Matyáš Lerch
Bemerkungen über eine Classe arithmetischer Lehrsatze

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1894, 8. 32, 1–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501778

XXXII.

Bemerkungen über eine Classe arithmetischer Lehrsätze.

Von Mathias Lerch in Weinberge bei Prag.

(Vorgelegt am 9. November 1894.)

In einigen Noten [1]) haben wir uns mit Eigenschaften der Zahlentheoretischen Functionen $\psi(p, q)$ und $\chi(p, q)$, von denen die erste die Anzahl der die Zahl q übertreffenden Theiler von p, die zweite Anzahl derjenigen Theiler von p, die nicht grösser sind als q, bedeutet.

In der ersten der angeführten Arbeiten sind wir von der Identität

$$(1)\qquad \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(1-x^\nu)(1-x^{\nu+1})}$$

ausgegangen und leiteten mit Hilfe derselben die Gleichung

$$(1a)\qquad \sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(n-\varrho, \varrho) = n$$

ab, woraus sich dann durch eine ziemlich umständliche arithmetische Betrachtung ein zweiter Satz

$$(1b)\qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho, \varrho) = 2n$$

---

[1]) 1. Deux théorèmes d'arithmétique (Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, 1887).

2. Sur une formule d'arithmétique (Comptes Rendus vom 16. Januar 1888 sowie XII. Bd. von Darboux' Bulletin des Sciences mathématiques, Aprilheft 1888).

3. Théorèmes d'arithmétique (ibid., Mai 1888).

ergab, ein Satz, der, wie wir später bemerkt haben, sich sowohl auf analytischem wie auf rein arithmetischem Wege mit grosser Leichtigkeit herleiten lässt.

In der hierauf folgenden zweiten Note benutzten wir die Identität

$$\sum_{\nu=1}^{a}\frac{x^{k\nu}}{(1-x^{\nu})\,(1-x^{a+\nu})}=\sum_{\nu=1}^{a}\frac{x^{\nu}}{(1-x^{a})(1-x^{\nu})}-\sum_{\lambda=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{a}\frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}}, \tag{2}$$

welche uns den Satz

$$\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]}\left[\psi(m-\sigma a,\ k+\sigma-1)-\chi(m-\sigma a,\ a)\right]+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\left[\psi(m+\lambda a,\lambda-1)-\chi(m+\lambda a,a)\right]=0 \tag{2a}$$

lieferte. Im Falle $a=1$ erhält man hieraus

$$\sum_{\sigma=0}^{m-1}\psi(m-\sigma,\ k+\sigma-1)+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\psi(m+\lambda,\ \lambda-1)=k+m-1, \tag{2b}$$

eine Gleichung, aus der die eben besprochenen Resultate (1a) und (1b) sich durch die Annahme $k=1$ und $k=m+1$ sofort ergeben.

Der Satz (1a) und die dazu führende Identität (1) wurden von Herrn J. Schröder[1]) in anderer Richtung verallgemeinert und die damit gewonnenen Zahlensätze mit Hilfe einer von Herrn Busche[2]) stammenden Methode rein arithmetisch begründet.

Ich war nun seit längerer Zeit im Besitz von einer rein arithmetischen Beweismethode meiner angeführten Resultate, welche sich von derjenigen des Herrn Schröder völlig unterscheidet und wie ich glaube gerade den Kern der Sache trifft. Ich habe meine diesbezüg-

[1]) Einige Sätze über Theileranzahlen sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie (Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg; Bd. III., Heft 4, Februar 1894). Man findet hierüber ein Referat in der *Zahlentheorie* des Herrn Bachmann, II. Theil, p. 491.

[2]) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 103.

liche Untersuchung[1]) der Gesellschaft in der Sitzung am 23. Februar vorgelegt, nachdem ich durch Herrn Schröders's freundliche Zuschrift erfahren habe, dass man sich um ähnliche Sätze interessirt.

Im folgenden beabsichtige ich nun für die besprochene Formel (2a) oder vielmehr für einen besonders interessanten Specialfall derselben, aus dem sie sich leicht ergibt, einen lediglich auf Betrachtung von grössten Ganzen beruhenden Beweis zu entwickeln. Nachher werden wir einige mit der Schröder'schen Gleichung verwandte analytische Identitäten ableiten und die daraus entspringenden arithmetischen Resultate besprechen.

I.

Es möge mit $E(x)$ oder mit $[x]$, falls x positiv ist, die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet werden, während darunter im Falle eines negativen x die Null verstanden werden soll, sodass man die Ungleichungen

$$E(x) \leqq x < E(x) + 1, \text{ falls } x > 0,$$

aber

$$E(x) = 0, \text{ falls } x \leqq 0,$$

hat. Wird dann, wie es wiederholt bemerkt werden mag, mit $\psi(k, a)$ die Anzahl der Divisoren von k bezeichnet, welche grösser sind als a, so hat man wie leicht zu sehen

$$\psi(k, a) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ E\left(\frac{k}{a+\mu}\right) - E\left(\frac{k-1}{a+\mu}\right) \right\},$$

denn es wird nur dann die Klammer von Null verschieden und dann gleich Eins sein, wenn $a + \mu$ ein Theiler von k ist.

