

Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch
Sur une intégrale définie

Batt. G. 31 (1893), 171–172

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501760>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR UNE INTÉGRALE DÉFINIE

PAR

M. L E R C H.

à Prague - Vinohrady.

L'intégrale bien connue de Binnet

$$\log \Gamma(\omega) - \left(\omega - \frac{1}{2}\right) \log \omega + \omega - \log \sqrt{2\pi} = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\omega} d\omega}{e^{2x\pi} - 1}$$

donne naissance à l'évaluation d'une intégrale définie qui en diffère bien par la forme.

Substituons deux valeurs ω_1 et ω_2 de la variable positive ω et faisons la somme des résultats; il vient

$$\begin{aligned} \log \Gamma(\omega_1) \Gamma(\omega_2) - \left(\omega_1 - \frac{1}{2}\right) \log \omega_1 - \left(\omega_2 - \frac{1}{2}\right) \log \omega_2 + \omega_1 + \omega_2 - \log 2\pi \\ = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} \frac{x(\omega_1 + \omega_2)}{\omega_1 \omega_2 - x^2}}{e^{2x\pi} - 1} . \end{aligned}$$

Cette intégrale prend une forme plus élégante en la transformant par la substitution

$$z = \frac{\omega_1 \omega_2 - x^2}{x(\omega_1 + \omega_2)} , \quad x = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} z + \sqrt{\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)^2 z^2 + \omega_1 \omega_2} ;$$

nous aurons de la sorte l'expression

$$2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{z}}{e^{2\pi(-xz + \sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta})} - 1} \frac{-\alpha z + \sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta}}{\sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta}} dz,$$

où nous avons posé, pour abrégier, $\alpha = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\beta = \omega_1 \omega_2$. Pour obtenir une forme encore plus simple, nous employons l'intégration par parties qui donne

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1+z^2} \log \left(1 - e^{2\pi(xz - \sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta})} \right).$$

On a donc cette formule

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log \left(1 - e^{2\pi(xz - \sqrt{\alpha^2 z^2 + \beta})} \right) \\ &= \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right) \log \omega_1 + \left(\omega_2 - \frac{1}{2} \right) \log \omega_2 - 2\alpha - \log \Gamma(\omega_1) \Gamma(\omega_2) + \log 2\pi, \end{aligned}$$

dans la quelle ω_1, ω_2 sont les deux racines, supposées positives, de l'équation du second degré

$$\omega^2 - 2\alpha\omega + \beta = 0.$$

En prenant en particulier $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ on aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \log \left(1 - e^{2\omega\pi(x - \sqrt{x^2 + 1})} \right) \\ &= \left(\omega - \frac{1}{2} \right) \log \omega - \omega - \log \Gamma(\omega) + \log \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$
