Matyáš Lerch

Poznámka o jistých determinantech sestrojených z funkcí elliptických

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 2 (1893), č. 5, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501748

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK II. TŘÍDA II. ČÍSLO 5.

POZNÁMKA
O JISTÝCH DETERMINANTECH
SESTROJENÝCH
Z FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH.

NAPSAL

M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 14. ŘÍJNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

1893.

TISKEM J. OTTY V PRAZE.

Buďte $f_1(u), f_2(u), \dots f_{n-1}(u)$ linearně neodvislé funkce elliptické stupně n o společných pólech a periodách 2ω, $2\omega'$. Uvažujme determinant

$$(1) \qquad D(u) = \begin{vmatrix} f_1'(u) & , f_1''(u) & , \dots f_1^{(n-1)}(u) \\ f_2'(u) & , f_2''(u) & , \dots f_2^{(n-1)}(u) \\ \dots & \dots & \dots \\ f'_{n-1}(u) & , f''_{n-1}(u) & , \dots f_{n-1}^{(n-1)}(u) \end{vmatrix},$$

a znamenejme $u_0, u_1, u_2, \dots$ nullová jeho místa. Pomocí libovolného z nich u_μ sestrojme determinant

$$(2) \qquad \Phi(u, u_\mu) = \begin{vmatrix} f_1(u) - f_1(u_\mu) & , f_1'(u_\mu) & , f_1''(u_\mu) & , \dots f_1^{(n-2)}(u_\mu) \\ f_2(u) - f_2(u_\mu) & , f_2'(u_\mu) & , f_2''(u_\mu) & , \dots f_2^{(n-2)}(u_\mu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n-1}(u) - f_{n-1}(u_\mu) & , f'_{n-1}(u_\mu) & , f''_{n-1}(u_\mu) & , \dots f_{n-1}^{(n-2)}(u_\mu) \end{vmatrix}.$$

Determinant tento jest elliptickou funkcí stupně n o týchž pólech a_1, $a_2, \dots a_n$, jako funkce $f_\alpha(u)$, a zmizí ve stupni n-tém na místě u_μ.

Z toho plyne

$$(3) \qquad n u_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha + 2\bar{\omega},$$

kde $\bar{\omega}$ jest veličina tvaru $m\omega + m'\omega'$, v němž m, m' značí čísla celistvá, načež bude

$$(4) \qquad \Phi(u, u_\mu) = A \frac{\sigma^n(u - u_\mu)}{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2)\dots\sigma(u - a_n)} e^{2\bar{\eta} u},$$

kde $\bar{\eta} = m\eta + m'\eta'$ odpovídá polouperiodě $\bar{\omega}$.

Dále jest determinant (1) elliptickou funkcí stupně n^2 o n-násobných pólech $a_1, a_2, \dots a_n$, a o místech nullových tvaru $\dfrac{\Sigma a_\alpha + 2\bar{\omega}}{n}$, takže bude

$$(5) \qquad D(u) = B \frac{\sigma(nu - \Sigma a_\alpha)}{\sigma^n(u - a_1)\,\sigma^n(u - a_2)\dots\sigma^n(u - a_n)}.$$

K tomu ovšem třeba ještě dokázati, že nullová místa determinantu (1) jsou jednoduchá. Kdyby skutečně u_μ bylo nullové místo dvojnásobné, musila by na místě u_μ též mizeti funkce

$$D'(u) = \begin{vmatrix} f_1'(u) & , f_1''(u) & ,\ldots f_1^{(n-2)}(u), & f_1^{(n)}(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{n-1}(u) & , f''_{n-1}(u) & ,\ldots f_{n-1}^{(n-2)}(u) & , f_{n-1}^{(n)}(u) \end{vmatrix},$$

a následkem toho by bylo lze determinant (2) psáti

$$\Phi(u, u_\mu) = \left| f_a(u) - \sum_{\nu=0}^{n} f_a^{(\nu)}(u_\mu) \frac{(u-u_\mu)^\nu}{\nu!}, f_a'(u_\mu), f_a''(u_\mu), \ldots f_a^{(n-2)}(u_\mu) \right|,$$

při čemž jsme vytkli pouze α-tou řádku jako representanta všech ostatních. Tento determinant ale začíná svůj rozvoj mocností $(u - u_\mu)^{n+1}$, a tedy by byl identicky nullou, poněvadž elliptická funkce stupně n nemůže míti nullové místo stupně $n+1$. Jsou tudíž nullová místa funkce $D(u)$ vesměs jednoduchá, a tedy vzorec (5) správným.