Ist nun δ einer der die Zahl a übertreffenden Theiler von k, so ist $\delta' = \frac{k}{\delta}$ ein Theiler von k, welcher kleiner bleibt als $\frac{k}{a}$. Nun ist aber die Anzahl dieser Theiler δ' offenbar gleich

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ E\left(\frac{k}{\mu} - a\right) - E\left(\frac{k-1}{\mu} - a\right) \right\},$$

[1]) Sur quelques théorèmes d'arithmétique (Sitzungsberichte der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften 1894).

und weil die Anzahl der δ' mit der der δ übereinstimmen muss, so folgt

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{k}{\mu}-a\right)-E\left(\frac{k-1}{\mu}-a\right)\right\}=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{k}{a+\mu}\right)-E\left(\frac{k-1}{a+\mu}\right)\right\};$$

wird in dieser Gleichung an Stelle von k successive $1, 2, 3, \ldots k$ gesetzt und werden die in der Art sich ergebenden Gleichungen summirt, so erhalten wir unser erstes Resultat

$$(1)\qquad \sum_{\mu=1}^{\infty}E\left(\frac{k}{\mu}-a\right)=\sum_{\mu=1}^{\infty}E\left(\frac{k}{a+\mu}\right),$$

in welchem k und a irgend welche positive ganze Zahlen sind.

Links sind nun alle Glieder, in welchen $\mu>\frac{k}{a}$, gleich Null, und es genügt daher nur bis $\mu=\left[\frac{k}{a}\right]$ zu summiren. Für diese Werthe von μ hat man aber $E\left(\frac{k}{\mu}-a\right)=E\left(\frac{k}{\mu}\right)-a$ und die linke Seite von (1) erhält daher die Form

$$\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{k}{a}\right]}E\left(\frac{k}{\mu}\right)-aE\left(\frac{k}{a}\right),$$

während die rechte Seite der Summe

$$\sum_{\mu=a+1}^{k}E\left(\frac{k}{\mu}\right)$$

identisch gleich ist. Wir können daher unsere Gleichung (1) auch wie folgt schreiben

$$(2)\qquad \sum_{\mu=1}^{\left[\frac{k}{a}\right]}E\left(\frac{k}{\mu}\right)-\sum_{\mu=a+1}^{k}E\left(\frac{k}{\mu}\right)=aE\left(\frac{k}{a}\right).$$

Wird nun daselbst a durch $a-1$ ersetzt und das Resultat von (2) abgezogen, so gelangt man zur Formel

$$(3) \qquad \sum_{\mu=\left[\frac{k}{a}\right]+1}^{\left[\frac{k}{a-1}\right]} E\left(\frac{k}{\mu}\right) = (a-1)\left\{E\left(\frac{k}{a-1}\right) - E\left(\frac{k}{a}\right)\right\}.$$

Um uns zu unserem Hauptgegenstand zu wenden, setzen wir in (1) $k = m - \sigma a$, und summiren über $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ Es ergibt sich in der Weise die Gleichung

$$\sum_{\sigma,\mu} E\left(\frac{m - \sigma a - \mu a}{\mu}\right) = \sum_{\sigma,\mu} E\left(\frac{m - \sigma a}{a + \mu}\right),$$

$$\begin{pmatrix}\sigma = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, 2, 3, \ldots\end{pmatrix}.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir links σ durch $\sigma - \mu$ und rechts μ durch $\mu - a$, wodurch man erhält

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=\mu}^{\infty} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=a+1}^{\infty} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right).$$

Diese Gleichung subtrahiren wir von der Doppelsumme

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right)$$

und erhalten dadurch

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\sigma=0}^{\mu-1} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{a} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right).$$

Die linke Seite, welche man in der Form

$$\sum_{0 \leqq \sigma < \mu} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=\sigma+1}^{\infty} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right)$$

schreiben kann, nimmt eine andere Form an, wenn man in derselben den Summationsbuchstaben μ durch $\nu + \sigma$ ersetzt; dadurch gelangt man zur Gleichung

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} E\left(\frac{m - \sigma a}{\sigma + \nu}\right) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{a} E\left(\frac{m - \sigma a}{\mu}\right).$$

Hievon subtrahiren wir die Gleichung, welche entsteht, wenn man m durch $m-1$ ersetzt, was uns die Beziehung

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+\nu}\right)-E\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+\nu}\right)\right\}$$
$$=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{a}\left\{E\left(\frac{m-\sigma a}{\mu}\right)-E\left(\frac{m-1-\sigma a}{\mu}\right)\right\}$$

liefert.

