Matyáš Lerch
O Catalanově stanovení mnohonásobných integrálů

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze 2 (1893), 517–527

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501740

VĚSTNÍK

ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA

PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.

ROČNÍK II. PROSINEC 1893. ČÍSLO 9.

Referáty a zprávy vědecké, slovesné a umělecké.

O Catalanově stanovení mnohonásobných integrálů.

Napsal *M. Lerch.*

Ve svém zajímavém pojednání „Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples" [1]) pan Eugen Catalan podal methodu stanoviti mnohonásobné integrály, která v případě integrálů dvojnásobných a trojnásobných jest úplně jasna, spočívajíc na představách geometrických a mechanických. V případě obecném pak má spíše povahu divinace než přesného důkazu. Mám za to, že bude prospěšno vyložiti na tomto místě methodu zasloužilého učence belgického a podati přesný důkaz její v případě obecném.

1. Komplanace trojosého ellipsoidu vede k integrálu

$$A = \iint \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy\,,$$

vzatému nad oborem

$$x^2 + y^2 < 1\,. \quad (x\,, y \text{ kladné i záporné}),$$

při čemž $a\,, b$ značí ryzí zlomky.

Klademe-li

$$z = \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,,$$

můžeme integrál

$$A = \iint z\, dx\, dy$$

pokládati za krychlový obsah tělesa omezeného válcem $x^2 + y^2 = 1$, rovinou xy a plochou znázorňující funkci z. Rovnici této plochy možno psáti

$$(z^2 - a^2)\, x^2 + (z^2 - b^2)\, y^2 = z^2 - 1\,.$$

Pokládáme-li v této rovnici z za stálou, představuje v rovině xy průmět řezu plochy s rovinou rovnoběžnou s xy. Tyto průměty jsou realné počínaje

[1]) Liouvilleův žurnál, sv. 4., 1839.

od $z = 1$, (kde řez redukuje se na bod $x = y = 0$, čili na dvojici pomyslných přímek) a jsou to patrně ellipsy podobné a podobně položené. Pro $z = \infty$ přejde ellipsa v kruh $x^2 + y^2 = 1$.

Uvažujme dvě z dotčených ellips, jež příslušejí parametrům z a $z + dz$; tyto omezují věnec nekonečně malý, a část tělesa položenou nad tímto věncem volme za prvek hledaného krychlového obsahu; tato část je patrně dutý válec o výšce z; základna jeho rovná se rozdílu ploch obou ellips $[z]$ a $[z + dz]$; ponévadž plocha ellipsy $[z]$ má hodnotu πXY, kde X a Y značí poloosy této ellipsy, t. j. $X = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - a^2}}$, $Y = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 - b^2}}$, bude základna dutého válce dána differenciálem $\pi d(XY)$ a náš prvek bude

$$\pi z d(XY),$$

tak že máme

$$A = \pi \int_{z=1}^{\infty} z\, d(XY).$$

Tím jest úkol náš v podstatě řešen, vše ostatní je věcí naprosto formální. Catalan rozvíjí differenciál $d(XY)$, a nachází výsledek, který nechceme reprodukovati.

Pokládejme raději poslední výraz za limitu integrálu

$$J = \int_{z=1}^{N} z\, d(XY)$$

pro $N = \infty$ a přetvořme tento částečnou integrací. Tím vznikne

$$J = N\sqrt{\frac{N^2 - 1}{N^2 - a^2}} \cdot \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N^2 - b^2}} - \int_1^N XY\, dz$$

aneb

$$J = N\left(\sqrt{\frac{N^2 - 1}{N^2 - a^2}} \cdot \sqrt{\frac{N^2 - 1}{N^2 - b^2}} - 1\right) - \int_1^N (XY - 1)\, dz + 1.$$

Přejdeme-li k limitě pro $N = \infty$, máme

$$\lim J = \int_{z=1}^{\infty} z\, d(XY) = 1 + \int_1^{\infty} (1 - XY)\, dz,$$

a tedy

$$A = \pi + \pi \int_1^{\infty} \left[1 - \frac{z^2 - 1}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}}\right] dz.$$

Transformací $z = \frac{1}{x}$ plyne odtud

$$A = \pi + \pi \int_0^1 \left[1 - \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - a^2x^2)(1 - b^2x^2)}}\right] \frac{dx}{x^2}$$

aneb

$$A=\pi+\pi\int_0^1\left[1-\frac{1}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}}\right]\frac{dx}{x^2}$$

$$+\pi\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}}\,.$$

2. Uvažujme nyní integrál

$$A=\int\int\dots\int\sqrt{\frac{1-a_1^2\xi_1^2-a_2^2\xi_2^2-\dots-a_n^2\xi_n^2}{1-\xi_1^2-\xi_2^2-\dots-\xi_n^2}}\,d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n$$

vzatý nad oborem

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2\leq 1\qquad (\xi \text{ kladná i záporná}),$$

při čemž $a_1, a_2, \dots a_n$ jsou ryzí zlomky.