Jako zajímavou okolnosť dlužno vytknouti, že podíly

$$\frac{\Phi(u, u_\mu)}{\Phi(u, u_0)} = A' \left(\frac{\sigma(u-u_\mu)}{\sigma(u-u_0)}\right)^n e^{2\eta u}, \qquad u_0 = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha,$$

jsou funkce o n-násobném pólu a n-násobném místě nullovém, takže jich n-té odmocniny jsou funkce jednoznačné, které dlužno považovati za zobecnění funkcí Jacobiových.

Jedná se ještě o stanovení konstanty A. Rozvoj determinantu $\Phi(u, u_\mu)$ začíná členem

$$\frac{(-1)^n}{n!} D'(u_\mu)(u-u_\mu)^n,$$

výraz (4) pak členem

$$\frac{A}{\sigma(u_\mu - a_1)\,\sigma(u_\mu - a_2)\ldots\sigma(u_\mu - a_n)} e^{2\eta u_\mu}(u-u_\mu)^n,$$

a tedy musí

$$A = \frac{(-1)^n}{n!} \prod_\alpha \sigma(u_\mu - a_\alpha) \,.\, D'(u_\mu)\, e^{-2\eta u_\mu},$$

z čehož následuje

$$(4^*) \qquad \Phi(u, u_\mu) = \frac{(-1)^n}{n!} D'(u_\mu) \,.\, e^{2\eta(u-u_\mu)} \sigma^n(u-u_\mu) \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{\sigma(u_\mu - a_\alpha)}{\sigma(u-a_\alpha)}.$$

Vytkněme nyní některé zvláštní případy.

1) Pro $n = 2$ máme zde jedinou funkci $f(u)$ stupně druhého o pólech a_1, a_2; vzorec (5) podá

$$f'(u) = B \frac{\sigma(2u - a_1 - a_2)}{\sigma^2(u-a_1)\,\sigma^2(u-a_2)},$$

dále značíli u_0, u_1, u_2, u_3 veličiny $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_1+a_2}{2}+\omega$, $\frac{a_1+a_2}{2}+\omega'$, $\frac{a_1+a_2}{2}+\omega+\omega'$, věta (4*) poskytne

$$f(u)-f(u_\mu)=\tfrac{1}{2}f''(u_\mu)\,\sigma(u_\mu-a_1)\,\sigma(u_\mu-a_2)\,.\,e^{2\eta_\mu(u-u_\mu)}\frac{\sigma^2(u-u_\mu)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)}\,.$$

Při tom

$$\eta_0=0\,,\quad \eta_1=\eta\,,\quad \eta_2=\eta'\,,\quad \eta_3=\eta+\eta'\,.$$

Jako důležitý výsledek dlužno uvésti, že podíly $\frac{f(u)-f(u_\mu)}{f(u)-f(u_0)}$ lze vyjádřiti funkcemi

$$2\frac{f(u_0)-f(u_\mu)}{f''(u_0)}\left[\wp(u-u_0)-e_{\mu'}\right],$$

kde μ' zároveň s μ probíhá čísla $1, 2, 3$. Výsledek ten kryje se s redukcí elliptických integrálů na tvar normalný.

2) V případě $n=3$ máme dvě funkce stupně třetího $f(u), g(u)$ o pólech a_1, a_2, a_3, a při tom vzorce

$$\begin{vmatrix} f'(u), f''(u) \\ g'(u), g''(u) \end{vmatrix} = B\,\frac{\sigma(3u-a_1-a_2-a_3)}{\sigma^3(u-a_1)\,\sigma^3(u-a_2)\,\sigma^3(u-a_3)}\,,$$

$$\begin{vmatrix} f(u)-f(u_\mu), f'(u_\mu) \\ g(u)-g(u_\mu), g'(u_\mu) \end{vmatrix} = A_\mu\,\frac{\sigma^3(u-u_\mu)}{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\,\sigma(u-a_3)}\,e^{2\eta_\mu u}\,,$$

kde u_μ značí veličiny $\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)+\frac{2m\omega+2m'\omega'}{3}$, $(m, m'=0, 1, 2)$, a η_μ jest druhořadá polouperioda $m\eta+m'\eta'$.

Nalezené zde výsledky dlužno považovati za zobecnění vzorců, jež uvedeny ve spise »Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass bearbeitet und herausgegeben von H. A. Schwarz (Göttingen 1882)« str. 16 a násl., zejména vzorec (6) na str. 19.