Nun ist aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{E\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+\nu}\right)-E\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+\nu}\right)\right\}=\psi(m-\sigma a,\ \sigma),$$
$$\sum_{\mu=1}^{a}\left\{E\left(\frac{m-\sigma a}{\mu}\right)-E\left(\frac{m-1-\sigma a}{\mu}\right)\right\}=\chi(m-\sigma a,\ a),$$

wobei, wie schon anfangs bemerkt wurde, $\chi(k,\ a)$ die Anzahl der die Zahl a nicht übertreffenden Theiler von k bedeutet. Man hat daher die Gleichung

$$\sum_{\sigma}\psi(m-\sigma a,\ \sigma)=\sum_{\sigma}\chi(m-\sigma a,\ a),\quad \left(\sigma=0,1,\ldots\left[\frac{m-1}{a}\right]\right), \tag{4}$$

welche eben durch Vermittelung der Function $E(x)$ abgeleitet werden sollte.

Die Gleichung (2), welche sich von der Formel (1) nicht unterscheidet, und welche daher zur Begründung des Resultats (4) hinreichend ist, kann geometrisch durch Betrachtung der Gitterpunkte abgeleitet werden, und dies liefert uns eine der einfachsten und elementarsten Quellen unserer in der Einleitung mit (2a) notirten Relation, wenn auch ihre wahre Natur auf ganz anderem Wege zu suchen war.

II.

Wir ergreifen noch diese Gelegenheit, um einen ebenso auf Betrachtung der grössten Ganzen beruhenden Beweis der von uns früher publicirten Formel [1])

---

[1]) Man sehe den XII. Bd. des Bulletin des Sciences mathématiques, Mai 1888, oder auch die Sitzungsberichte 1894.

$$(5)\qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1}[\psi(m+\alpha n, a)-\psi(m+an, a)]=\sum_{k=1}^{a}(k, n\,|\,m)$$

auseinanderzusetzen; wir bezeichnen hier wie in den citirten Noten mit (k, n) den grössten gemeinsamen Theiler beider Zahlen k, n, und verstehen unter $(k, n\,|\,m)$ die Zahl (k, n), wenn sie in m aufgeht, dagegen aber die Null, wenn dies nicht der Fall ist.

Um diese Formel zu erhalten, gehen wir, wie wir es in einem Specialfalle schon früher gethan haben, von der von Herrn Hermite und Stern bewiesenen Formel

$$(6)\qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1}\left[E\left(\frac{m+\alpha n}{a}\right)-E\left(\frac{\alpha n}{a}\right)\right]=(a, n)E\left(\frac{m}{(a, n)}\right)$$

aus. Wird dieselbe über $a=1, 2, 3, \dots a$ summirt, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\left[E\left(\frac{m+\alpha n}{k}\right)-E\left(\frac{\alpha n}{k}\right)\right]=\sum_{k=1}^{a}(k, n)E\left(\frac{m}{(k, n)}\right).$$

Wird die linke Seite in der Form

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{k=\alpha+1}^{a}\left\{E\left(\frac{m+\alpha n}{k}\right)-E\left(\frac{\alpha n}{k}\right)\right\}$$

geschrieben und hier $k=\alpha+\nu$ gesetzt, so hat man die an und für sich interessante Gleichung

$$(7)\qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{\nu=1}^{a-\alpha}\left\{E\left(\frac{m+\alpha n}{\alpha+\nu}\right)-E\left(\frac{\alpha n}{\alpha+\nu}\right)\right\}=\sum_{k=1}^{a}(k, n)E\left(\frac{m}{(k, n)}\right).$$

Zieht man von derselben die Gleichung ab, welche sich durch Vertauschung von m mit $m-1$ ergibt, so folgt

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{\nu=1}^{a-\alpha}\left\{E\left(\frac{m+\alpha n}{\alpha+\nu}\right)-E\left(\frac{m-1+\alpha n}{\alpha+\nu}\right)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{a}(k, n)\left\{E\left(\frac{m}{(k, n)}\right)-E\left(\frac{m-1}{(k, n)}\right)\right\},$$

und dies ist genau die Formel (5), weil der Klammerausdruck rechts nur dann von Null verschieden und dann gleich Eins wird, wenn (k, n) ein Theiler von m ist, sodass der betreffende Term mit $(k, n \mid m)$ übereinstimmt.

Die Formel (7) gewinnt an Eleganz, wenn man die Formel (6) durch die Gleichung

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} E\left(\frac{\alpha n}{a}\right) = \frac{an - a - n + (a, n)}{2}$$

vervollständigt. Es ergibt sich dann an Stelle von (7) die Gleichung

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{\nu=1}^{a-\alpha} E\left(\frac{m + \alpha n}{\alpha + \nu}\right) \tag{7*}$$
$$= \frac{n\, a(a-1) - a(a+1)}{4} + \sum_{k=1}^{a} (k, n) \left\{ \frac{1}{2} + E\left(\frac{m}{(k, n)}\right) \right\}.$$

III.

