Matyáš Lerch

Bestimmung der Anzahl merkwirdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n-ter Ordnung k-ter Stufe

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1885, 597-600

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501766

Die fossilen Arthropoden der Steinkohlenformation von Rakonitz, nämlich die der Radnitzer und der Lubná-Nýřaner Schichten gehören mit einer Ausnahme ausschliesslich den Luftathmern: den Insecten, Myriopoden und namentlich den Arachniden an und stammen grösstentheils aus dem Noeggerathienschiefer der unteren Radnitzer Schichten und zwar aus dem Steinkohlenbergbaue „Moravia" bei Rakonitz 11 Arten in 16 Exemplaren und 1 Art aus derselben Schichte von dem Fundorte Petrovic. „Moravia", speciell der Punkt „na Kavanu" erscheint bis jetzt als der reichste europaeische Fundort von fossilen interessanten Arachniden.

Es sei noch erwähnt, dass der Cyclophthalmus senior neulich von Thorell und Lindström, Kongl. Svenska Vetenskaps-Akad. Handlingar 1885 B. 21, Nr. 9, p. 17 u. 24 in Cyclophthalmus senior Corda, C. Sternbergii (Corda) und C. Kralupensis n. aufgelöst wurde. Demnach scheinen auch die beiden bei Rakonitz aufgefundenen Exemplare von Cyclophthalmus neue Arten zu repräsentieren.

Die höhere Carbonétage bei Rakonitz: die Lubná-Nýřaner Schichten haben 5 Anthropodenarten, darunter 4 Luftathmer, geliefert.

Anmerkung. Endlich sind auch aus den Kounower Schichten der Permformation von Rakonitz — dieser Name ist für die mittelböhmischen geologischen Verhältnisse geeigneter als das „Rothliegende", weil die rothen Schichten bereits mit dem Lubnaer Kohlenflötze anfangen — zwei Arthropoden und zwar die Myriopodenart Julus pictus Frič aus der Kounower „Schwarte" und die an allen Fundorten der „Schwarte" nicht selten vorkommende Crustacee Estheria cyanea Frič schon früher bekannt geworden.

42.

Bestimmung der Anzahl merkwürdiger Gruppen einer allgemeinen Involution n-ter Ordnung k-ter Stufe.

Vorgetragen von **Mathias Lerch** am 27. November 1885.

Im Folgenden will ich einen Satz entwickeln, dessen einige specielle Fälle vom Herrn *Emil Weyr* schon im Jahre 1879*) ange-

*) Über Involutionen *n*-ten Grades und *k*-ter Stufe. Sitzungsber. der kais. Akad. der Wiss. in Wien, 17. April 1879. Beiträge zur Curvenlehre, Wien, 1880. (pag. 35.).

geben worden sind. Das eigentliche Resultat habe ich schon im Jahre 1882 gefunden, als ich mich damals mit dieser Weyr'schen Arbeit beschäftigte, jedoch hat mich der Mangel an Strenge der Entwickelung von der Publikation desselben abgehalten. Da ich nicht die Theorie der höheren Involutionen, sondern nur einen Satz derselben zu entwickeln beabsichtige, darf ich wenigstens die erste Hälfte der citirten Weyr'schen Abhandlung als bekannt voraussetzen.

Wir wollen uns auf die sogen. *allgemeinen* Involutionen n-ter Ordnung k-ter Stufe beschränken, d. h. wir wollen gewisse als *singulär* zu bezeichnende, jedoch nicht näher zu charakterisirende Fälle ausschliessen.

Eine allgemeine Involution n-ter Ordnung k-ter Stufe, die wir kurz mit I_n^k andeuten wollen, hat eine endliche Anzahl merkwürdiger Gruppen vom Typus $(r_1, r_2, \ldots r_\varrho)$, welche je ein (r_1+1)-faches, (r_2+1)faches, etc. und endlich ein $(r_\varrho+1)$faches Element besitzen, wenn die Bedingungen $r_1+r_2+\ldots+r_\varrho=k$, $k+\varrho\leqq n$ erfüllt sind. Diese Anzahl will ich mit $\varphi\,(r_1, r_2, \ldots r_\varrho\,|\,n, k)$ bezeichnen, und ihre vollständige Bestimmung ist der Zweck dieser Zeilen.

Man darf offenbar die Zahlen $r_1, r_2, \ldots r_\varrho$ in einer nicht abnehmenden Reihe geordnet voraussetzen, sodass $r_1\geqq 1$, und dabei $r_1\leqq r_2\leqq r_3\leqq\ldots\leqq r_\varrho$ ist.

Die merkwürdigen Gruppen vom Typus $(r_1, r_2\ldots r_\varrho)$ werden auf folgende Weise erhalten: Man wählt ein veränderliches Element a_1 mit der Multiplicität r_1, und bestimmt die $\varphi\,(r_2, r_3, \ldots r_\varrho\,|\,n-r_1, k-r_1)$ merkwürdigen Gruppen vom Typus $(r_2, r_3, \ldots r_\varrho)$ der dem r_1-fachen Elemente a_1 adjungirten Involution $I_{n-r_1}^{k-r_1}$; jede der eben bestimmten Gruppen enthält ausser den mehrfachen insgesammt $r_2+r_3+\ldots.+r_\varrho+(\varrho-1)=k+\varrho-r_1-1$ einfache Elemente vertretenden Elementen weitere $n-(k+\varrho-1)$ einfache Elemente, die mit ζ bezeichnet werden mögen, indem sie als einander conjugirt aufgefasst werden sollen. Diese Differenz ist nämlich auf Grund der Voraussetzung $n\leqq k+\varrho$ stets von Null verschieden und positiv. Bestimmt man nun das variable Element a_1 so, dass es mit einem der zugehörigen ζ-Elemente zusammenfällt, so bekommt man alle die gesuchten merkwürdigen Gruppen vom Typus $(r_1, r_2, \ldots r_\varrho)$.

