^{\alpha_\nu} \right| < | c_p | \, x^{\alpha_p}$$

plyne

$$| R_p | < \frac{| c_p | \, \Gamma(\alpha_p + 1)}{a^{1+\alpha_p}} .$$

Za jmenovaných podmínek platí tedy rozvoj semikonvergentní

$$F(a) = \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{c_\nu \, \Gamma(\alpha_\nu + 1)}{a^{1+\alpha_\nu}} + R_p , \tag{13}$$

v němž zbytek R_p *jest menší než první vynechaný člen* $\dfrac{c_p \, \Gamma(\alpha_p + 1)}{a^{1+\alpha_p}}$.

Toť zajisté nejrychlejší a nejjednodušší odvození rozvojů skupiny, k níž náleží vzorec Stirlingův. Jeli zvláště

$$f(x) = \left(\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} ,$$

zní řada (12)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \, x^{2\nu-2} ,$$

a potřebujeme dokázati, že rozdíl

$$\Delta_p = f(x) - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} \, x^{2\nu-2}$$

jest menší než $\dfrac{B_{p+1}}{(2p+2)!} \, x^{2p}$.

Podle t. zv. věty Maclaurinovy je však

$$\Delta_p = f^{(2p)}(x') \, \frac{x^{2p}}{(2p)!} ,$$

kde x' leží mezi 0 a x; potřebujeme tedy dokázati pouze, že

$$f^{2p}(x') \, | < | f^{2p}(0) | .$$

To se nejsnáze provede na základě řady

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{4 m^2 \pi^2 + x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2 m \pi i} \left(\frac{1}{x - 2 m \pi i} - \frac{1}{x + 2 m \pi i} \right) ,$$

z níž máme

$$f^{(2p)}(x) = (2p)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m\pi i}\left(\frac{1}{(x-2m\pi i)^{2p+1}} - \frac{1}{(x+2m\pi i)^{2p+1}}\right).$$

Avšak

$$\delta_m = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(x-2m\pi i)^{2p+1}} - \frac{1}{(x+2m\pi i)^{2p+1}}\right]$$

rovná se pomyslné části veličiny

$$\frac{1}{(x-2m\pi i)^{2p+1}}$$

a je tedy menší než prostý obnos této veličiny, je tedy (pro realná x)

$$\delta_m \leqq \frac{1}{|x-2m\pi i|^{2p+1}} < \frac{1}{(2m\pi)^{2p+1}}$$

a tudíž

$$\left|f^{(2p)}(x)\right| < (2p)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m\pi} \cdot \frac{2}{(2m\pi)^{2p+1}},$$

t. j.

$$|f^{2p}(x)| < |f^{(2p)}(0)|,$$

jak tvrzeno.

Bude tudíž dle věty (13)

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)e^{-ax}\frac{dx}{x} = \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\frac{B_\nu}{2\nu(2\nu-1)}\frac{1}{a^{2\nu-1}} + R_p,$$

kde zbytek R_p je menší než první vynechaný člen. Levá strana jest Binetův integrál $\varpi(a)$, jenž dle (5^b) má hodnotu

$$\log \Gamma(a) - (a - \tfrac{1}{2}) \log a + a - \log\sqrt{2\pi};$$

tím dokázán t. zv. *vzorec Stirlingův*

$$\log \Gamma(a) = (a - \tfrac{1}{2}) \log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\frac{B_\nu}{2\nu(2\nu-1)}\frac{1}{a^{2\nu-1}} + R_p, \tag{14}$$

kde zbytek R_p je menší než první vynechaný člen, jeli a kladné a realné. Ze vzorce (8^*) plyne, že přesná hodnota zbytku R_p je dána výrazem

$$R_p = \varpi_p(a, 0) = \lim_{s=0} \varpi_p(a, s),$$

kterým se nechceme obírati.

Kdybychom volili

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)x^{s-1},$$

obdrželi bychom vzorec (8) s dodatkem, *že zbytek* $\overline{R}_p = \frac{\varpi_p(a, s)}{\Gamma(s)}$ *je menší než prvý zanedbaný člen* $\frac{B_p}{2p+2}\binom{s+2p}{2p+1}\frac{1}{a^{s+2p+1}}$, *předpokládaje, že veličiny* a, s *jsou realné a ovšem* $a > 0, s > 0$.

III.

1. Ve své rozpravě »*Základové theorie Malmsténovských řad*« shledali jsme na straně 65 (587) § 12., že výraz

$$(1^a)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}} \\ &\quad+\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{cu+\Delta m^2}\left(e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{2u+\Delta m^2}+\frac{2mb\pi i}{c}}-1\right)}\end{aligned}\right.$$

jest invariantem rovnomocných forem (a, b, c) o záporném diskriminantu $-\Delta = b^2 - ac$, a to při rovnomoci vlastní i nevlastní (odpovídající substitučnímu determinantu o hodnotě -1). Výraz ten nezmění tedy svoji hodnotu, nahradíme-li formu (a, b, c) formou (c, b, a), čímž vznikne výraz

$$(1^b)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{au}{\Delta}+x^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\frac{au}{\Delta}+x^2}} \\ &\quad+\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{au+\Delta m^2}\left(e^{\frac{2\pi}{a}\sqrt{au+\Delta m^2}+\frac{2mb\pi i}{a}}-1\right)}\end{aligned}\right.$$

rovný veličině (1^a).

Pišme nyní v obou těchto výrazech a, $b\delta$, $c\delta^2$ za a, b, c, tudíž $\Delta\delta^2$ za Δ, a přejděme k mezím pro $\delta = 0$.

Řada vyskytující se ve výrazu (1^a) zní pak

$$\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{cu+\Delta m^2}\left(e^{\frac{2\pi}{c\delta}\sqrt{cu+\Delta m^2}+\frac{2mb\pi i}{c\delta}}-1\right)}$$

a blíží se nulle zároveň s δ, takže z výrazu (1^a) zbývá pouze integrál

$$\int_{\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}.$$

Co se tkne výrazu (1[b]), tu především integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{au}{\Delta\delta^2}+x^2}}-1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{au}{\Delta\delta^2}+x^2}}$$

blíží se nulle a nekonečná řada zní

$$\delta\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{au+\Delta m^2\delta^2}\left(e^{\frac{2\pi}{a}\sqrt{au+\Delta m^2\delta^2}+\frac{2mb\delta\pi i}{a}}-1\right)}$$

a při konečně ubývajícím δ blíží se integrálu

$$\sqrt{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}\sqrt{au+\Delta x^2}+\frac{2bx\pi i}{a}}-1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{au+\Delta x^2}}.$$

Porovnáním obou výsledků nacházíme zajímavý vztah

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}}-1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{a}\sqrt{au+\Delta x^2}+\frac{2bx\pi i}{a}}-1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\frac{au}{\Delta}+x^2}}, \end{aligned}\right.$$

v němž $a>0$, $c>0$, $\Delta=ac-b^2>0$, $u>0$, a který chceme nyní přímo dokázati.

Za tím účelem položme na pravé straně

$$x+\sqrt{\frac{au}{\Delta}+x^2}=z,$$

takže

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{au}{\Delta}+x^2}}=\frac{dz}{z},$$

a integrál v pravo obdrží tvar

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}\left\{(\sqrt{\Delta}+bi)z+(\sqrt{\Delta}-bi)\frac{au}{\Delta z}\right\}}-1} \frac{dz}{z}.$$

Tento integrál přetvořme substitucí

$$z=t\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}-bi}{\sqrt{\Delta}+bi}\frac{au}{\Delta}},$$

i obdrží tak vzhledem k relaci $\Delta=ac-b^2$ tvar

$$\int_0^{\infty'} \frac{1}{e^{\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\left(t+\frac{1}{t}\right)}-1} \frac{dt}{t},$$

kde integrační cesta jest poloviční přímka vedená z počátku $t=0$ přes bod $t_0=\sqrt{\frac{\sqrt{\Delta}-bi}{\sqrt{\Delta}+bi}}$ do nekonečna; přímka ta prochází též bodem $t_1=\sqrt{\Delta}-bi$. Integrovaná funkce má zvláštní místa v bodech, pro něž

$$\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\left(t+\frac{1}{t}\right)=2ki,\quad \text{tedy}\quad t=i\left(k\sqrt{\frac{\Delta}{cu}}\pm\sqrt{\frac{k^2\Delta}{cu}+1}\right),$$

kteréžto body leží vesměs na ose pomyslné.

Mezi cestou integrační a osou realnou chová se tedy funkce integrovaná pravidelně a tedy máme dle věty Cauchyovy hodnotu pravé strany vzorce (2) ve tvaru

$$(\alpha)\qquad \int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\left(x+\frac{1}{x}\right)}-1}\,\frac{dx}{x},$$

kde integrační cesta je v ose realné.

Podobným způsobem se přetvoří levá strana rovnice (2); klademeli tam nejprve

$$x+\sqrt{\frac{cu}{\Delta}+x^2}=z,$$

obdrží se výraz

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi\left(z+\frac{cu}{\Delta z}\right)}-1}\,\frac{dz}{z},$$

jenž substitucí $z=\sqrt{\frac{cu}{\Delta}}\,x$ přejde v integrál (α); obě strany rovnice (2) jsou tedy redukovány na týž integrál (α) a rovnice ona tím dokázána přímo cestou dosti elementarnou.

Klademeli v rovnici (2) $\frac{cu}{\Delta}=\varkappa$, a nahradímeli tam veličinu b její hodnotou $\sqrt{ac-\Delta}=\sqrt{ac-\frac{cu}{\varkappa}}$, vznikne rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}-1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{u}{a}+\frac{cu}{a^2\varkappa}x^2}+2x\pi i\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{cu}{a^2\varkappa}}}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{a\varkappa}{c}+x^2}},$$

v níž $a, c, u, \varkappa$ značí kladné realné veličiny. V pravo pišme dále $x\sqrt{\frac{a}{c}}$ za x, i obdržíme

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\frac{u}{a}+\frac{u}{a\varkappa}x^2}+2x\pi i\sqrt{1-\frac{u}{a\varkappa}}}}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}};$$

zavedemeli ještě označení $\frac{u}{a\varkappa} = \lambda^2$, vznikne vztah

$$(2^*) \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi\lambda\sqrt{\varkappa+x^2}+2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}},$$

který lze též vyjádřiti větou, že *integrál*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa+x^2}+2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}$$

nezávisí na hodnotě proměnné λ, pokud $0 < \lambda < 1$.