Wir gehen nun zur Entwickelung einiger analytischen Identitäten über, welche der von Herrn J. Schröder äusserst einfach abgeleiteten Gleichung, der man auch folgende Form ertheilen kann

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{aq^\nu}{(1 - aq^\nu)(1 - aq^{\nu+1}) \ldots (1 - aq^{\nu+m})} \tag{8}$$
$$= \frac{1 - (1-a)(1-qa) \ldots (1-q^{m-1}a)}{(1-q^m) \cdot (1-a)(1-qa) \ldots (1-q^{m-1}a)},$$

analog sind.

Unsere Untersuchung geht darauf hinaus, uns eine Entwickelung der Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1 - q^\nu x)(1 - q^{\nu+1} ax)(1 - q^{\nu+2} ax) \ldots (1 - q^{\nu+m} ax)}, \tag{9}$$

die im Falle $a = 1$ in den Schröder'schen Ausdruck übergeht, zu verschaffen.

Zu dem Zwecke zerlegen wir die in q^ν rationale Function

$$M_\nu = \frac{1}{(1 - q^\nu x)(1 - q^{\nu+1} ax)(1 - q^{\nu+2} ax) \ldots (1 - q^{\nu+m} ax)}$$

in Partialbrüche, wodurch sich die Gleichung

$$M_\nu = \frac{A}{1-q^\nu x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{A_\alpha}{1-q^{\nu+\alpha} a x}$$

ergibt, und dabei ist offenbar

$$A = \frac{1}{(1-qa)(1-q^2 a)\ldots(1-q^m a)},$$

$$A_\alpha = \frac{(-1)^\alpha a q^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{\alpha-1}).(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{m-\alpha})} \, \frac{1}{1-q^\alpha a}.$$

Wir haben alsdann

$$f(x) = A \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^\nu x} + \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^{\nu+\alpha} a x}.$$

Wird hier

$$A_\alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^{\nu+\alpha} a x}$$

durch

$$A_\alpha q^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^\nu a x} - A_\alpha q^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{q^\nu x}{1-q^\nu a x}$$

ersetzt, so folgt

$$f(x) = A \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^\nu x} + \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha q^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^\nu a x}$$
$$- \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\nu=0}^{\alpha-1} \frac{A_\alpha q^{-\alpha+\nu} x}{1-q^\nu a x}.$$

Nun ist aber nach einem bekannten Satze über die Zähler der Partialbrüche

$$\frac{A}{x} + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{A_\alpha}{q^\alpha a x} = 0,$$

und daher

$$\sum_{\alpha=1}^{m} q^{-\alpha} A_\alpha = -aA,$$

so dass unser letztes Resultat die Form erhält

$$(10)\quad f(x) = \frac{1}{(1-qa)(1-q^2a)\dots(1-q^m a)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{q^\nu x}{1-q^\nu x} - \frac{q^\nu a x}{1-q^\nu a x} \right) + R_m(x, a, q),$$

wobei mit R_m die in x, a, q rationale Function

$$(11)\quad R_m(x, a, q) = \sum_{0 \leqq \nu < \alpha \leqq m} \frac{(-1)^{\alpha-1} q^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}}{(1-q)\dots(1-q^{\alpha-1}).(1-q)\dots(1-q^{m-\alpha})} \times \frac{q^\nu}{(1-q^\nu a x)(1-q^\alpha a)}$$

angedeutet wurde.

Nach der von Herrn J. Schröder bewiesenen Formel (8) hat diese Function im speciellen Falle $a = 1$ den äusserst einfachen Werth

$$\frac{1}{(1-q^m).(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{m-1}x)} - \frac{1}{1-q^m},$$

und dieses Resultat lässt sich auch hier direct verificiren, wenn man die bekannte Identität

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \frac{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q^{m-\alpha+1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^\alpha)} q^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} c^\alpha = (1+c)(1+qc)\dots(1+q^{m-1}c)$$

zu Hilfe nimmt.

Die unendliche Reihe rechts in (10) reducirt sich auf eine endliche Anzahl Glieder, wenn man $a = q^{n-1}$ (unter n eine ganze Zahl verstanden) setzt.

Im Falle $m = 1$ erhält man die Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1-q^{\nu+n}x)} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{q^\nu x}{(1-q^n)(1-q^\nu x)},$$

welche für $x = q$ in den Specialfall $k = 1$ der Gleichung (2) der Einleitung übergeht.

