Matyáš Lerch

Sur une intégrale définie

Batt. G. 31 (1893), 171–172

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501760

# SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

M. LERCH.

*à Prague-Vinohrady.*

---

L'intégrale bien connue de Binnet

$$\log \Gamma(\omega) - \left(\omega - \frac{1}{2}\right) \log \omega + \omega - \log \sqrt{2\pi} = \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\omega}\, d\omega}{e^{2x\pi} - 1}$$

donne naissance à l'évaluation d'une intégrale définie qui en diffère bien par la forme.

Substituons deux valeurs $\omega_1$ et $\omega_2$ de la variable positive $\omega$ et faisons la somme des résultats; il vient

$$\log \Gamma(\omega_1) \Gamma(\omega_2) - \left(\omega_1 - \frac{1}{2}\right) \log \omega_1 - \left(\omega_2 - \frac{1}{2}\right) \log \omega_2 + \omega_1 + \omega_2 - \log 2\pi$$

$$= \int_0^\infty \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2 - x^2}}{e^{2x\pi} - 1}.$$

Cette intégrale prend une forme plus élégante en la transformant par la substitution

$$z = \frac{\omega_1 \omega_2 - x^2}{x(\omega_1 + \omega_2)} \quad , \quad x = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} z + \sqrt{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 z^2 + \omega_1 \omega_2}\,;$$

nous aurons de la sorte l'expression

$$2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{z}}{e^{2\pi(-\alpha z+\sqrt{\alpha^2 z^2+\beta})}-1} \; \frac{-\alpha z+\sqrt{\alpha^2 z^2+\beta}}{\sqrt{\alpha^2 z^2+\beta}} \, dz ,$$

où nous avons posé, pour abréger, $\alpha = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, $\beta=\omega_1\,\omega_2$. Pour obtenir une forme encore plus simple, nous employons l'intégration par parties qui donne

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \log\left(1-e^{2\pi(\alpha z-\sqrt{\alpha^2 z^2+\beta})}\right).$$

On a donc cette formule

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1-e^{2\pi(x\alpha-\sqrt{\alpha^2 x^2+\beta})}\right)$$

$$=\left(\omega_1-\frac{1}{2}\right)\log\omega_1+\left(\omega_2-\frac{1}{2}\right)\log\omega_2-2\alpha-\log\Gamma(\omega_1)\,\Gamma(\omega_2)+\log 2\pi ,$$

dans la quelle $\omega_1$, $\omega_2$ sont les deux racines, supposées positives, de l'équation du second dégré

$$\omega^2-2\,\alpha\,\omega+\beta=0.$$

En prenant en particulier $\omega_1=\omega_2=\omega$ on aura

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log\left(1-e^{2\omega\pi(x-\sqrt{x^2+1})}\right)$$

$$=\left(\omega-\frac{1}{2}\right)\log\omega-\omega-\log\Gamma(\omega)+\log\sqrt{2\pi}.$$