Derivace této funkce vůči λ musí býti rovna nulle, takže máme

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi(\lambda\sqrt{\varkappa+x^2}+ix\sqrt{1-\lambda^2})}\,dx}{(e^{2\pi(\lambda\sqrt{\varkappa+x^2}+ix\sqrt{1-\lambda^2})}-1)^2} \\ &= \frac{\lambda i}{\sqrt{1-\lambda^2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi(\lambda\sqrt{\varkappa+x^2}+ix\sqrt{1-\lambda^2})}}{(e^{2\pi(\lambda\sqrt{\varkappa+x^2}+ix\sqrt{1-\lambda^2})}-1)^2}\,\frac{x\,dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}; \end{aligned} \right.$$

blížíli se λ krajní hodnotě $\lambda = 1$, blíží se integrál na pravé straně nulle a pravá strana obdrží tedy pro $\lambda = 1$ tvar neurčitý $\frac{0}{0}$. Píšemeli tu $\lambda = \sqrt{1-\mu^2}$, obdržíme pravou hodnotu pravé strany pro $\mu = 0$ dle známého pravidla derivováním, čímž vznikne rovnice

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(e^{\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}-e^{\pi\sqrt{\varkappa+x^2}})^2} = 2\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}+e^{-\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}}{(e^{\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}-e^{-\pi\sqrt{\varkappa+x^2}})^3}\,\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}},$$

kterou však obdržíme přímo částečnou integrací, takže v tomto případě neobdržíme ničeho zajímavého.

2. Integrál (2^*) možno vyjádřiti novým tvarem, užijeli se věty Cauchyovy vhodným způsobem. V rovině komplexní proměnné x definujme obor $\mathfrak{A}$ omezený osou realnou a půlkruhem velikého poloměru R ležícím v severní polovici roviny. V oboru tom veďme *řez* $(0 \ldots i\sqrt{\varkappa})$, takže obor $\mathfrak{A}$ má okraj složený z úseku $(0 \ldots\ldots R)$, půlkruhu (R), úseku $(-R \ldots\ldots 0)$, dále břehu $(0 \ldots i\sqrt{\varkappa})$ a břehu protějšího $(i\sqrt{\varkappa} \ldots 0)$.

V tomto oboru buď dána jednoznačně funkce $(\sqrt{\varkappa+x^2})$, která na úseku $(0 \ldots R)$ splývá s kladnou hodnotou odmocniny $\sqrt{\varkappa+x^2}$, a v ostatním oboru se chová pravidelně. Tato funkce $(\sqrt{\varkappa+x^2})$ má na úseku $(-R \ldots 0)$ hodnotu $-\sqrt{\varkappa+x^2}$, na břehu $(0 \ldots i\sqrt{\varkappa})$ hodnotu $-\sqrt{\varkappa-y^2}$ (kde $x = iy$), na břehu protějším $(i\sqrt{\varkappa} \ldots 0)$, pak hodnotu $\sqrt{\varkappa-y^2}$.

Toto předeslavše, uvažujme integrál

$$J = \int\limits_{\mathfrak{A}} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\left(\sqrt{\varkappa + x^2}\right) - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dx}{\left(\sqrt{\varkappa + x^2}\right)},$$

vzatý podél okraje oboru $\mathfrak{A}$; jelikož v oboru $\mathfrak{A}$ funkce integrovaná jest jednoznačnou, rovná se integrál J součinu $2\pi i$ se součtem residuí obsažených uvnitř $\mathfrak{A}$. Póly funkce integrované odpovídají řešením x rovnic

$$(\beta) \qquad \lambda\left(\sqrt{\varkappa + x^2}\right) - i x\sqrt{1-\lambda^2} = mi,$$

kde m značí libovolné číslo celistvé; odtud plyne

$$x_m = -m\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda i \,.\, \sqrt{\varkappa + m^2},$$

ježto jde pouze o body obsažené uvnitř $\mathfrak{A}$. A sice musí zde m býti kladné, poněvadž rovnice (β) vyžaduje, aby realná část veličiny $\left(\sqrt{\varkappa + x^2}\right)$ byla zápornou.

Avšak residuum na pólu x_m zní

$$\frac{1}{2\pi\left(\frac{\lambda x_m}{\left(\sqrt{\varkappa + x^2_m}\right)} - i\sqrt{1-\lambda^2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{\varkappa + x_m^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\left(\lambda x_m - i\sqrt{1-\lambda^2}\left(\sqrt{\varkappa + x_m^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\pi i\sqrt{\varkappa + m^2}},$$

a tedy bude

$$J = \sum_{m=1}^{M} \frac{1}{\sqrt{\varkappa + m^2}},$$

jeli M celistvé číslo tak volené, aby $M\sqrt{1-\lambda^2} + \lambda i\sqrt{\varkappa + M^2}$ byla největší hodnota x_m obsažená v oboru $\mathfrak{A}$, takže M je největší celistvé číslo hovící podmínce

$$M^2 + \varkappa\lambda^2 < R^2, \quad \text{tedy } M = E\sqrt{R^2 - \varkappa\lambda^2},$$

takže pro veliká R jest M sblíženě rovno R.

Integrál J však sestává z částí

$$a) \qquad \int\limits_0^R \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}},$$

$$b) \qquad -\int\limits_{-R}^0 \frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}},$$

dále z částí vzatých podél obou břehů řezu $\left(0 \ldots i\sqrt{\varkappa}\right)$ a z části vzaté podél půlkruhu (R).

Na řezu $\left(0 \ldots i\sqrt{\varkappa}\right)$ leží jeden pól integrované funkce, totiž bod $x = i\lambda\sqrt{\varkappa}$, a proto dlužno se tomuto vyhnouti při integraci pomocí malého půlkruhu, jehož poloměr nazveme ε. Na břehu $\left(0 \ldots i\sqrt{\varkappa}\right)$ máme pro integrovanou funkci v okolí bodu x_0 rozvoj

$$\frac{A}{x - x_0} + A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots,$$

kde
$$A = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\varkappa}},$$
kdežto na břehu protějším funkce integrovaná chová se pravidelně. Integrál podél půlkruhu rovná se
$$-\pi i \, . \, A = -\frac{1}{2\sqrt{\varkappa}},$$
a zbývají ze břehu $(0 \ldots i\sqrt{\varkappa})$ pouze integrály přímočaré
$$\int_0^{x_0 - \varepsilon i} + \int_{x_0 + \varepsilon i}^{i\sqrt{\lambda}},$$
jichž součet v limitě (pro $\varepsilon = 0$) splývá s Cauchyovou *hlavní hodnotou* integrálu; máme tedy jako příspěvek pocházející od obou břehů řezu $(0 \ldots i\sqrt{\varkappa})$ výraz
$$c) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{\varkappa}} - \text{val. princ.} \int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa - y^2} + 2y\pi\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{i\,dy}{\sqrt{\varkappa - y^2}} \\ & \qquad - \int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa - y^2} + 2y\pi\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{i\,dy}{\sqrt{\varkappa - y^2}}. \end{aligned} \right.$$

Integrál vzatý podél půlkruhu (R) mizí pro $R = \infty$ a integrál $b)$ se pomocí identity
$$\frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} = -1 - \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} + 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1}$$
přetvoří v následující výraz
$$\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}} + \int_0^R \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}};$$
v tomto výrazu prvý člen má hodnotu
$$\log \frac{R + \sqrt{\varkappa + R^2}}{\sqrt{\varkappa}} = \log R + \log \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} + \left(\frac{1}{R}\right),$$
kde $\left(\frac{1}{R}\right)$ značí veličinu mizící pro $R = \infty$.

Máme tedy
$$\begin{aligned} J = {} & 2\int_0^R \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa + x^2} - 2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dx}{\sqrt{\varkappa + x^2}} \\ & - i \text{ val. princ.} \int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa - y^2} + 2y\pi\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dy}{\sqrt{\varkappa - y^2}} \\ & - i\int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa - y^2} + 2y\pi\sqrt{1-\lambda^2}} - 1} \, \frac{dy}{\sqrt{\varkappa - y^2}} \\ & - \frac{1}{2\sqrt{\varkappa}} + \log \frac{2}{\sqrt{\varkappa}} + \log R + \left[\frac{1}{R}\right], \end{aligned}$$

kde $\left[\frac{1}{R}\right]$ značí výraz mizící zároveň s $\frac{1}{R}$. Porovnámeli tuto hodnotu s předešle nalezeným součtem

$$J=\sum_m \frac{1}{\sqrt{\varkappa+m^2}},$$

a přejdemeli k limitě pro $R=\infty$, vznikne vztah

$$(4)\left\{\begin{aligned}&2\int_0^\infty \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa+x^2}-2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}\\ &-i\int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa-x^2}+2x\pi\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa-x^2}}\\ &-i\ \text{val. princ.}\int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa-x^2}+2x\pi\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa-x^2}}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{\varkappa}}+\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{\varkappa}\right)+\lim_{M=\infty}\left(\sum_1^M \frac{1}{\sqrt{\varkappa+m^2}}-\log M\right).\end{aligned}\right.$$

Porovnámeli části realné a pomyslné, máme výsledky

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa+x^2}+2x\pi i\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}\\ &=\log\tfrac{1}{2}\sqrt{\varkappa}+\lim_{M=\infty}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=-M}^M \frac{1}{\sqrt{\varkappa+m^2}}-\log M\right),\end{aligned}\right.$$

$$(6)\left\{\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{2\sin(2x\pi\sqrt{1-\lambda^2})}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}+e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa+x^2}}-2\cos(2x\pi\sqrt{1-\lambda^2})}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa+x^2}}\\ &=\int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{2\lambda\pi\sqrt{\varkappa-x^2}+2x\pi\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa-x^2}}\\ &+\text{val. princ.}\int_0^{\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{e^{-2\lambda\pi\sqrt{\varkappa-x^2}+2x\pi\sqrt{1-\lambda^2}}-1}\,\frac{dx}{\sqrt{\varkappa-x^2}}.\end{aligned}\right.$$

3. V jiné rozpravě, nazvané *Studie v oboru Malmsténovských řad a invariantů forem kvadratických,* dokázali jsme vzorec

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2m\sigma\pi i}}{\sqrt{x+a m^2}}\cdot\frac{e^{-2\pi\tau\sqrt{\frac{x+am^2}{c}}}+e^{-2\pi(1-\tau)\sqrt{\frac{x+am^2}{c}}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{\frac{x+am^2}{c}}}},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x+c m^2}}\cdot\frac{e^{-2\pi\sigma\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}}+e^{-2\pi(1-\sigma)\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}}},$$

ve kterém a, c, x jsou kladné veličiny, σ, τ kladné ryzí zlomky.