Wir nehmen nun $m = 2$ und erhalten

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n}\frac{q^{\nu}x}{(1-q^{\nu}x)(1-q^{\nu+n}x)(1-q^{\nu+n+1}x)} \\ \displaystyle=\frac{1}{(1-q^{n})(1-q^{n+1})}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{q^{\nu}x}{1-q^{\nu}x}-\frac{q^{n}x}{(1-q)(1-q^{n})(1-q^{n}x)}. \end{cases}$$

Wird hier $x=q$ gewählt, und $n-1$ statt n geschrieben, so erhält man

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n+\nu-1})(1-q^{n+\nu})} \\ \displaystyle=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{q^{\nu}}{(1-q^{n})(1-q^{n-1})(1-q^{\nu})}-\frac{q^{n}}{(1-q)(1-q^{n-1})(1-q^{n})}. \end{cases}$$

Wir entwickeln nun beiderseits nach Potenzen von q und erhalten

$$\sum q^{\nu(\mu+\alpha+\beta)+\alpha n+\beta n-\beta}=\sum q^{k\mu+\alpha n+\beta n-\beta}$$
$$-\sum q^{n\mu+\alpha+\beta n-\beta}$$

mit den Summationsbedingungen

$$\mu,\ \nu=1,\ 2,\ 3,\ldots;\quad \alpha,\ \beta=0,\ 1,\ 2,\ldots;\quad k=1,\ 2,\ldots n.$$

Links wird nun der Coefficient von q^{m} durch die Anzahl der Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$\nu(\mu+\alpha+\beta)=m-\alpha n-\beta n+\beta$$

bestimmt, und somit durch den Ausdruck

$$\sum_{\alpha,\beta}\psi(m-\alpha n-\beta n+\beta,\ \alpha+\beta)$$

dargestellt.

In der ersten Reihe rechts kommt der Coefficient von q^{m} mit der Anzahl Lösungen der Gleichung

$$m-\alpha n-\beta n+\beta=k\mu$$

überein und wird somit der Summe

$$\sum_{\alpha,}\chi(m-\alpha n-\beta n+\beta,\ n)$$

gleich.

Schliesslich wird der Coefficient von q^m in der zweiten Summe rechts der Anzahl von Lösungen der Gleichung

$$n\mu + \alpha + \beta n - \beta = m$$

gleich; diese Gleichung kann durch die Congruenz

$$\alpha \equiv \beta + m, \pmod{n},$$

verbunden mit der Ungleichung $\alpha < m - (n-1)\beta$, ersetzt werden.

Um die Anzahl der Lösungen dieser Congruenz zu ermitteln, halten wir β fest, setzen

$$k_\beta = \left[\frac{m-(n-1)\beta}{n}\right],$$

so dass

$$m - (n-1)\beta = k_\beta \,.\, n + \nu, \quad 0 \leqq \nu < n,$$

sich ergibt, und alsdann haben wir nur die Anzahl der Lösungen α der Congruenz

$$\alpha \equiv \beta + m \pmod{n},$$

verbunden mit der Ungleichung

$$0 \leqq \alpha < nk_\beta + \nu,$$

zu bestimmen. Diese Anzahl ist aber genau k_β, weil ν modulo n mit $m+\beta$ congruent ist. Der gesuchte Coefficient wird somit durch die Summe

$$\Sigma k_\beta = \Sigma E\left(\frac{m+\beta}{n} - \beta\right)$$

dargestellt.

Fassen wir alles zusammen, so erhalten wir das Resultat

$$\sum_{\alpha,\beta} \psi(m - \alpha n - \beta n + \beta, \alpha + \beta) = \sum_{\alpha,\beta} \chi(m - \alpha n - \beta n + \beta, n) - \sum_\beta E\left(\frac{m+\beta}{n} - \beta\right),$$

oder wenn man $\alpha + \beta = \sigma$ setzt und ϱ statt β schreibt,

$$(13a) \quad \sum_{\varrho,\sigma} \psi(m + \varrho - \sigma n, \sigma) = \sum_{\varrho,\sigma} \chi(m + \varrho - \sigma n, n) - \sum_\varrho E\left(\frac{m+\varrho}{n} - \varrho\right).$$
$$(\varrho \leqq \sigma = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir erhalten ein zweites Resultat verwandter Natur, wenn wir die beiden Seiten der Gleichung (12) nach Potenzen von $x - 1$ entwickeln und die absoluten Glieder der Entwickelungen einander gleichsetzen; es ergibt sich in der Weise zuerst die Identität

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{\nu+n})(1-q^{\nu+n+1})} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1-q^{n})(1-q^{n+1})}$$
$$+ \frac{q^{n}}{(1-q^{n})^{2}(1-q^{n+1})} + \frac{q^{n+1}}{(1-q^{n})(1-q^{n+1})^{2}} - \frac{q^{n}}{(1-q)(1-q^{n})^{2}}.$$