Um nun die Anzahl der Coincidenzen des a_1 mit einem ζ zu bestimmen, muss man wissen, wie viele ζ einem a_1 entsprechen und umgekehrt, wie viele a_1 ein und dasselbe ξ hervorrufen. Die erste Anzahl, nämlich die der einem beliebigen a_1 entsprechenden ξ ist nach dem eben gesagten gleich

$$(n-k-\varrho+1)\,.\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-r_1,\, k-r_1).$$

Die Anzahl der zu einem ξ zugehörigen a_1 bestimmt man auf folgende Weise: Es ist der Definition gemäss a_1 ein r_1-faches Element einer merkwürdigen Gruppe der dem Elemente ξ adjungirten Involution I_{n-1}^{k-1}, u. zw. vom Typus $(r_1-1,\, r_2, \ldots r_\varrho)$, und da jede derselben der Bedingung $r_1 \leqq r_2 \leqq r_3 \ldots \leqq r_\varrho$ zufolge nur ein einziges r_1-faches Element besitzt, so entsprechen jedem ξ immer $\varphi(r_1-1,\, r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)$ Elemente a_1, wenn man $r_1>1$ voraussetzt. Ist aber $r_1=1$, so ist a_1 ein einfaches Element einer merkwürdigen Gruppe vom Typus $(r_2, \ldots r_\varrho)$ der dem Elemente ξ zugehörigen adjungirten Involution I_{n-1}^{k-1}; da jede dieser $\varphi(r_2, \ldots r_\varrho \,|$ $n-1,\, k-1)$ Gruppen ausser ξ weiter $n-1-(k-1+\varrho-1)=$ $=n-(k+\varrho-1)$ einfache Elemente besitzt, von denen jedes für a_1 genommen werden kann, so gibt es in diesem Falle $(r_1=1)$ im Ganzen

$$(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)$$

Elemente a_1, die demselben ξ entsprechen.

Nach dem *Chasle*'schen Correspondenzprincip gibt es nun im Falle $r_1>1$

$$\begin{gathered}(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots, r_\varrho \,|\, n-r_1,\, k-r_1)+\\ +\varphi(r_1-1,\, r_2, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)\end{gathered}$$

und im Falle $r_1=1$

$$\begin{gathered}(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-r_1,\, k-r_1)+\\ +(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)=\\ =2(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)\end{gathered}$$

Coincidenzen eines ξ mit einem a_1, und man hat also

$\alpha)$ $\varphi(1, r_2, \ldots r_\varrho \,|\, n, k)=2(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1, k-1)$

und für $r_1>1$

$\beta)$ $\varphi(r_1, r_2, \ldots r_\varrho \,|\, n, k)=(n-k-\varrho+1)\,\varphi(r_2, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-r_1, k-r_1)$
$\qquad +\varphi(r_1-1,\, r_2,\, r_3, \ldots r_\varrho \,|\, n-1,\, k-1)$

Durch wiederholte Anwendung der Reductionsformel $\beta)$ bekommt man

$$\varphi(r_1, r_2, \dots r_\varrho \mid n, k) = \varphi(1, r_2, \dots, r_\varrho \mid n - r_1 + 1, k - r_1 + 1)$$
$$+ (r_1 - 1)(n - k - \varphi + 1)\,\varphi(r_2, \dots r_\varrho \mid n - r_1, k - r_1)$$

und daraus mit Hülfe von α) schliesslich die Reduktionsformel

$$\varphi(r_1, r_2, \dots, r_\varrho \mid n, k) = (r_1 + 1)(n - k - \varrho + 1)\,\varphi(r_2, \dots r_\varrho \mid n - r_1, k - r_1) \tag{1}$$

Durch wiederholte Anwendung der Formel (1) und durch Benutzung des bekannten Resultates der Herren *C. Le Paige* und *Emil Weyr*, welches in der Formel $\varphi(\mu \mid \nu, \mu) = (\mu + 1)(\nu - \mu)$ besteht, bekommt man das gesuchte Resultat

$$\varphi(r_1, r_2, \dots r_\varrho \mid n, k) = \varrho! \binom{n-k}{\varrho} \prod_{i=1}^{\varrho} (1 + r_i), \tag{2}$$

in Worten:

„*Jede allgemeine* I_n^k *besitzt*

$$\varrho! \binom{n-k}{\varrho} (1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_\varrho)$$

merkwürdige Gruppen vom Typus$(r_1, r_2, \dots r_\varrho)$".

Die Bedingung $n \geqq k + \varrho$ wäre überflüssig zu erwähnen, da für den Fall $n < k + \varrho$ diese Anzahl von selbst verschwindet, und also auch hier die Übereinstimmung stattfindet.

Der vom Herrn Emil Weyr gefundene specielle Fall entsteht aus dem unseren allgemeinen durch die Annahme $\varrho = k$, also $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$, und lautet: „Die allgemeine I_n^k besitzt $2^k \binom{n-k}{k} k!$ Gruppen mit je k „Doppelelementen".

43.

O rozkladu stejnorodého pohybu.

Přednášel prof. dr. **A. Seydler** dne 11. prosince 1885.

§. 1. Pohyb rovinný o sobě.

Ve své přednášce ze dne 13. března t. r. poukázal jsem předně k tomu, kterak nejvšeobecnější pohyb lze považovati co postup nekonečně mnoha nekonečně malých stejnorodých pohybů (deformací),