Ve vzorci tomto pišme $\sigma\delta$ za σ, $\frac{c}{\delta^2}$ za c, $\frac{x}{\delta^2}$ za x, takže vznikne

$$\frac{\delta}{\sqrt{c}}\sum_m \frac{e^{2m\delta\sigma\pi i}}{\sqrt{x+am^2\delta^2}}\;\frac{e^{-2\pi\tau\sqrt{\frac{x+am^2\delta^2}{c}}}+e^{-2\pi(1-\tau)\sqrt{\frac{x+am^2\delta^2}{c}}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{\frac{x+am^2\delta^2}{c}}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_m \frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x+cm^2}}\;\frac{e^{-2\pi\sigma\sqrt{\frac{x+cm^2}{a}}}+e^{-2\pi(1-\sigma\delta)\sqrt{\frac{x+cm^2}{a\delta^2}}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{\frac{x+cm^2}{a\delta^2}}}}$$

Zde lze bez újmy na obsažnosti výsledku klásti $c=1$; přejdemeli pak k mezím pro $\delta=0$, přejde levá strana v integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2z\sigma\pi i}}{\sqrt{x+az^2}}\;\frac{e^{-2\pi\tau\sqrt{x+az^2}}+e^{-2\pi(1-\tau)\sqrt{x+az^2}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{x+az^2}}}\,dz\,,$$

na pravé straně pak vymizejí výrazy $e^{-2\pi(1-\sigma\delta)\sqrt{\frac{x+cm^2}{a\delta^2}}}$, $e^{-2\pi\sqrt{\frac{x+cm^2}{a\delta^2}}}$ a zbude

$$\sqrt{\frac{1}{a}}\sum_m\frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x+m^2}}\,e^{-2\pi\sigma\sqrt{\frac{x+m^2}{a}}}\,,$$

takže máme relaci

$$(7)\quad\left|\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\sigma z\pi i}}{\sqrt{x+az^2}}\;\frac{e^{-2\tau\pi\sqrt{x+az^2}}+e^{-2\pi(1-\tau)\sqrt{x+az^2}}}{1-e^{-2\pi\sqrt{x+az^2}}}\,dz\\&=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2m\tau\pi i}}{\sqrt{x+m^2}}\,e^{-2\sigma\pi\sqrt{\frac{x+m^2}{a}}}\end{aligned}\right.$$

platnou za podmínek $a>0$, $x>0$, $\sigma>0$, $0<\tau<1$.

Dosadímeli sem za x, σ, τ hodnoty $\frac{x}{\delta^2}$, $\sigma\delta$, $\tau\delta$, přetvořímeli levou stranu dosazením z za δz, a přejdemeli po té k limitě pro $\delta=0$, vznikne

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\sigma z\pi i-2\tau\pi\sqrt{x+az^2}}\frac{dz}{\sqrt{x+az^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\tau z\pi i-2\sigma\pi\sqrt{\frac{x+z^2}{a}}}\frac{dz}{\sqrt{x+z^2}}\,.$$

Píšemeli tu v levo $z=\frac{z'}{\sqrt{a}}$, $\sigma=\sigma'\sqrt{a}$, obdržíme rovnici, která po vynechání čárek zní:

$$(8)\quad\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi(\sigma zi-\tau\sqrt{x+z^2})}\frac{dz}{\sqrt{x+z^2}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi(\tau zi-\sigma\sqrt{x+z^2})}\frac{dz}{\sqrt{x+z^2}}\,,$$

a platí pro všecka kladná x, σ, τ. Rovnice ta nevyjadřuje nic jiného, než tvrzení, že *integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi(\sigma z i - \tau\sqrt{x+z^2})} \frac{dz}{\sqrt{x+z^2}}$$

je souměrnou funkcí liter σ, τ, což lze přímo dokázati, přetvořili se integrál substitucí

$$z + \sqrt{x+z^2} = t$$

a po té substitucí

$$t = u\sqrt{\frac{-\sigma+i\tau}{\sigma+i\tau}x}.$$

Násobímeli (8) po obou stanách $\sigma^{s-1}\,d\sigma$ a integrujeme v mezích 0 a ∞, vznikne

$$(9)\qquad \cos\frac{s\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\tau\pi\sqrt{x+z^2}} \frac{dz}{z^s\sqrt{x+z^2}} = \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\tau z\pi\, dz}{(x+z^2)^{s+\frac{1}{2}}},$$

kde se předpokládá $-\frac{1}{2} < \text{Real. } s < 1$.

IV.

1. V následujících úvahách podati chceme nové zobecnění vzorce Lipschitzova a tím také vyvinouti nový dosti jednoduchý jeho důkaz.

Za východisko volíme integrál Eulerův

$$\frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} = \int_0^{\infty} \frac{x^{u-1}\,dx}{(1+x)^{u+v}};$$

klademeli zde $x = gz$, vznikne

$$\frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)} g^{-u} = \int_0^{\infty} \frac{z^{u-1}\,dz}{(1+gz)^{u+v}}.$$

V tomto vzorci dosaďme $u = b+c+ix$, $v = a-b-ix$, násobme $(b+ix)^{-s}\,dx$ a integrujme od $-\infty$ do ∞. Znamenámeli

$$(1^a)\qquad J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(b+c+ix)\,\Gamma(a-b-ix)\,g^{-ix}(b+ix)^{-s}\,dx,$$

obdržíme tak vzorec

$$J = \frac{\Gamma(a+c)}{2\pi} g^{b+c} \int_{-\infty}^{\infty} (b+ix)^{-s}\,dx \int_0^{\infty} \frac{z^{b+c+ix-1}\,dz}{(1+gz)^{a+c}}.$$

Při tom se předpokládá, že realné části veličin a, b, c jsou kladné a že realná část veličiny a převyšuje realnou část veličiny b; veličina g je realnou a kladnou, proměnná s může býti jakákoli, ale my předpokládáme, že její realná část je větší jedné, aby bylo dovoleno změniti pořad integrační. Bude pak

$$J = \frac{\Gamma(a+c)}{2\pi}\, g^{b+c} \int\limits_0^\infty \frac{z^{c-1}\, dz}{(1+gz)^{a+c}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{b+ix} (b+ix)^{-s}\, dx\,,$$

takže nám běží nyní pouze o stanovení integrálu

$$\varphi(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^{b+ix} (b+ix)^{-s}\, dx\,.$$

Tento integrál je tvaru

$$\bar{\varphi}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(b+ix)\, dx\,,$$

a tedy se nemění s parametrem b, poněvadž jeho devivace vůči b

$$\frac{d}{db}\,\bar{\varphi}(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(b+ix)\, dx = \frac{1}{i}\Big[f(b+ix)\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

patrně je rovna nulle.

Funkce $\varphi(s)$ je patrně celistvou vůči s a pro její určení stačí předpokládati, že realná část veličiny s leží mezi nullou a jednou. V tomto případě bude možno přejíti k mezím pro $b=0$, což dá

$$\varphi(s) = e^{\frac{s\pi i}{2}} \int\limits_0^\infty e^{-ix\log z}\, x^{-s}\, dx + e^{-\frac{s\pi i}{2}} \int\limits_0^\infty e^{ix\log z}\, x^{-s}\, dx\,,$$

a vyjádřímeli tu oba integrály,

$$\varphi(s) = e^{\frac{s\pi i}{2}}\, \frac{\Gamma(1-s)}{(i\log z)^{1-s}} + e^{-\frac{s\pi i}{2}}\, \frac{\Gamma(1-s)}{(-i\log z)^{1-s}}\,.$$

Jeli tu $z>1$, bude $\log z$ kladné a tedy

$$\varphi(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{i(\log z)^{1-s}}\left(e^{s\pi i} - e^{-s\pi i}\right) = \frac{2\sin s\pi\,.\,\Gamma(1-s)}{(\log z)^{1-s}}\,,$$

t. j.

$$\varphi(s) = \frac{2\pi}{\Gamma(s)}\,(\log z)^{s-1} \quad \text{pro } z>1\,.$$

Jeli však $z<1$, bude $\log z$ záporné a oba členy výrazu $\varphi(s)$ se ruší, takže

$$\varphi(s) = 0 \quad \text{pro} \quad z<1\,.$$

Náš poslední tvar pro J, který lze psáti

$$J = \frac{\Gamma(a+c)}{2\pi} g^{b+c} \int_0^\infty \frac{z^{c-1}\,dz}{(1+gz)^{a+c}}\, \varphi(s),$$

obdrží tedy po dosazení za $\varphi(s)$ tvar:

$$(1^b) \qquad J = \frac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(s)} g^{b+c} \int_1^\infty \frac{z^{c-1}(\log z)^{s-1}}{(1+gz)^{a+c}}\, dz,$$

který lze po substituci $z = e^x$ též psáti

$$(1^c) \qquad J = \frac{\Gamma(a+c)}{\Gamma(s)} g^{b+c} \int_0^\infty (1+g e^x)^{-a-c} e^{cx} x^{s-1}\, dx.$$

Integrál tento konverguje pouze pro hodnoty s, jichž realná část jest kladna; předpokládejme mimo to, že g jest větší jedné, aby rozvoj binomialní

$$g^{b+c}(1+g e^x)^{-a-c} = \sum_{m=0}^\infty \binom{-a-c}{m} g^{b-a-m} e^{-(a+m)x}$$

byl konvergentní. Užijemeli tohoto rozvoje pro stanovení integrálu (1^c), obdržíme

$$(1^d) \qquad J = \Gamma(a+c)\, g^{b-a} \sum_{m=0}^\infty \binom{-a-c}{m} \frac{g^{-m}}{(a+m)^s}.$$

Pišme nyní $g = e^{-2v\pi i}$, znamenajíce literou v veličinu ryze pomyslnou a kladnou; tím obdržíme z (1^a) a (1^d) rovnici

$$(1) \qquad \begin{cases} \Gamma(a+c) \displaystyle\sum_{m=0}^\infty \binom{-a-c}{m} \frac{e^{2mv\pi i}}{(a+m)^s} \\ = \dfrac{1}{2\pi} e^{2(b-a)v\pi i} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \Gamma(c+b+ix)\,\Gamma(a-b-ix)\, e^{-2vx\pi} \frac{dx}{(b+ix)^s}. \end{cases}$$

Integrál tento existuje i když v má realnou část od nully různou, obsaženou mezi $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$, a rovnice (1) bude platnou i pro tato v. My pak píšeme $v - \frac{1}{2}$ za v, takže výsledek náš obdrží tvar

$$(1^*) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^\infty \frac{\Gamma(a+c+m)}{m!} \frac{e^{2mv\pi i}}{(a+m)^s} \\ = e^{(a-b)(1-2v)\pi i} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^\infty \Gamma(c+b+ix)\,\Gamma(a-b-ix)\, e^{(1-2v)x\pi} \frac{dx}{(b+ix)^s}, \end{cases}$$

při čemž splněny býti mají podmínky

Real. $a > b > 0$, Real. $c > 0$, $0 <$ Real. $v < 1$, Im. $v \geq 0$.