Znamenáme-li

$$\sqrt{\frac{1-a_1^2\xi_1^2-a_2^2\xi_2^2-\dots-a_n^2\xi_n^2}{1-\xi_1^2-\xi_2^2-\dots-\xi_n^2}}=\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\,,$$

máme

$$A=\int\int\dots\int\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n\,,\qquad \xi_1^2+\xi_2^2+\dots\xi_n^2\leq 1\,.$$

Studujme nyní obor $\mathfrak{A}_x$ daný nerovností

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\leq x\,,$$

kde x je kladné a nutně větší než 1, poněvadž funkce φ je vždy >1, a pouze pro $\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_n=0$ má hodnotu 1; nerovnost poslední lze psáti

$$(x^2-a_1^2)\,\xi_1^2+(x^2-a_2^2)\,\xi_2^2+\dots+(x^2-a_n^2)\,\xi_n^2\leq x^2-1\,,$$

a odtud patrno, že obor $\mathfrak{A}_x$ leží uvnitř oboru

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2\leq 1\,,$$

který možno znamenati $\mathfrak{A}_\infty$. Je-li dx kladné, pak obor $\mathfrak{A}_{x+dx}$ obsahuje obor $\mathfrak{A}_x$. Integrál

$$A_x=\int\int\dots\int\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n$$

vzatý nad oborem $\mathfrak{A}_x$ blíží se integrálu A, roste-li x do nekonečna: jest A hodnota funkce A_x proměnné x pro $x=\infty$.

Je snadno stanoviti hodnotu differenciálu dA_x. Neboť $dA_x=A_{x+dx}-A_x$ musí býti rovno integrálu

$$dA_x=\int\int\dots\int\varphi(\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\dots d\xi_n$$

vzatému nad oborem $d\mathfrak{A}_x$, který se skládá ze všech míst oboru A_{x+dx} položených zevně oboru $\mathfrak{A}_x$; obor $d\mathfrak{A}_x$ tedy se skládá z míst $(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ podrobených nerovnostem $x < \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n) < x + dx$; poněvadž dx je nekonečně malé, můžeme pak psáti

$$d A_x = \int\int_{d\mathfrak{A}_x} \ldots \int x \, d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n = x \int\int_{d\mathfrak{A}_x} \ldots \int d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n ,$$

a zbývá nám vyšetřiti integrál

$$d B_x = \int\int \ldots \int d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatý nad oborem $d\mathfrak{A}_x$; ten jest differenciálem funkce B_x dané integrálem

$$B_x = \int\int \ldots \int d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatým nad oborem $\mathfrak{A}_x$ Tento integrál bude nám tedy především určiti. Poněvadž obor integrační $\mathfrak{A}_x$ je definován podmínkou

$$(x^2 - a_1^2)\xi_1^2 + (x^2 - a_2^2)\xi_2^2 + \ldots + (x^2 - a_n^2)\xi_n^2 < x^2 - 1 ,$$

položme $\xi_\varkappa = \dfrac{x_\varkappa \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - a_\varkappa^2}}$, $(\varkappa = 1, 2, \ldots n)$ a obdržíme

$$B_x = \prod_{\varkappa=1}^{n} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - a_\varkappa^2}} \cdot \int\int \ldots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n ,$$

kde integrační obor bude

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1 .$$

Integrujeme-li nejprve dle x_n, můžeme nahraditi $\int_{-\xi_n}^{\xi_n} dx_n$ integrálem $2\int_0^{\xi_n} dx_n$, po té možno podobně při integraci dle x_{n-1} zavésti dvojnásobnou hodnotu integrálu v mezích 0 a ξ_{n-1} atd., tak že nalezneme

$$B_x = 2^n \prod_{\varkappa=1}^{n} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 - a_\varkappa^2}} \cdot \int\int \ldots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n$$

s oborem $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$, $x_1 \geqq 0$, $x_2 > 0, \ldots x_n \geqq 0$.

