Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Sur un point concernant la théorie de la fonction Gamma

Věstník Král. čes. spol. nauk 1893, 8. 26, 1–6

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501762

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1893

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

XXVI.

Sur un point concernant la théorie de la fonction gamma.

Par M. Lerch à Prague-Vinohrady.

(Lu dans la séance du 19 Mai 1893)

L'important théorème de Raabe[1])

$$\int_0^1 \log \Gamma(a+x)\, dx = a \log a - a + \log \sqrt{2\pi}$$

sur lequel M. Hermite[2]) a fondé une démonstration élégante de la valeur approchée de $\log \Gamma(a)$ conduit aisément à plusieurs formules considérées par Ph. Gilbert[3]) et par MM. Bourguet et Stieltjes.[4])

Ecrivons le premier membre sous la forme

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log \Gamma\left(a + x + \frac{1}{2}\right) dx,$$

une intégration par parties nous donnera

---

[1]) Nous en avons publié une démonstration élémentaire dans le 26me tome du *journal de M. Battaglini;* on la trouve aussi dans la quatrième édition du *Cours de M. Hermite,* rédigé par M. Andoyer (Paris, A. Hermann, 1891) et dans une traduction portugale, dans le *Jornal de Sciencias mathematicas* (t. IX, p. 21) rédigé par M. F. Gomes Teixeira, et dans le *Curso de Analyse infinitesimal* du même auteur (2me partie du calcul intégrale, p. 104).

[2]) Ce Bulletin, l'année 1888; voir le *Curso* cité, p. 106 et le *Cours de* M. Hermite, 4me édition, p. 180.

[3]) Recherches sur le développement de la fonction Γ (Mémoires de l'Académie royale de Belgique, t. 41, année 1875).

[4]) Sur le développement de $\log \Gamma(a)$ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 4e série, t. V, 1889).

$$I = \frac{1}{2}\log\Gamma(a+1) + \frac{1}{2}\log\Gamma(a) - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x d \log\Gamma\left(a+x+\frac{1}{2}\right)$$

ou bien en changeant x en $x-\frac{1}{2}$,

$$(1) \qquad I = \log\Gamma(a) + \frac{1}{2}\log a + \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x\right) d\log\Gamma(a+x),$$

ou en mettant la valeur de I en évidence,

$$(1^*) \qquad \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}dx$$
$$= \log\Gamma(a) - \left(a-\frac{1}{2}\right)\log a + a - \log\sqrt{2\pi}.$$

En représentant par $\varpi(a)$ la valeur commune des deux membres de cette équation on parvient à la formule dont il s'agit, si l'on remplace, dans l'intégrale

$$\varpi(a) = \int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}dx,$$

la fonction $\frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)}$ par son développement

$$\Gamma'(1) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{a+x+\nu}\right),$$

en observant ensuite que l'on a

$$\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)dx = 0;$$

on aura ainsi l'équation

$$(2) \qquad \varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}-x}{a+x+\nu}dx$$

qui se trouve à la page 13 du mémoire cité de Gilbert et qui a été aussi le point de départ des élégantes recherches de M. Stieltjes.

Cette forme de la série est extrêmement importante comme le montrent les travaux cités de MM. Gilbert et Stieltjes, et nous n'avons rien à ajouter aux résultats obtenus par ces géomètres. Il nous semble seulement utile de donner une démonstration élémentaire de la série de Gudermann qui résulte en évaluant directement les intégrales, à savoir

$$\varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right]. \tag{3}$$

Pour ce but je pars de la définition d'Euler et de Gauss

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a}{1+\frac{a}{\nu}}$$

qui donne

$$\log\Gamma(a+1) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[a\log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) - \log\frac{a+\nu}{\nu}\right].$$