Klademeli v tomto vzorci $a+c=1$, a užijemeli ovšem vzorce

$$\Gamma(c+b+ix)\,\Gamma(a-b-ix)=\frac{\pi}{\sin\pi(a-b-ix)}$$

za této podmínky platného, obdržíme rovnici

$$(2)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2m v\pi i}}{(a+m)^s}=e^{(a-b)(1-2v)\pi i}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-2v)x\pi}(b+ix)^{-s}\,dx}{\sin\pi(a-b-ix)},$$

která poskytuje nové vyjádření řady $\mathfrak{K}(a, v, s)$. Vzorec tento byl námi zcela jinými prostředky odvozen v rozpravě *Základové theorie Malmsténovských řad**) a poskytuje přímo vztah Lipschitzův, rozvineli se integrál na pravé straně v nekonečnou řadu.

2. V našem hlavním vzorci (1*) pišme nyní $s+2k$ za s, násobme $\binom{-\frac{1}{2}}{s}u^{2k}$ a sečtěme výsledky pro $k=0, 1, 2, \ldots \infty$; i obdržíme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+m)}{m!}\,\frac{e^{2mv\pi i}}{[(a+m)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}}\\&=e^{(a-b)(1-2v)\pi i}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(c+b+ix)\,\Gamma(a-b-ix)\,e^{(1-2v)x\pi}\,dx}{[(b+ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}};\end{aligned}\right.$$

při odvození bylo nutno předpokládati $0<u<b$, takže pak další podmínka $|(a+m)^2|>|u^2|$ je tím již splněna. Rovnice ale zůstane platnou pro všecka u, pro něž obě strany zůstávají jednoznačnými funkcemi této proměnné, tedy pokud u leží uvnitř pásu omezeného rovnoběžkama s osou realnou, vedenýma body $\pm bi$, čili jinými slovy, pokud $-b<\mathrm{Im.}\,u<b$, pokud ovšem ostatní podmínky u vzorce (1*) uvedené jsou splněny.

Klademeli v rovnici (3) $a+c=1$, obdržíme vzorec

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{2mv\pi i}}{[(a+m)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}}\\&=e^{(a-b)(1-2v)\pi i}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(1-2v)x\pi}\,dx}{[(b+ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}\sin\pi(a-b-ix)},\end{aligned}\right.$$

platný za podmínek $0<b<\mathrm{Real.}\,a<1$, $|\mathrm{Im.}\,u|<b$.

Řada na levé straně tvoří částku řady $Ml(v, a, u, s)$, kterou jsme studovali v citované rozpravě, ale poněvadž summační ukazovatel m probíhá pouze hodnoty kladné, liší se výraz (4) od funkce $Ml(v, a, u, s)$ podstatně.

) §. 4., vzorec (5).

Vyjádříme-li sinus funkcí exponencialní, obdrží pravá strana rovnice (4) tvar

$$i\, e^{2v\pi i(b-a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2vx\pi}}{1 - e^{2\pi i(b-a) - 2x\pi}} \cdot \frac{dx}{[(b+ix)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}};$$

jeli pak a realné, můžeme užiti rozvoje

$$\frac{e^{-2vx\pi}}{1 - e^{2\pi i(b-a) - 2x\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n\pi i(b-a) - 2\pi(v+n)x} \quad \text{pro } x > 0$$

a dále vzorce

$$\frac{e^{-2vx\pi}}{1 - e^{2\pi i(b-a) - 2x\pi}} = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\pi i(a-b) + 2\pi x(n-v)} \quad \text{pro } x < 0;$$

provedemeli integraci pomocí těchto řad, objeví se pravá strana rovnice (4) ve tvaru

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{2na\pi i - 2av\pi i},$$

kde položeno

$$(5^a) \qquad A_n = -i \int_{-\infty}^{0} e^{2b\pi i(v-n) + 2\pi x(n-v)} \frac{dx}{[(b+ix)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}, \qquad (n > 0)$$

a dále

$$(5^b) \qquad A_{-n} = i \int_{0}^{\infty} e^{2b\pi i(v+n) - 2\pi x(v+n)} \frac{dx}{[(b+ix)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}, \qquad (n \geq 0).$$

Při tomto označení tedy bude

$$(5) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2mv\pi i}}{[(a+m)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{2a\pi i(n-v)}.$$

Znamenámeli dále na chvíli

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2v\pi i(a+m)}}{[(a+m)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}} = f(a), \qquad (0 < a < 1),$$

obdržíme koeficienty trigonometrického rozvoje

$$f(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{2na\pi i}$$

přímo ve tvaru

$$A_n = \int_0^1 f(a)\, e^{-2na\pi i}\, da,$$

tedy po dosazení za $f(a)$

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 e^{2v\pi i(a+m) - 2n\pi i(a+m)} \frac{da}{[(a+m)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}},$$

a odtud známým postupem

$$(5^c) \qquad A_n = \int_0^{\infty} e^{2x\pi i(v-n)} \frac{dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Určitosť výrazu $f(a)$ pro všecka a intervallu $(0 \ldots 1)$ vyžaduje, aby u nebylo ryze pomyslným, a tedy dlužno předpokládati $\text{Real.}\, u > 0$.

Porovnámeli výsledek (5^c) s rovnicemi (5^a) a (5^b), obdržíme vztahy

$$-i \int_0^{\infty} e^{-2x\pi(n-v)} \frac{dx}{[(b-ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} = e^{2\pi i b(n-v)} \int_0^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(v-n)}\, dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}},$$

$$i \int_0^{\infty} e^{-2x\pi(n+v)} \frac{dx}{[(b+ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} = e^{-2b\pi i(n+v)} \int_0^{\infty} \frac{e^{2x\pi i(v+n)}\, dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}.$$

Nahradímeli zde veličiny $n - v$, resp. $n + v$ symbolem $\frac{c}{2\pi}$, takže c značí libovolnou veličinu s kladnou částí realnou, obdržíme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} i \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx}\, dx}{[(b+ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} &= e^{-bci} \int_0^{\infty} \frac{e^{cxi}\, dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}, \\ -i \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx}\, dx}{[(b-ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}} &= e^{bci} \int_0^{\infty} \frac{e^{-cxi}\, dx}{(x^2+u^2)^{\frac{s}{2}}}, \end{aligned} \right.$$

při čemž mají býti splněny podmínky $0 < b < 1$, $\text{Real.}\, c > 0$, $\text{Real.}\, u > 0$, $|\text{Im.}\, u| < b$.

Identifikace koefficientů rozvoje (5) s výrazy (5^c) není oprávněna, pokud se nedokáže, že rovnice (5), odvozená za podmínky $0 < b < a < 1$, je platna také pro $a \leq b$; tu třeba především ukázati, že integrály (5^a) a (5^b) nezávisejí na b, což jest snadné. Předpokládámeli po té, že u jest realné, bude podmínka $|\text{Im.}\, u| < b$ splněna pro všecka b uvnitř intervallu $(0 \ldots 1)$; volímeli pak na okamžik za b velmi malou hodnotu b', bude rovnice (5) platna i pro malá a, a poněvadž A_n nezávisí na b', shledáváme, že rovnice (5) platí v celém intervallu $0 < a < 1$, jeli u realné a kladné.

Rovnice (6) jsou tedy platny pro kladné realné u a tedy též pro všecka u, pro něž obě strany se chovají pravidelně. Předpokládejme nyní u realné (a kladné) a přejděme u vzorcích (6) k mezím pro $b = 0$. Integrály v levo se rozštěpí ve dva, ježto funkce $\lim\limits_{b=0} [(b+ix)^2+u^2]^{\frac{s}{2}}$ má různou povahu v intervallech $(0\ldots u)$ a $(u\ldots\infty)$.

Tím způsobem se obdrží vzorce

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_0^\infty \frac{e^{cxi}\,dx}{(u^2+x^2)^{\frac{s}{2}}} &= i\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^{\frac{s}{2}}} + ie^{-\frac{s\pi i}{2}}\int\limits_u^\infty \frac{e^{-cx}\,dx}{(x^2-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \\ \int\limits_0^\infty \frac{e^{-cxi}\,dx}{(u^2+x^2)^{\frac{s}{2}}} &= -i\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^{\frac{s}{2}}} - ie^{\frac{s\pi i}{2}}\int\limits_u^\infty \frac{e^{-cx}\,dx}{(x^2-u^2)^{\frac{s}{2}}}; \end{aligned} \right.$$

a odtud snadno plynou rovnice s nimi rovnocenné, platné pro *realná* kladná c:

$$(7^*)\quad \left\{ \begin{aligned} \int\limits_0^\infty \frac{\cos cx\,dx}{(x^2+u^2)^s} &= \sin s\pi\,.\int\limits_u^\infty \frac{e^{-cx}\,dx}{(x^2-u^2)^s}, \\ \int\limits_0^\infty \frac{\cos(cx+s\pi)\,dx}{(x^2+u^2)^s} &= -\sin s\pi\,.\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^s}. \end{aligned} \right.$$

Běží nám ještě o analytickou povahu funkce

$$\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^s}.$$

Nahradímeli pod integračním znamením funkci e^{-cx} řadou $\sum (-1)^n \frac{c^n x^n}{n!}$, obdržíme

$$\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^s} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{c^n}{n!}\int\limits_0^u \frac{x^n\,dx}{(u^2-x^2)^s},$$

a poněvadž substitucí $x^2=u^2z$ plyne

$$\begin{aligned} \int\limits_0^u \frac{x^n\,dx}{(u^2-x^2)^s} &= \tfrac{1}{2}u^{n+1-2s}\int\limits_0^1 z^{\frac{n-1}{2}}(1-z)^{-s}\,dz \\ &= \tfrac{1}{2}u^{n+1-2s}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(1-s)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}-s\right)}, \end{aligned}$$

máme

$$\int\limits_0^u \frac{e^{-cx}\,dx}{(u^2-x^2)^s} = \tfrac{1}{2}\Gamma(1-s)\,u^{1-2s}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(cu)^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{n+3}{2}-s\right)}.$$

Ze vzorce Legendreova a Gaussova

$$\Gamma(x)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}+x)=\frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\Gamma(2x)$$

plyne pro $x=\frac{n+1}{2}$:

$$n!=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\tfrac{n+1}{2}\right)\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

a tedy máme konečně

$$(8)\qquad \int\limits_0^u \frac{e^{-cx}dx}{(u^2-x^2)^s}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(1-s)\,u^{1-2s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(cu)^n}{2^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}-s\right)}.$$

Řada tato se rozpadá ve dvě, z nichž jedna obsahuje členy o sudých n, druhá členy s lichými hodnotami n.