Wird hier nach Potenzen von q entwickelt, so hat man

$$\sum q^{\nu(\mu+\alpha+\beta)+n\alpha+n\beta+\beta} = \sum q^{k\mu+\alpha n+\beta n+\beta}$$
$$+ \sum(\alpha+\beta)q^{n\alpha+n\beta+\beta} - \sum \alpha q^{n\alpha+\beta},$$

wobei die Summationsbedingungen folgendermassen lauten:

$$\mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3\ldots;\quad \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ldots;\quad k = 1,\ 2,\ldots,n.$$

Die Coefficienten von q^{m} links und in der ersten Reihe rechts werden resp. durch die Summen

$$\sum_{\alpha,\beta} \psi(m - \alpha n - \beta n - \beta,\ \alpha + \beta) \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha,\beta} \chi(m - \alpha n - \beta n - \beta,\ n)$$

dargestellt und es bleibt nur übrig, diesen Coefficienten in der Function

$$\sum(\alpha+\beta)q^{n\alpha+n\beta+\beta} - \sum \alpha q^{n\alpha+\beta}$$

zu erhalten. Wir haben somit zuerst die Summe

$$\sum(\alpha+\beta)$$

bezogen auf sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$n(\alpha+\beta)+\beta = m$$

zu erhalten. Wird hier $\alpha+\beta=\sigma$ gesetzt, so geht unser Ausdruck in die Summe $\Sigma\sigma$ bezogen auf sämmtliche Lösungen der Gleichung $n\sigma+\beta=m$, $\sigma \gtreqless \beta$, über.

Aus dieser Gleichung folgt $n\sigma \leqq m$ und die Ungleichung liefert $m - n\sigma \leqq \sigma$. Man hat also die Werthe σ den Ungleichungen

$$\sigma \leqq \left[\frac{m}{n}\right], \quad \sigma \geqq \left[\frac{m-1}{n+1}\right] + 1$$

gemäss zu wählen, so dass die Zahl σ nur die Werthe

$$\left[\frac{m-1}{n+1}\right]+1, \quad \left[\frac{m-1}{n+1}\right]+2, \ldots \left[\frac{m}{n}\right]$$

annehmen darf, und dann wird in der That jedes dieser σ einmal in der Summe $\Sigma\sigma$ vorkommen, weil für dieses σ die Bedingungen $n\sigma + \beta = m$, $\sigma \geqq \beta$ immer und zwar durch einen bestimmten Werth β erfüllt werden können.

Es wird somit unsere Summe lauten

$$\sum_{\sigma=\left[\frac{m-1}{n+1}\right]+1}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \sigma = \frac{1}{2} E\left(\frac{m}{n}\right) E\left(\frac{m+n}{n}\right) - \frac{1}{2} E\left(\frac{m-1}{n+1}\right) E\left(\frac{m+n}{n+1}\right).$$

Schliesslich ist der Coefficient von q^m in $\Sigma \alpha q^{\alpha n + \beta}$ gleich

$$\frac{1}{2} E\left(\frac{m}{n}\right) E\left(\frac{m+n}{n}\right),$$

so dass sich das Resultat

$$\sum_{\alpha,\beta} \psi(m - \alpha n - \beta n - \beta, \alpha + \beta)$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} \chi(m - \alpha n - \beta n - \beta, n) - \frac{1}{2} E\left(\frac{m-1}{n+1}\right) E\left(\frac{m+n}{n+1}\right)$$

ergibt; wird hier wie oben $\alpha + \beta = \sigma$, $\beta = \varrho$ gesetzt, so haben wir

$$(14) \quad \sum_{\varrho,\sigma} \psi(m - \varrho - \varrho n, \sigma) = \sum_{\varrho,\sigma} \chi(m - \varrho - \sigma n, n) - \frac{1}{2} E\left(\frac{m-1}{n+1}\right) E\left(\frac{m+n}{n+1}\right),$$
$$(\varrho \leqq \sigma = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir specialisiren noch die Gleichung (10), indem wir $u = -1$ setzen, wodurch sich die Identität

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1+q^{\nu+1}x)\dots(1+q^{\nu+m})} \\ \displaystyle= \frac{2}{(1+q)(1+q^2)\dots(1+q^m)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^{2\nu}x^2} + R_m(x, -1, q) \end{cases}$$

ergibt. Nimmt man weiter in (10) $a = \frac{1}{\sqrt{q}}$ und vertauscht nachher q mit q^2, so folgt

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{2\nu} x}{(1-q^{2\nu}x)(1-q^{2\nu+1}x)(1-q^{2\nu+3}x)\dots(1-q^{2\nu+2m-1}x)} \\ \displaystyle= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2m-1})} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^k x}{1-q^k x} \end{cases}$$

$$- \frac{x}{q-x} \cdot \frac{1}{(1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2m-1})} + R_m\left(x, \frac{1}{q}, q^2\right).$$