Cette série peut se transformer au moyen de l'identité

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1}\nu(b_\nu - b_{\nu+1}) + nb_n$$

en faisant $n = \infty$; on aura de cette manière

$$\log\Gamma(a+1) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\left[a\log\left(\frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}\right) + \log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+1}{\nu}\right]$$

ou en écrivant $\nu+1$ au lieu de ν et en changeant a en $a-1$,

$$\log\Gamma(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\left[(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right) + \log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right].$$

Cela étant, j'emploie maintenant l'équation évidente

$$-\log a = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - \log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right]$$

en la multipliant par $\left(a-\frac{1}{2}\right)$ et ajoutant avec l'équation précédante; il vient

$$\log \Gamma(a)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a=$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}\right.$$
$$+(\nu+1)(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)$$
$$\left.-\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right\}.$$

Or on a, pour des grandes valeurs de $a+\nu$,

$$\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}$$
$$=\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{a+\nu}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(a+\nu)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(a+\nu)^3}-\cdots\right]$$
$$=1+\frac{\varepsilon_\nu}{(a+\nu)^2},$$

ε_ν étant fini pour $a+\nu=\infty$. Il s'ensuit que la série

$$\varpi(a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu}-1\right]$$

est absolument et uniformément convergente et en la retranchant du développement que nous venons d'établir il vient

$$\log\Gamma(a)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-\varpi(a)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{1-\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right.$$
$$\left.+(\nu+1)(a-1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)\right\}.$$

Cette quantité étant de la forme $A(a-1)+B-1$ où A et B désignent deux constantes numériques dont la première est

$$A=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(\nu+1)\log\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\cdot\frac{\nu+2}{\nu+3}\right)-\log\frac{\nu+2}{\nu+1}\right]$$

ou bien

$$A=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\nu\log\frac{\nu+2}{\nu+1}-(\nu+1)\log\frac{\nu+3}{\nu+2}\right]=-1,$$

on a l'équation

$$(\alpha)\qquad \log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+B+\varpi(a);$$

la constante B étant difficile à obtenir directement, nous allons calculer la constante $\varpi\left(\frac{1}{2}\right)$.

A cet effet observons d'abord que la série $\varpi(a)$ donne immédiatement

$$\varpi\left(\frac{a}{2}\right)=\sum_{m}\left(\frac{a+m+1}{2}\log\frac{a+m+2}{a+m}-1\right),$$
$$(m=0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots),$$
$$\varpi\left(\frac{a+1}{2}\right)=\sum_{n}\left(\frac{a+n+1}{2}\log\frac{a+n+2}{a+n}-1\right),$$
$$(n=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ldots),$$

de la sorte qu'il vient

$$\varpi\left(\frac{a}{2}\right)+\varpi\left(\frac{a+1}{2}\right)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{a+\nu+1}{2}\log\frac{a+\nu+2}{a+\nu}-1\right).$$

Cela étant, on voit aussi facilement que la différence

$$D=\varpi\left(\frac{a}{2}\right)+\varpi\left(\frac{a+1}{2}\right)-\varpi a)$$

pourra s'écrire

$$D=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\Big\{(a+\nu+1)\log(a+\nu+2)$$
$$-2\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log(a+\nu+1)+(a+\nu)\log(a+\nu)\Big\}$$

et la somme de cette série s'obtient à l'aide des identités ou ce qui est la même chose

$$\varpi(a) = \left[\left(a+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+1}{a} - 1\right] + \varpi(a+1),$$

d'où l'on tire

$$\varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right] + \varpi(a+n),$$

et comme évidemment l'intégrale est nulle pour a infini on a $\lim \varpi(a+n) = 0$, de la sorte qu'il vient

$$\varpi(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\left(a+\nu+\frac{1}{2}\right)\log\frac{a+\nu+1}{a+\nu} - 1\right]$$

ce qui prouve l'identité des deux fonctions $\varpi(a)$ données par l'intégrale (5) et par la série (3).

Nákladem Královské České Společnosti Náuk. — Tiskem dra. Edv. Grégra v Praze 1893.