Znamenámeli

$$(9)\qquad \begin{cases} E(z,s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!\,\Gamma(s+n+1)}, \\ E_1(z,s)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\,\Gamma(s+n+1)}, \end{cases}$$

obdržíme pravou stranu rovnice (8) ve tvaru

$$(8^a)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma(1-s)\,u^{1-2s}\left\{E\left(\frac{c^2u^2}{4},\frac{1}{2}-s\right)-\frac{cu}{2}\,E_1\left(\frac{c^2u^2}{4},1-s\right)\right\}.$$

Abychom obdrželi hodnotu prvého z integrálu (7*), odvolejme se na výsledky § 7. naší rozpravy »*Základové theorie Malmsténovských řad*«; znamenáli dle tamního vzorce (1)

$$\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{c}{2},u,2s\right)=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos cx\,dx}{(x^2+u^2)^s},$$

poskytne nám vzorec (3) na citovaném místě

$$\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{c}{2},u,2s\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(s)}\int\limits_0^{\infty}e^{-u^2x-\frac{c^2}{4x}}\,x^{s-\frac{3}{2}}\,dx$$

a vzorec (8) tamtéž podá

$$\frac{1}{2}\,\varphi\left(\frac{c}{2},u,2s\right)$$

$$=\frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\,\Gamma(s)}\;\frac{u^{1-2s}\,E\left(\frac{c^2u^2}{4},\frac{1}{2}-s\right)-\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-1}E\left(\frac{c^2u^2}{4},s-\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(s-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

a tedy máme

$$(10^*)\quad \int_0^\infty \frac{\cos cx\,dx}{(x^2+u^2)^s} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\cos s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-1} E\left(\frac{c^2u^2}{4}, s-\frac{1}{2}\right) - u^{1-2s} E\left(\frac{c^2u^2}{4}, \frac{1}{2}-s\right)\right\},$$

a odtud dle prvního ze vzorců (7^*):

$$(10)\quad \int_u^\infty \frac{e^{-cx}\,dx}{(x^2-u^2)^s} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sin 2s\pi\,.\,\Gamma(s)}\left\{\left(\frac{c}{2}\right)^{2s-1} E\left(\frac{c^2u^2}{4}, s-\frac{1}{2}\right) - u^{1-2s} E\left(\frac{c^2u^2}{4}, \frac{1}{2}-s\right)\right\}.$$

Dosadímeli výsledky (8^*) a (10) do vzorců (7), shledáme, že *integrály*

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pm cxi}\,dx}{(u^2+x^2)^{\frac{s}{2}}}$$

lze vyjádřiti pomocí transcendent Besselovských

$$E\left(\frac{c^2u^2}{4}, \frac{s-1}{2}\right),\qquad E\left(\frac{c^2u^2}{4}, \frac{1-s}{2}\right)$$

a pomocí transcendenty příbuzné

$$E_1\left(\frac{c^2u^2}{4}, 1-\frac{s}{2}\right).$$

Tudíž také *součinitele trigonometrického rozvoje* (5) *lze vyjádřiti transcendentami těmito*, kdežto ve vyjádření koefficientů trigonometrického rozvoje funkce Ml. (v, w, u, s) transcendenta poslední se nevyskytuje.

V.

1. Naše pozornost má nyní býti věnována vzorcům (1) a (1') na str. 56. a 57., dále vzorci (2) na str. 60. naší rozpravy »*Základové theorie Malmsténovských řad*«. Vzorce ty jednají o řadách, jichž obecný člen jest

$$\frac{e^{2m\sigma\pi i}}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}, \text{ resp. } \frac{1}{(am^2+2bmn+cn^2)^s}.$$

My vezmeme v úvahu případ zcela zvláštní, kdy $a=c=1$, $b=0$, $\sigma=\frac{1}{2}$. V případě tom znějí naše výsledky

$$(1)\quad {\sum_{m,n}}' \frac{1}{(m^2+n^2)^s} = 2\zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1) + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\sum_{\mu,\nu}\int_0^\infty e^{-\mu^2 - \frac{\nu^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\,dx,$$

$$(2)\qquad \sum_{m,n}{}' \frac{(-1)^m}{(m^2+n^2)^s} = 2\zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu^{2s-1}}$$

$$+ \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{\mu,\nu} (-1)^\mu \int_0^\infty e^{-\mu^2 x - \frac{\nu^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx\,,$$

$$(3)\qquad \sum_{m,n}{}' \frac{(-1)^m}{(m^2+n^2)^s} = 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu^{2s}} + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{\lambda,\mu} \int_0^\infty e^{-\mu^2 x - \frac{\lambda^2\pi^2}{4x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx\,,$$

kde summační podmínky znějí

$$m\,,\, n = 0\,,\, \pm 1\,,\, \pm 2\,, \ldots .$$
$$\mu\,,\, \nu = 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, 4\,, \ldots .$$
$$\lambda = 1\,,\, 3\,,\, 5\,,\, 7\,,\, 9\,, \ldots .$$

a čárka u znamení součtu znamená, že dlužno vynechati škodný člen $m = n = 0$.

Podle známých vět arithmetických*) bude

$$(4)\qquad \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m^2+n^2)^s} = 4 \sum_{\lambda,\mu} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{(\mu\lambda)^s} = 4 \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\lambda^s} \cdot \sum_{\mu} \frac{1}{\mu^s}\,,$$

$$(5)\qquad \sum{}' \frac{(-1)^m}{(m^2+n^2)^s} = 4 \sum_{\lambda,\mu} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\mu}}{(2\mu\lambda)^s} = \frac{4}{2^s} \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\lambda^s} \sum_{\mu} \frac{(-1)^\mu}{\mu^s}\,.$$

Znamenejme nyní

$$(6)\qquad \varphi(s) = \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\lambda^s}\,, \qquad (\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots)\,,$$

dále

$$(7)\qquad J_{p,q}(s) = \int_0^\infty e^{-p^2 x - \frac{q^2\pi^2}{x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx\,,$$

a připomeňme si identitu

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu^s} = (2^{1-s} - 1)\,\zeta(s)\,.$$

Pomocí vzorců (4) a (5) obdrží pak rovnice (1), (2), (3) tvar

$$(1^*)\qquad 4\varphi(s)\zeta(s) = 2\zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \zeta(2s-1) + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{\mu,\nu} J_{\mu,\nu}(s)\,,$$

$$(2^*)\qquad \left\{ \begin{aligned} & 2^{2-s}\varphi(s)\zeta(s)\,.\,(2^{1-s}-1) = 2\zeta(2s) \\ & \quad + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \zeta(2s-1)(2^{2-2s}-1) + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)} \sum_{\mu,\nu} (-1)^\mu J_{\mu,\nu}(s)\,, \end{aligned} \right.$$

---

*) Věty míněné dokazují se také v theorii funkcí elliptických ve tvaru

$$\Sigma\, q^{m^2+n^2} = 1 + 4\,\Sigma\,(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}} q^{\lambda\mu}\,, \qquad \Sigma\,(-1)^m q^{m^2+n^2} = 1 + 4\,\Sigma\,(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}+\mu} q^{2\lambda\mu}\,.$$

$$(3^*) \quad 2^{2-s}\varphi(s)\zeta(s)(2^{1-s}-1) = 2(2^{1-2s}-1)\zeta(2s) + \frac{4\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)}\sum_{\lambda,\mu} J_{\mu,\frac{\lambda}{2}}(s).$$

Podle vzorce (8) na str. 37. citované rozpravy je však

$$\frac{\cos s\pi}{\pi} J_{p,q}(s) = (\pi q)^{2s-1} E(p^2q^2, s-\tfrac{1}{2}) - p^{1-2s} E(p^2q^2, \tfrac{1}{2}-s),$$

a tedy

$$\sum_{\mu,\nu} J_{\mu,\nu}(s) = \frac{\pi^{2s}}{\cos s\pi}\sum_{\mu,\nu} \nu^{2s-1} E(\mu^2\nu^2, s-\tfrac{1}{2})$$
$$-\frac{\pi}{\cos s\pi}\sum_{\mu,\nu} \mu^{1-2s} E(\mu^2\nu^2, \tfrac{1}{2}-s).$$

Znamenáli nám

$\Theta_\sigma(n)$ *součet σ-tých mocnin všech dělitelů čísla n,*

bude patrně

$$\sum_{\mu,\nu} \nu^{2s-1} E(\mu^2\nu^2, s-\tfrac{1}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{2s-1}(n) E(n^2, s-\tfrac{1}{2}),$$

a dle toho zní vzorec (1*)

$$(8) \qquad 4\varphi(s)\zeta(s) = 2\zeta(2s) + \frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\zeta(2s-1)$$
$$+\frac{4\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)\cos s\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\pi^{2s-1}\Theta_{2s-1}(n)E(n^2, s-\tfrac{1}{2}) - \Theta_{1-2s}(n)E(n^2, \tfrac{1}{2}-s)\right],$$

a vzorce podobné plynou z (2*) a (3*). Vzorce ty mají svoji zajímavosť nejen z té příčiny, že vyjadřují určité řady utvořené pomocí transcendent Besselových funkcemi ζ a φ, nýbrž ony také mají cenu praktickou, poskytujíce v případě celistvého s prostředky k rychlému vypočtení součtů $\varphi(s)$ a $\zeta(s)$. V případě celistvého s je totiž vždy jedna z veličin $\varphi(s)$ a $\zeta(s)$ známa; jeli s sudé, je známo $\zeta(s)$, a jeli s liché, je známo $\varphi(s)$, neboť pak bude

$$2\varphi(s) = \sum_{\lambda} \frac{(-1)^{\frac{\lambda-1}{2}}}{\lambda^s}, \qquad (\lambda = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

čili

$$2\varphi(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

a tuto řadu lze vyčísliti ve tvaru zakončeném.

K tomuto účelu, stanoviti buď $\zeta(s)$ neb $\varphi(s)$ pro celistvá s, nejlépe se hodí vzorec (3*). Tu třeba především vyčísliti integrál

$$J_{\mu,\frac{\lambda}{2}} = \int_0^{\infty} e^{-\mu^2 x - \frac{\lambda^2\pi^2}{4x}} x^{s-\frac{3}{2}}\, dx;$$

substitucí $x = \frac{\lambda\pi}{2\mu} z$ obdržíme

$$J_{\mu,\frac{\lambda}{2}} = \left(\frac{\lambda\pi}{2\mu}\right)^{s-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda\mu\pi}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{s-\frac{3}{2}} dz,$$

aneb užijemeli vzorce*)

$$\int_0^\infty e^{-u\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{s-\frac{3}{2}} dz = 2e^{-2u} \int_{-\infty}^\infty e^{-4ux^2} \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^{2s-1}}{\sqrt{x^2+1}} dx,$$

$$\text{(a)} \quad J_{\mu,\frac{\lambda}{2}} = 2e^{-\lambda\mu\pi} \left(\frac{\lambda\pi}{2\mu}\right)^{s-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-2\lambda\mu\pi x^2} (x+\sqrt{x^2+1})^{2s-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Znamenejme na okamžik

$$K = \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} (x+\sqrt{x^2+1})^{2s-1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

jeli s kladné celistvé číslo, pak obdržíme užitím binomického rozvoje

$$(x+\sqrt{x^2+1})^{2s-1} = \sum_{\nu=0}^{2s-1} \binom{2s-1}{\nu} x^\nu (x^2+1)^{s-\frac{\nu+1}{2}}$$

výsledek

$$K = \sum_{\nu=0}^{s-1} \binom{2s-1}{2\nu} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} x^{2\nu} (x^2+1)^{s-\nu-1} dx,$$

poněvadž integrály členů o lichém ν jsou nullami.