Tu ale možno zavésti transformaci

$$x_\varkappa = \sqrt{z_\varkappa} , \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n) ,$$

čímž se obdrží

$$(\alpha) \qquad \int\int \ldots \int dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n = \frac{1}{2^n} \int\int \ldots \int \frac{dz_1 \, dz_2 \ldots dz_n}{\sqrt{z_1 z_2 \ldots z_n}}$$

s oborem integračním $z_1 + z_2 + \ldots + z_n \leqq 1$, $z_\varkappa > 0$.

Integrál ten je zvláštním případem integrálu

$$\iint\cdots\int z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1}\cdots z_n^{s_n-1}(1-z_1-z_2-\cdots-z_n)^{s-1}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n\,,$$

$$z_\varkappa > 0\,,\qquad z_1+z_2+\cdots+z_n \leqq 1\,,$$

při čemž s, $s_1, s_2, \ldots s_n$ jsou kladné konstanty. Znamenejme tento integrál $J(s_1, s_2, \ldots s_n, s)$ a stanovme jej tak, že nejdříve integrujeme dle z_n; položme $z_n = (1-z_1-z_2-\cdots-z_{n-1})\zeta_n$, i obdržíme

$$J(s_1,\ldots s_n, s) = \int\cdots\int z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1}\cdots z_{n-1}^{s_{n-1}-1}(1-z_1-z_2-\cdots-z_{n-1})^{s_n+s-1}$$

$$dz_1\ldots dz_{n-1}\int_0^1 \zeta_n^{s_n-1}(1-\zeta_n)^{s-1}\,d\zeta_n\,,$$

a poněvadž

$$\int_0^1 \zeta_n^{s_n-1}(1-\zeta_n)^{s-1}\,d\zeta_n = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s_n)}{\Gamma(s+s_n)}\,,$$

máme

$$J(s_1, s_2, \ldots s_n\ s) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s_n)}{\Gamma(s+s_n)}\iint\cdots\int z_1^{s_1-1}\cdots z_{n-1}^{s_{n-1}-1}$$

$$\times(1-z_1-\cdots-z_{n-1})^{s_n+s}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{n-1}\,,$$

s integračními podmínkami

$$z_\varkappa > 0\,,\qquad z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}\leqq 1\,;$$

výsledek ten lze psáti

$$J(s_1, s_2, \ldots s_n, s) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s_n)}{\Gamma(s+s_n)}\,J(s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s+s_n)\,,$$

a poněvadž z týchž důvodů

$$J(s_1, s_2, \ldots s_{n-1}, s+s_n) =$$

$$\frac{\Gamma(s+s_n)\,\Gamma(s_{n-1})}{\Gamma(s+s_n+s_{n-1})}\,J(s_1, s_2\ldots s_{n-2}, s+s_n+s_{n-1})\,,$$

$$J(s_1, s_2\ldots s_{n-2}, s+s_n+s_{n-1}) =$$

$$\frac{\Gamma(s+s_n+s_{n-1})\,\Gamma(s_{n-2})}{\Gamma(s+s_n+s_{n-1}+s_{n-2})}\,J(s_1,\ldots s_{n-3}, s+s_n+s_{n-1}+s_{n-2})\,,$$

. . . .

$$J(s_1, s+s_n+s_{n-1}+\cdots+s_2) = \frac{\Gamma(s+s_n+s_{n-1}+\cdots+s_2)\,\Gamma(s_1)}{\Gamma(s+s_n+s_{n-1}+\cdots+s_2+s_1)}\,,$$

máme po dosazení hodnot vzorec

$$J(s_1, s_2, \ldots s_n, s) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s_n)\,\Gamma(s_{n-1})\cdots\Gamma(s_2)\,\Gamma(s_1)}{\Gamma(s+s_n+s_{n-1}+\cdots+s_2+s_1)}$$

čili

$$(1)\quad \int\int\ldots\int z_1^{s_1-1} z_2^{s_2-1}\ldots z_n^{s_n-1}(1-z_1-z_2-\ldots-z_n)^{s-1}dz_1\,dz_2\ldots dz_n$$
$$=\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2)\ldots\Gamma(s_n)}{\Gamma(s+s_1+s_2+\ldots+s_n)},$$

kde integrační obor dán podmínkami

$$z_\varkappa\geqq 0,\ z_1+z_2+\ldots+z_n\leqq 1.$$

Klademe-li v tomto vzorci $s=1$, $s_\varkappa=\frac{1}{2}$, $(\varkappa=1,2,\ldots n)$, máme

$$\int\int\ldots\int\frac{dz_1\,dz_2\ldots dz_n}{\sqrt{z_1\,z_2\ldots z_n}}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})},$$