Im Falle $m = 1$ liefern die Formeln (15) und (16) die Identitäten

$$(15a)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{(1-q^\nu x)(1+q^{\nu+1}x)} = \frac{2}{1+q} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^\nu x}{1-q^{2\nu}x^2} - \frac{x}{(1+q)(1+x)}$$

$$(16a)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{2\nu} x}{(1-q^{2\nu}x)(1-q^{2\nu+1}x)} = \frac{1}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^k x}{1-q^k x};$$

wird in (15a) $x = q$ gesetzt, so folgt

$$(15b)\quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(1-q^\nu)(1+q^{\nu+1})} = \frac{2}{1+q} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{1-q^{2\nu}} - \frac{q}{(1+q)^2},$$

und hieraus ergibt sich in bekannter Weise das Resultat

$$(15c)\quad \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \psi(m-\alpha, \alpha) = 2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} (-1)^\alpha \Theta'(m-\alpha) + (-1)^m m,$$

wobei *mit $\Theta'(k)$ die Anzahl ungerader Theiler von k bezeichnet* wurde.

Man erhält weiter aus (16a), wenn $x = q$ gesetzt und nach Potenzen von q entwickelt wird, die Formel

$$(16c)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi'(m-\alpha, \alpha) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} E\left(\frac{m}{k}\right),$$

in welcher $\psi'(n, \alpha)$ die *Anzahl derjenigen die Zahl α übertreffenden Theiler von n bedeutet, deren Complementartheiler ungerade sind.*

Von grösserem Interesse sind die Resultate, zu denen man gelangt, wenn man in der Formel (10) für a den Werth $-q^{n-1}$ oder $q^{n-\frac{1}{2}}$ setzt; es ergibt sich im ersten Falle

$$(17)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu} x}{(1-q^{\nu}x)(1+q^{n+\nu}x)(1+q^{n+\nu+1}x)\ldots(1+q^{n+m+\nu-1}x)} \\ \displaystyle= \frac{2}{(1+q^{n})(1+q^{n+1})\ldots(1+q^{n+m-1})} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu}x}{1-q^{2\nu}x^{2}} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{(1+q^{n})(1+q^{n+1})\ldots(1+q^{n+m-1})} \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{q^{\nu}x}{1+q^{\nu}x} + R_m(x, -q^{n-1}, q),$$

also speciell im Falle $m = 1$

$$(18)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu}x}{(1-q^{\nu}x)(1+q^{n+\nu}x)} = \frac{2}{1+q^{n}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu}x}{1-q^{2\nu}x^{2}}$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{q^{\nu}x}{(1+q^{n})(1+q^{\nu}x)}.$$

Wird hier $x = q$ gesetzt, so folgt

$$(18a)\qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{(1-q^{\nu})(1+q^{n+\nu})}$$

$$= \frac{2}{1+q^{n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu}}{1-q^{2\nu}} - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{q^{\nu}}{(1+q^{n})(1+q^{\nu})},$$

woraus sich die Relation

$$(18b)\qquad \sum_\alpha (-1)^\alpha \psi(m - \alpha n, \alpha)$$
$$= 2\sum_\alpha (-1)^\alpha \Theta(m - \alpha n) + \sum_\alpha (-1)^\alpha \bar{\chi}(m - \alpha n, n)$$

ergibt. Dabei bezeichnet $\bar{\chi}(k, n)$ die *Anzahl der Divisoren von k, die höchstens n gleich sind und deren Complementartheiler gerade sind, vermindert um die Anzahl aller Divisoren dieser Art, deren Complementartheiler ungerade sind.*

IV.

Eine bekannte Eigenschaft der Function [1])

$$\varphi(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu x y^\nu}{1 - q^\nu x},$$

deren specielle Fälle in den Formeln (10) und (16) rechts vorkommen, ermöglicht eine Reihe von weiteren arithmetischen Resultaten zu erhalten.

Unter der Voraussetzung $|qx| < 1$ benutze ich im allgemeinen Gliede von $\varphi(x)$ die Reihenentwickelung

$$\frac{q^\nu x}{1 - q^\nu x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} q^{\mu\nu} x^\mu,$$

sodass wir die Identität

$$\varphi(x) = \sum_{\mu, \nu} q^{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

erhalten. In der Doppelreihe rechts sondern wir zuerst die Glieder

---

[1]) Kirchhoff, Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften, 1885. Des Weiteren vergl. A. Guimarães in Jornal de Sciencias mathematicas, vol. VIII, 1887. Ein arithmetischer Beweis des Kirchhoff'schen Resultates wurde von Halphen (Fonctions elliptiques, t. I.) und von uns (Zeitschrift für Mathematik und Physik 1888. in portug. Uebersetzung im Jornal de Sciencias math. vol. IX) geliefert. Die Idee des Beweises und die ersten Anwendungen auf Arithmetik verdankt man wohl Herrn Hermite (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 99).