Avšak

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} x^{2\nu} (x^2+1)^m dx = \sum_{\alpha=0}^m \binom{m}{\alpha} \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} x^{2\nu+2\alpha} dx$$
$$= \sum_{\alpha=0}^m \binom{m}{\alpha} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}{a^{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}},$$

a tedy

$$K = \sum_{\nu=0}^{s-1} \sum_{\alpha=0}^{s-\nu-1} \binom{2s-1}{2\nu} \binom{s-\nu-1}{\alpha} \frac{\Gamma(\nu+\alpha+\frac{1}{2})}{a^{\nu+\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

Znamenáme li tu

$$\text{(9)} \qquad \sum_{\nu=0}^k \binom{2s-1}{2\nu} \binom{s-\nu-1}{k-\nu} = [s,k],$$

---

*) Základové theorie Malmsténovských řad, str. 34 a 35, vzorce (3^a) a (5).

bude

$$K = \sum_{k=0}^{s-1} [s, k] \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})}{a^{k+\frac{1}{2}}},$$

a tedy

$$J_{\mu, \frac{\lambda}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \lambda^{s-1} \mu^{-s} e^{-\lambda \mu \pi} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{[s, k]\, \Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2 \lambda \mu \pi)^k}.$$

Odtud plyne, klademeli $\lambda \mu = n$ a znamenámeli $\Theta'_{2s-1}(n)$ součet $(2s-1)$ ních mocností všech *lichých* dělitelů čísla n, rovnice

$$\sum_{\mu, \lambda} J_{\mu, \frac{\lambda}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta'_{2s-1}(n)}{n^s} e^{-n\pi} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{[s, k]\, \Gamma(k+\frac{1}{2})}{(2 n \pi)^k}$$

čili

$$\sum_{\mu, \lambda} J_{\mu, \frac{\lambda}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\, [s, k]}{(2\pi)^k} \Phi_k,$$

kde položeno

$$\Phi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta'_{2s-1}(n)}{n^{s+k}} e^{-n\pi}. \tag{10}$$

Rovnice (3*) následkem toho obdrží při celistvém s tvar

$$\left\{\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \varphi(s) \zeta(s) = 2^{s-1} \left(1 - \frac{1}{2^{2s-1}}\right) \zeta(2s) \\ &\quad - \frac{4\sqrt{\pi}}{(s-1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\, [s, k]}{(2\pi)^k} \Phi_k. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

VI.

1. V tomto článku chceme vyvinouti některé detaily týkající se řady Malmsténovské

$$\text{Ml.}\,(v, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2 m v \pi i}}{[(w+m)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}}; \tag{1}$$

pro tu jsme nalezli rozvoj

$$\left\{\begin{aligned} &e^{2 v w \pi i}\, \text{Ml.}\,(v, w, u, s) \\ &\quad = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2 n w \pi i} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{\pi^2 (v-n)^2}{x}} x^{\frac{s-3}{2}} dx. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

*) Základové theorie Malmsténovských řad, § 8.

Funkce tato je celistvou transcendentní vůči s, pokud v není číslo celistvé; Maclaurinovský rozvoj její bude tvaru

(3ª) $$\mathrm{Ml.}\,(v, w, u, s) = A_1 s + A_2 s^2 + \ldots,$$

při čemž

$$e^{2vw\pi i} A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nw\pi i} \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{\pi^2 (v-n)^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx,$$

aneb dle známého vzorce

$$\int_0^{\infty} e^{-px - \frac{q}{x}} x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}}\, e^{-2\sqrt{pq}}:$$

$$e^{2vw\pi i} A_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nw\pi i - 2\pi u |v-n|}}{|v-n|}.$$

Za supposice $0 < v < 1$ máme tedy

(3ᵇ) $$2 e^{2vw\pi i} A_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2nw\pi i - 2u\pi (v+n)}}{v+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2nw\pi i - 2u\pi (n-v)}}{n-v},$$

a tuto funkci lze vyjádřiti v zakončeném tvaru pro racionalná v; možno ji psáti též

(3ᶜ) $$\begin{cases} 2 A_1 = e^{-2v\pi i (w - ui)} \mathfrak{R}(v, -w + ui, 1) \\ \quad + e^{2\pi i (1-v)(w+ui)} \mathfrak{R}(1 - v, w + ui, 1). \end{cases}$$

Znamenejme nyní

$$K(x, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2(v+n)x\pi}}{v+n}, \quad (0 < v < 1),$$

kde x je v realné části kladné; differencováním plyne

$$\frac{dK}{dx} = -2\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2(v+n)x\pi} = -2\pi \frac{e^{2(1-v)x\pi}}{e^{2x\pi} - 1}.$$

Odtud plyne, že $K(x, v)$ nemá jiných míst zvláštních mimo logarithmické body $x = -ki$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, a sice máme v okolí místa $-ki$

$$\frac{dK}{dx} = -\frac{e^{-2k\pi i (1-v)}}{x + ki} + \mathfrak{P}(x + ki),$$

kde $\mathfrak{P}$ značí řadu mocninovou; integrací máme odtud

(a) $$K(x, v) = -e^{-2k\pi i (1-v)} \log(x + ki) + \bar{\mathfrak{P}}(x + ki),$$

čímž povaha funkce K v okolí míst zvláštních dostatečně charakterisována.

Utvořme nyní funkci

$$K_1(x, v) = -\log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x + ki}{ki},$$

35*

kde v součtu Σ' dlužno vynechati člen $k=0$. Rozdíl

$$K(x,v)-K_1(x,v)$$

chová se pravidelně v celé rovině (x) a je tedy funkcí celistvou; ježto derivace

$$\frac{d K_1(x,v)}{d x}=-\frac{1}{x}-\Sigma' \frac{e^{2kv\pi i}}{x+k i}$$

má hodnotu $-2\pi \frac{e^{2x\pi(1-v)}}{e^{2x\pi}-1}=\frac{dK}{dx}$ (předpokládáli se ovšem $0<v<1$), bude rozdíl

$$K(x,v)-K_1(x,v)$$

konstantou.

Hodnota její se mění ovšem zároveň s volbou větví mnohoznačných funkcí K, K_1. Vedemeli v rovině (x) *řez* podél osy pomyslné, bude v rozkrojené takto rovině (x) jak K tak K_1 jednoznačnou funkcí x; tu se umluvíme klásti za $\log \frac{x+ki}{ki}$ hodnota hlavní, jejíž pomyslná část leží mezi $-\pi$ a π.

Poněvadž

$$K=2\pi\int_x^\infty \frac{e^{2x\pi(1-v)}\,dx}{e^{2x\pi}-1}=\int_{2x\pi}^\infty \frac{e^{z(1-v)}\,dz}{e^z-1},$$

a tedy

$$K+\log(1-e^{2x\pi})=\int_{2x\pi}^\infty \frac{e^{z(1-v)}-1}{e^z-1}\,dz,$$

nacházíme

$$\lim_{x=0}(K+\log x+\log 2\pi)=\int_0^\infty \frac{e^{z(1-v)}-1}{e^z-1}\,dz$$

čili

$$\lim_{x=0}(K+\log x)=-\log 2\pi+\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)};$$

dále jest

$$\lim_{x=0}(K_1+\log x)=0,$$

takže odečtením od předešlé rovnice plyne

$$\lim_{x=0}(K-K_1)=-\log 2\pi+\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)},$$

čímž konstanta $K-K_1$ ustanovena.

XXVIII.

Tím dokázán vzorec

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n} &= -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} \\
&\quad -\log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+ki}{ki},
\end{aligned}
\right.
$$

který dlužno považovati za doplněk Lipschitzova vztahu (2) v článku I., a ve kterém nutno předpokládati $0 < v < 1$.

Kdybychom chtěli obdržeti výsledek (4) limitním přechodem z řečené rovnice Lipschitzovy, upravili bychom si ji takto:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{(v+n)^{1-s}} = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2kv\pi i}}{(x+ik)^s},
$$

a odtud odečtením výsledku příslušného k hodnotě $x = x_0$

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{(v+n)^{1-s}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x_0\pi(v+n)}}{(v+n)^{1-s}}
$$

$$
= \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2kv\pi i} \left(\frac{1}{(x+ki)^s} - \frac{1}{(x_0+ki)^s} \right).
$$

Přejdemeli k limitě pro $s = 0$, vznikne

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x_0\pi(v+n)}}{v+n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2kv\pi i} \log \frac{x_0+ki}{x+ki},
$$

a odtud plyne, že výraz

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n} + \log x + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+ki}{ki}
$$

nezávisí na x, načež se hodnota jeho určí přechodem k limitě pro $x = 0$ jako výše.

Volímeli za x ryze pomyslnou hodnotu ix, kde x je mezi 0 a 1, obdržíme

$$
(4^{*})\qquad \left\{
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi i(v+n)}}{v+n} &= -\log 2\pi + \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} \\
&\quad - \frac{\pi i}{2} - \log x - \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2kv\pi i} \log \frac{x+k}{k}.
\end{aligned}
\right.
$$

Tomuto vzorci udělme tvar

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2nx\pi i}}{v+n} = e^{2xv\pi i} \left(-\log 2\pi + \Gamma'(1) - \psi(v) - \frac{\pi i}{2} - \log x \right)
$$

$$
- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' e^{2v\pi i(k+x)} \log \frac{k+x}{k},
$$

píšíce k vůli pohodlí $\psi(v) = \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}$. Dosaďme sem v_0 za v a odečtěme; tím vznikne rovnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nx\pi i}\left(\frac{1}{v+n} - \frac{1}{v_0+n}\right)$$
$$= -\left(\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi i}{2} + \log x\right)\left(e^{2vx\pi i} - e^{2v_0 x\pi i}\right)$$
$$- \left(\psi(v)\, e^{2xv\pi i} - \psi(v_0)\, e^{2xv_0\pi i}\right)$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{2v\pi i(k+x)} \log\frac{k+x}{k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{2v_0\pi i(k+x)} \log\frac{k+x}{k}$$
$$- \left(e^{2v\pi i(x-1)} - e^{2v_0\pi i(x-1)}\right)\log(1-x),$$

kde v součtech $\sum''$ nepřicházejí více členové $k = 0$ a $k = -1$.

V této rovnici přejděme k limitě pro $x = 1$, i obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{v+n} - \frac{1}{v_0+n}\right)$$
$$= -\left(\log 2\pi - \Gamma'(1) + \frac{\pi i}{2}\right)\left(e^{2v\pi i} - e^{2v_0\pi i}\right) - \psi(v)\, e^{2v\pi i} + \psi(v_0)\, e^{2v_0\pi i}$$
$$- \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log\frac{k+1}{k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'' e^{(2k+2)v_0\pi i} \log\frac{k+1}{k}.$$

Znamenejme na okamžik

$$S(v) = \sum_k{}'' e^{(2k+2)v\pi i} \log\frac{k+1}{k},$$

pak praví náš výsledek, že funkce

$$\text{(b)} \qquad \left(\psi(v) - \Gamma'(1)\right)\left(e^{2v\pi i} - 1\right) + S(v) + \left(\log 2\pi + \frac{\pi i}{2}\right) e^{2v\pi i}$$

nezávisí na v.

Dosadímeli sem výraz

$$S(v) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{(2k+2)v\pi i} - e^{-2kv\pi i}\right) \log\frac{k+1}{k},$$

obdržíme

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \log\frac{k+1}{k};$$

avšak

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \log\frac{k+1}{k} = \sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{2\nu+1}{2\nu} - \sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{2\nu}{2\nu-1} = \log\prod_{\nu=1}^{n}\frac{4\nu^2-1}{4\nu^2}$$

a tedy

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = -2\log\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{4\nu^2}\right) = -2\log\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}},$$

t. j.

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 2\log\frac{\pi}{2};$$

ježto pak $\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \Gamma'(1) = -2\log 2$, má náš výraz (b) pro $v = \frac{1}{2}$ hodnotu $4\log 2 + 2\log\frac{\pi}{2} - \log 2\pi - \frac{\pi i}{2} = \log 2\pi - \frac{\pi i}{2}$.

Máme tedy

$$\left(\psi(v) - \Gamma'(1)\right)(e^{2v\pi i} - 1) + S(v)$$
$$+ \log 2\pi \,.\, (e^{2v\pi i} - 1) + \frac{\pi i}{2}(e^{2v\pi i} + 1) = 0,$$

a odtud po krátké redukci

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}\sin(2k+1)v\pi \,.\, \log\frac{k}{k+1} \\ &= \left(\log 2\pi - \Gamma'(1)\right)\sin v\pi + \frac{\pi}{2}\cos v\pi + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)}\sin v\pi\,. \end{aligned}\right.$$

2. Abychom řešili podobné otázky u funkce

$$\mathrm{Ml}\,(0, w, u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{[(w+n)^2 + u^2]^{\frac{s}{2}}},$$

užijeme rozvoje*)

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{Ml.}(0, w, u, s) = \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\sqrt{\pi}\,u^{1-s}$$
$$+ 2\sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2nw\pi\int_0^{\infty} e^{-u^2x - \frac{n^2\pi^2}{x}}\, x^{\frac{s-3}{2}}\,dx\,.$$

Na místě $s = 0$ chová se funkce tato pravidelně a její Maclaurinovský rozvoj

(6ᵃ) $$\mathrm{Ml.}\ (0, w, u, s) = A_1 s + A_2 s^2 + \ldots.$$

*) Zákl. theorie Malmst. řad, § 8, vzorec (4).

má prvního součinitele

$$A_1 = -\pi u + \sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nw\pi \int_0^{\infty} e^{-u^2 x - \frac{n^2\pi^2}{x}} x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$= -\pi u + \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nw\pi \frac{e^{-2nu\pi}}{n}$$

$$= -\pi u - \frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-2u\pi}\cos 2w\pi + e^{-4u\pi})$$

čili

$$A_1 = -\frac{1}{2}\log(e^{2u\pi} + e^{-2u\pi} - 2\cos 2w\pi)\,. \tag{6^b}$$

3. Ze vzorce (4) článku IV. máme pro $v = 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{((a+m)^2 + u^2)^s} = e^{(a-b)\pi i}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x\pi}\,dx}{[(b+ix)^2 + u^2]^s \sin\pi(a-b-ix)}\,,$$

kde platí podmínky $0 < b < \text{Real.}\, a < 1$, a kde se omezíme na kladná realná u. Konvergence řady i integrálu vyžaduje, aby realná část veličiny s byla větší než půle.

Vyjádřímeli v integrálu sinus funkcí exponencialnou, obdržíme

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+m)^2 + u^2]^s} = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{2\pi i(b-a) - 2x\pi}} \cdot \frac{dx}{[(b+ix)^2 + u^2]^s}\,.$$

V tomto integrálu přejde k limitě pro $b = 0$, čímž se obdrží

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+m)^2 + u^2]^s} = i\int_{-u}^{u} \frac{(u^2 - x^2)^{-s}\,dx}{1 - e^{-2a\pi i - 2x\pi}}$$

$$+ ie^{-s\pi i}\int_u^{\infty} \frac{(x^2 - u^2)^{-s}\,dx}{1 - e^{-2a\pi i - 2x\pi}} + ie^{s\pi i}\int_u^{\infty} \frac{(x^2 - u^2)^{-s}\,dx}{1 - e^{-2a\pi i + 2x\pi}}\,,$$

předpokládaje ovšem, že realná část s je menší než jedna a větší než půle. Druhý integrál nahraďme výrazem

$$\int_u^{\infty} \frac{(x^2 - u^2)^{-s}\,dx}{e^{2a\pi i + 2x\pi} - 1} + \int_u^{\infty} (x^2 - u^2)^{-s}\,dx\,,$$

jehož druhá část má hodnotu $\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}u^{1-2s}$, a obdržíme

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{[(a+m)^2+u^2]^s}=2\int_u^{\infty}\frac{\sin(2a+s)\pi\,.\,e^{2x\pi}-\sin s\pi}{e^{4x\pi}-2e^{2x\pi}\cos 2a\pi+1}(x^2-u^2)^{-s}\,dx$$

$$+i\int_{-u}^{u}\frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{1-e^{-2a\pi i-2x\pi}}+\frac{i}{2}e^{-s\pi i}\frac{\Gamma(1-s)\,\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}u^{1-2s}.$$

Výraz na pravé straně jest jednoznačný, pokud realná část veličiny s je menší jedné, poněvadž jen za té podmínky integrály naše existují; abychom si zjednali integrály existující pro všecka s, nahraďme přímočarou cestu integrační cestou (∞, u, ∞), která vycházejíc z $+\infty$ vine se podél severního břehu osy realné až k nějakému místu poblíže u, načež okrouží bod u a vine se zpět do $+\infty$ podél jižního břehu osy; integrál původní se obdrží podle obecného vzoru

$$\int_u^{\infty}f(x)\,(x^2-u^2)^{-s}\,dx=\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1}\int_{(\infty,u,\infty)}f(x)\,(x^2-u^2)^{-s}\,dx\,,$$

ve kterém $f(x)$ značí funkci jednoznačnou.

Druhý integrál uveďme rozložením cesty integrační a funkce integrované na tvar

$$\int_{-u}^{u}\frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{1-e^{-2a\pi i-2x\pi}}=\int_0^{u}\frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{1-e^{-2a\pi i+2x\pi}}+\int_0^{u}\frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{e^{2a\pi i+2x\pi}-1}$$

$$+\int_0^{1}(u^2-x^2)^{-s}\,dx\,,$$

aneb konečně na tvar

$$i\int_{-u}^{u}\frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{1-e^{-2a\pi i-2x\pi}}=\int_0^{u}\frac{2\sin 2a\pi\,.\,(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{e^{2x\pi}+e^{-2x\pi}-2\cos 2a\pi}$$

$$+\frac{i}{2}\frac{\Gamma(1-s)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}u^{1-2s};$$

integrál tento lze nahraditi integrálem obecně konvergentním, užijeli se vzorce

$$\int_0^{u}f(x)\,(u^2-x^2)^{-s}\,dx=\frac{1}{1-e^{-2s\pi i}}\int_{(0,u,0)}f(x)\,(u^2-x^2)^{-s}\,dx\,,$$

kde cesta $(0, u, 0)$ vychází z $x=0$ a obíhá v kladném směru úsek $(0\ldots u)$.

Užijemeli těchto výsledků, obdržíme jednak vzorec

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+m)^2+u^2]^s} &= 2\int_u^{\infty} \frac{\sin(2a+s)\pi \,.\, e^{2x\pi} - \sin s\pi}{e^{4x\pi} - 2e^{2x\pi}\cos 2a\pi + 1}(x^2-u^2)^{-s}\,dx \\ &+ 2\int_0^u \frac{\sin 2a\pi \,.\, (u^2-x^2)^{-s}\,dx}{e^{2x\pi}+e^{-2x\pi}-2\cos 2a\pi} + \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} u^{1-2s}\end{aligned}\right.$$

a pak vzorec

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+m)^2+u^2]^s} &= \frac{2}{e^{-2s\pi i}-1}\int_{(\infty,u,\infty)} \frac{\sin(2a+s)\pi \,.\, e^{2x\pi} - \sin s\pi}{e^{4x\pi} - 2e^{2x\pi}\cos 2a\pi + 1}(x^2-u^2)^{-s}\,dx \\ &+ \frac{2\sin 2a\pi}{1-e^{-2s\pi i}}\int_{(0,u,v)} \frac{(u^2-x^2)^{-s}\,dx}{e^{2x\pi}+e^{-2x\pi}-2\cos 2a\pi} + \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} u^{1-2s},\end{aligned}\right.$$

jehož pravá strana existuje pro všecka s a jest jednoznačnou funkcí proměnné s. Tím dána propagace funkce $R(a, u; s)$ definované elementem

$$(9)\qquad R(a, u; s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[(a+m)^2+u^2]^s},$$

vůči proměnné s, pro niž jest jednoznačnou.

Prvé dva výrazy v pravo rovnice (8) mohou míti póly $s = 1, 2, 3, 4 \ldots$. a pak $s = 0, -1, -2, \ldots$. Na bodech poslednějších ale mizejí integrály a funkce zůstává konečnou; na pólech druhu prvního, uvažujme jeden z nich $s = k$, by residuum znělo

$$-(-1)^k \frac{2\sin 2a\pi}{(k-1)!} D_{x=u}^{k-1} f_k(x) + (-1)^k \frac{2\sin 2a\pi}{(k-1)!} D_{x=u}^{k-1} f_k(x),$$

kde psáno

$$f_k(x) = \frac{(u+x)^{-k}}{e^{2x\pi}+e^{-2x\pi}-2\cos 2a\pi},$$

ale residuum toto patrně mizí; prví dva členové na pravé straně rovnice (8) poskytnou tedy za součet celistvou funkci transcendentní a singularity funkce $R(a, u; s)$ mohou pocházeti pouze od členu

$$\frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)} u^{1-2s},$$

který má póly stupně prvního $s = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$

Chcemeli tedy analytickou povahu funkce $R(a, u; s)$ nastíniti, stačí poznamenati, že *rozdíl*

$$R(a, u; s) - \frac{\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(s)\, u^{2s-1}}$$

je celistvá funkce transcendentní vůči s.