$\mu = \nu$ ab und zerlegen die übrigbleibenden Glieder in zwei Gruppen jenachdem in denselben $\mu > \nu$ oder $\mu < \nu$ ist. Es ergibt sich in der Weise

$$\varphi(x) = \sum q^{\mu^2} x^\mu y^\mu + \sum_{\mu > \nu} q^{\mu\nu} x^\mu y^\nu + \sum_{\mu < \nu} q^{\mu\nu} x^\mu y^\nu .$$

In der zweiten Reihe rechts setzen wir nun der Bedingung $\mu > \nu$ gemäss $\mu = \nu + \alpha$, in der dritten dagegen $\nu = \mu + \alpha$, und führen die Summation in Bezug auf $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ aus; es kommt

$$\varphi(x) = \sum q^{\mu^2} x^\mu y^\mu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{\nu^2+\nu} x^{\nu+1} y^\nu}{1 - q^\nu x} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{q^{\mu^2+\mu} x^\mu y^{\mu+1}}{1 - q^\mu y}$$

oder nachdem man zusammengezogen hat:

$$\text{(19)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu x y^\nu}{1 - q^\nu x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - q^{2\nu} x y}{(1 - q^\nu x)(1 - q^\nu y)}\, q^{\nu^2} x^\nu y^\nu .$$

Mit Hilfe dieser Gleichung geht z. B. die rechte Seite von (16a) über in

$$\frac{1}{1-q} \cdot \frac{x}{1-x} + \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1 + q^{2\nu} x}{(1 - q^\nu x)(1 + q^\nu)}\, q^{\nu^2} x^\nu ,$$

sodass man die Identität

$$\text{(16d)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{2\nu} x}{(1 - q^{2\nu} x)(1 - q^{2\nu+1} x)} = \frac{x}{1 - x} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-qx} \right)$$
$$+ \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1 + q^{2\nu}}{(1 - q^\nu x)(1 + q^\nu)}\, q^{\nu^2} x^\nu$$

erhält. Hieraus ergibt sich für $x = 1$ das Resultat

$$\text{(16e)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^{2\nu}}{(1 - q^{2\nu})(1 - q^{2\nu+1})}$$
$$= \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1 + q^{2\nu}}{1 - q^{2\nu}}\, q^{\nu^2} .$$

Wir schreiben die rechte Seite in der Form

$$\frac{q}{(1-q)^2}+\frac{1}{1-q}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu q^{\nu^2}+\frac{2}{1-q}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}q^{\nu^2},$$

und benutzen nach dem Vorgange des Herrn Hermite[1]) die Formel

$$\frac{1}{1-q}\,\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{k}{2\nu}\right]q^k,$$

woraus sich alsdann

$$\frac{2}{1-q}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{q^{2\nu}}{1-q^{2\nu}}q^{\nu^2}=2\sum_{\nu,k}(-1)^\nu\left[\frac{k}{2\nu}\right]q^{k+\nu^2}$$

ergibt; der Coefficient von q^m in der nach Potenzen von q geordneten Entwickelung dieser Grösse wird nun durch

$$\sum(-1)^\nu E\left(\frac{m-\nu^2}{2\nu}\right),\quad (\nu=1,2,3,\ldots)$$

dargestellt; beachtet man ferner die Identitäten

$$\frac{q}{(1-q)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}mq^m,\quad \frac{1}{1-q}\sum_{1}^{\infty}(-1)^\nu q^{\nu^2}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{m}]}-1}{2}q^m,$$

so ergibt sich das Resultat, dass der Coefficient von q^m in der nach Potenzen von q fortschreitenden Entwickelung der rechten Seite von (16e) der Summe

$$m+\frac{(-1)^{[\sqrt{m}]}-1}{2}+2\sum_{\nu=1,2,3,\ldots}(-1)^\nu E\left(\frac{m-\nu^2}{2\nu}\right)$$

gleich ist. Wird nun derselbe Coefficient in der Entwickelung der

[1]) Man sehe seine an schönen Resultaten und nützlichen Methoden reiche Abhandlung „Sur quelques conséquences arithmétiques des formules de la théorie des fonctions elliptiques (Mélanges math. et astron. tirés de Bulletin de l'Académie Impériale de St. Pétersbourg, tome VI) sowie Acta mathematica, Bd. V.

linken Seite von (16e) in gewöhnlicher Weise bestimmt, so erhält man das Resultat

$$(16f)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \psi_0(m-\alpha,\, 2\alpha) = m + \frac{(-1)^{[\sqrt{m}]}-1}{2} + 2\sum_{\nu=1,2,3,\dots} (-1)^{\nu} E\left(\frac{m-\nu^2}{2\nu}\right),$$

wobei mit $\psi_0(k, \mu)$ die Anzahl der geraden Theiler von k, die grösser sind als μ, bezeichnet wurde.

Verlag der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. — Druck von Dr. Ed. Grégr, Prag 1894.