Na místě $s=1$ chová se funkce $R(a, u; s)$ pravidelně a její hodnotu obdržíme přímo pomocí řady

$$R(a, u; 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(a+m)^2 + u^2},$$

kterou lze psáti

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2ui} \left(\frac{1}{a+m-ui} - \frac{1}{a+m+ui} \right),$$

takže máme

$$\text{(a)} \qquad R(a, u; 1) = \frac{1}{2ui} \left\{ \frac{\Gamma'(a+ui)}{\Gamma(a+ui)} - \frac{\Gamma'(a-ui)}{\Gamma(a-ui)} \right\}.$$

Zajímavější je znáti prvního součinitele v Maclaurinovském rozvoji

$$(10^*) \qquad R(a, u; s) = A_0(a, u) + A_1 s + A_2 s^2 + \dots$$

K tomu účelu užijeme vzorce

$$\frac{\partial}{\partial u} R(a, u; s) = -2us \, . \, R(a, u; s+1),$$

který lze přímo verifikovati pomocí řady (9), a který musí míti platnost obecnou, poněvadž tu běží o funkci analytickou.

Derivujemeli tedy řadu (10^*) podle u, obdržíme

$$-2usR(a, u; s+1) = \frac{\partial A_0^*(a, u)}{\partial u} + \frac{\partial A_1}{\partial u} s + \frac{\partial A_2}{\partial u} s^2 + \dots;$$

tuto řadu porovnejme s následující, kterou lze obdržeti přímo

$$-2usR(a, u; s+1) = -2usR(a, u; 1) + B_2 s^2 + B_3 s^3 + \dots;$$

tím obdržíme rovnice

$$\frac{\partial A_1(a, u)}{\partial u} = -2uR(a, u; 1), \qquad \frac{\partial A_0(a, u)}{\partial u} = 0$$

čili podle (a)

$$\frac{\partial A_1(a, u)}{\partial u} = i \left\{ \frac{\Gamma'(a+ui)}{\Gamma(a+ui)} - \frac{\Gamma'(a-ui)}{\Gamma(a-ui)} \right\},$$

z čehož máme integrací

$$A_1(a, u) = \log \Gamma(a+ui) \Gamma(a-ui) + C.$$

Abychom určili konstanty C a $A_0(a, u)$, které záviseti mohou toliko na a, uvažme, že pro $u=0$ naše funkce přejde v řadu

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(a+m)^{2s}} = R(a, 2s),$$

která dle vzorce (22*) článku I. začíná svůj rozvoj členy

$$\frac{1}{2} - a + 2s \, . \log \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}},$$

takže máme jednak výsledek

$$A_0(a, u) = \frac{1}{2} - a,$$

a jednak rovnici

$$2 \log \frac{\Gamma(a)}{\sqrt{2\pi}} = \log \Gamma(a)^2 + C,$$

z níž plyne

$$C = -\log 2\pi;$$

bude tedy

$$(10^b) \qquad A_1(a, u) = \log \frac{\Gamma(a+ui)\,\Gamma(a-ui)}{2\pi} = D_{s=0} R(a, u, s).$$

Tím dokázána věta:

Maclaurinovský rozvoj funkce $R(a, u; s)$ definované řadou (9) začíná členy

$$(10) \qquad \left(\frac{1}{2} - a\right) + \log \frac{\Gamma(a+ui)\,\Gamma(a-ui)}{2\pi} s.$$

Určímeli $A_1(a, u)$ pomocí integrálů (7), obdržíme především

$$A_1 = 2\int_u^\infty \frac{\pi \cos 2a\pi\, e^{2x\pi} - \pi}{e^{4x\pi} - 2e^{2x\pi}\cos 2a\pi + 1}\,dx - 2\int_u^\infty \frac{\sin 2a\pi \,.\, \log(x^2 - u^2)}{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2a\pi}\,dx$$

$$- \int_0^u \frac{2\sin 2a\pi \log(u^2 - x^2)\,dx}{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2a\pi} - \pi u.$$

Prvý člen se určí přímo a má hodnotu

$$-\frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-2u\pi}\cos 2a\pi + e^{-4u\pi}),$$

takže plyne

$$A_1 = -\frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-2u\pi}\cos 2a\pi + e^{-4u\pi}) - u\pi$$

$$- \int_0^\infty \frac{2\sin 2a\pi \,.\, \log|x^2 - u^2|\,dx}{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2a\pi},$$

čili

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\log \frac{\Gamma(a+ui)\,\Gamma(a-ui)\sqrt{e^{2u\pi} + e^{-2u\pi} - 2\cos 2a\pi}}{2\pi} \\ &\qquad = -2\sin 2a\pi \int_0^\infty \frac{\log|x^2 - u^2|\,dx}{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2a\pi}, \end{aligned} \right.$$

kde se předpokládá $0 < a < 1$.

Poznamenejme ještě, že vyjádřímeli v rovnici $R(a, u, 0) = \frac{1}{2} - a$ levou stranu pomocí integrálů (7), obdržíme zajímavý vzorec

$$(12) \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2a\pi} = \frac{\frac{1}{2} - a}{2\sin 2a\pi},$$

jejž lze ovšem přímo vypočísti pomocí substituce

$$t = \frac{e^{x\pi} - e^{-x\pi}}{e^{x\pi} + e^{-x\pi}}.$$

Dělímeli $\sin 2a\pi$ a klademeli $a = \frac{1}{2}$, jeví se levá strana ve tvaru neurčitém $\frac{0}{0}$; určímeli ji dle známých pravidel, vznikne

$$(13) \qquad 4\pi \int_0^\infty \frac{\log |x^2 - u^2| \, dx}{(e^{x\pi} + e^{-x\pi})^2} = \frac{\Gamma'(\frac{1}{2} + ui)}{\Gamma(\frac{1}{2} + ui)} + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2} - ui)}{\Gamma(\frac{1}{2} - ui)}.$$

Dodatek. Vzorec (28) na str. 18 vede přímo k výsledku

$$\log \frac{\Gamma(a+b)\,\Gamma(a+1-b)}{\Gamma(a)\,\Gamma(a)}$$
$$= \log a - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} \log \left[\frac{e^{2x\pi} + e^{-2x\pi} - 2\cos 2b\pi}{(e^{x\pi} - e^{-x\pi})^2} \right],$$

který obdržel p. *Stieltjes* velmi elegantní úvahou (Journal de Math. pures et appliquées, 4e série, tome V, 1889). Naopak obdržel p. *Hermite*, vycházeje z výsledku Stieltjesova, vzorec (28), a dokázal jej nanovo způsobem od našich úvah zcela různým (Mathem. Annalen, sv. 41.). Všecky tyto vzorce plynou z naší rovnice (25), jíž jsme na základě theorie Malmsténovských řad odvodili na jaře 1893. —

Opravy. Na str. 22. má ve vzorci (36) prostřední řádek zníti

$$= \log [\sin (w + v)\pi \,.\, \sin (w - v)\pi] + 2\big(w \log w + (1 - w) \log (1 - w)\big).$$

Na str. 27. má v rovnici (8*) druhý člen pravé strany zníti

$$\frac{1}{2a^s} \text{ místo } \frac{1}{2a^s} \frac{1}{a^{s+2\nu-1}}$$

Na str. 46. v posledním řádku má v integrálu při μ^2 v exponentu státi činitel x.

Výtah z dopisu pana Karla Hermitea.*)

V Paříži, dne 7. listopadu 1894.

... Vzorec pro rozvoj $D_x \log \Gamma(x)$, který jste k mému potěšení obdržel,

$$D_x \log \Gamma(x) \sin \pi x + \frac{\pi}{2} \cos \pi x + \left[\log 2\pi - \Gamma'(1)\right] \sin \pi x$$
$$= \sum \log \frac{n}{n+1} \sin (2n+1) \pi x,$$

jsem odůvodnil, jak následuje.

Násobiv $2 \sin (2n+1) \pi x$ shledávám nejprve, že integrál levé strany, vzatý od $x = 0$ do $x = 1$, se redukuje na veličinu

$$(1 \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 2 \sin \pi x \,.\, \sin (2n+1) \pi x \,.\, d \log \Gamma(x) \\ & = \int_0^1 \cos 2n\pi x \, d \log \Gamma(x) - \int_0^1 \cos (2n+2) \pi x \, d \log \Gamma(x) \,. \end{aligned} \right.$$

Ježto máme vzorec

$$D_x \log \Gamma(x) = \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{e^{xy}}{e^y - 1} - \frac{e^y}{y} \right) dy,$$

stačí užiti výrazu

$$\int_0^1 \frac{\cos 2n\pi x \, e^{xy}}{e^y - 1} dx = \frac{y}{y^2 + (2n\pi)^2}$$

pro n a $n+1$, abychom shledali, že pravá strana rovnice (1) zní prostě

$$\int_{-\infty}^{0} \left[\frac{y}{y^2 + (2n\pi)^2} - \frac{y}{y^2 + (2n + 2\,.\,\pi)^2} \right] dy.$$

Tu poznamenávám, že platí vzorec

$$\int_{-\lambda}^{0} \frac{y\,dy}{y^2 + (2n\pi)^2} = \frac{1}{2} \log \frac{(2n\pi)^2}{\lambda^2 + (2n\pi)^2},$$

*) Originál viz v Bulletinu.

takže konečně zbývá pouze voliti za λ nekonečnou hodnotu ve výrazu

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{\lambda^2+(2n+2.\pi)^2}{\lambda^2+(2n\pi)^2}\cdot\frac{(2n\pi)^2}{(2n+2.\pi)^2}\right],$$

jehož limita skutečně dá váš výsledek $\log\dfrac{n}{n+1}$.

V předcházejícím dlužno vyloučiti případ $n=0$, který mne však zvláště zajímal a k němuž se tuto obracím. Máme tudíž

$$2\int\limits_0^1 \sin^2\pi x\, d\log\Gamma(x) = \Gamma'(1) - \log 2\pi,$$

a nahradímeli $2\sin^2\pi x$ hodnotou $1-\cos 2\pi x$, obdržíme konečně

$$\int\limits_{-\infty}^0 \left[\frac{1-e^y}{y} - \frac{y}{y^2+4\pi^2}\right] dy = \Gamma'(1) - \log 2\pi,$$

což podává pro Eulerovu konstantu výraz různý od integrálu

$$\int\limits_{-\infty}^0 \left[\frac{e^y}{e^y-1} - \frac{e^y}{y}\right] dy,$$

a který se vztahuje k logarithmu integrálnému.