Náš integrál (α) tedy má hodnotu

$$\frac{1}{2^n}\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})},$$

a tedy

$$(2)\qquad B_x=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\prod_{\varkappa=1}^{n}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-a_\varkappa^2}}.$$

Při tomto označení máme, jak výše nalezeno,

$$d\,A_x=x\,d\,B_x$$

a tedy

$$A_x=\int_1^x x\,d\,B_x,$$

takže hledaný integrál A bude

$$(\beta)\qquad A=\int_1^\infty x\,d\,B_x.$$

My raději přetvoříme výraz (β) částečnou integrací; pišme

$$R(x)=\prod_{\varkappa=1}^{n}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-a_\varkappa^2}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-a_1^2}\cdot\frac{x^2-1}{x^2-a_2^2}\cdots\frac{x^2-1}{x^2-a_n^2}}.$$

a bude

$$A_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\int_1^n x\,d\,R(x);$$

tu pak máme

$$\int_1^n x\,d\,R(x) = n\,R(n) - \int_1^n R(x)\,dx$$

$$= n\left[R(n) - 1\right] + 1 - \int_1^n \left[R(x) - 1\right] dx$$

a odtud přechodem k limitě pro $n = \infty$

$$\int_1^\infty x\,d\,R(x) = 1 - \int_1^\infty \left[R(x) - 1\right] dx\,.$$

Nacházíme tedy

$$(3)\quad A = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}\left\{1 + \int_1^\infty \left[1 - \frac{(x^2-1)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(x^2-a_1^{\,2})(x^2-a_2^{\,2})\ldots(x^2-a_n^{\,2})}}\right] dx\right\},$$

kde A značí n-násobný integrál

$$(3^{a})\quad A = \int\!\!\int\ldots\int \sqrt{\frac{1-a_1^{\,2}\xi_1^{\,2} - a_2^{\,2}\xi_n^{\,2} - \ldots - a_n^{\,2}\xi_n^{\,2}}{1-\xi_1^{\,2}-\xi_2^{\,2}-\ldots-\xi_n^{\,2}}}\,d\,\xi_1\,d\,\xi_2\ldots d\,\xi_n$$

vzatý nad oborem

$$\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \ldots + \xi_n^{\,2} \leqq 1\,,\qquad \xi_\varkappa \gtrless 0\,.$$

Kdybychom byli s Catalanem provedli differencování u vzorci (β), měli bychom

$$(3^{b})\qquad A = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$$

$$\int_1^\infty \frac{x^2(x^2-1)^{\frac{n}{2}-1}\,dx}{\sqrt{(x^2-a_1^{\,2})\,x^2-a_2^{\,2})\ldots(x^2-a_n^{\,2})}}\left(\frac{1-a_1^{\,2}}{x^2-a_1^{\,2}} + \frac{1-a_2^{\,2}}{x_2-a_2^{\,2}} + \ldots + \frac{1-a_n^{\,2}}{x^2-a_n^{\,2}}\right).$$

3. Catalan v odstavci V. svojí práce vyjádřil svou methodu v případě nejobecnějším takto:

Předpokládejme

1° že máme stanoviti integrál

$$A = \int\!\!\int\ldots\int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\,.\,f\left[\varphi(\xi_1\,.\,\xi_n, \ldots \xi_n)\right] d\,\xi_1\,d\,\xi_2\ldots d\,\xi_n\,;$$

2° že proměnné integrační jsou kladné (pro jednoduchost) a hoví podmínce

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq 0\,,$$

která definuje obor integrační;

3° že funkce $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)$ obdrží hodnoty známé α a β, když volíme $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$, a když tyto veličiny hoví rovnici $\varphi(\xi_1 \ldots \xi_n) = 0$;

4° že integrál

$$\int\int \ldots \int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatý nad oborem[1])

$$\xi_\varkappa \geqq 0, \quad \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq v$$

je známý, t. j. dovedeme jej stanoviti jakožto funkci $B(v)$ proměnné v;

5° že konečně obor $\mathfrak{A}_v$ daný nerovností $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq v$ jest obsažen v oboru integračním $\psi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq 0$, a že probíhá-li v od α do β, místa v oboru $\mathfrak{A}_v$ proběhnou všecka místa oboru integračního.

Tuto podmínku musíme lépe a přesněji takto vyjádřiti.

Předpokládejme pro určitější představu, že $\beta > \alpha$; α jest hodnota funkce φ pro $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$. β jest hodnota funkce φ společná všem místům, pro něž $\psi = 0$; obor $\mathfrak{A}_v$ daný podmínkou $\varphi \leqq v$ obsahuje jediný bod $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$, je-li $v = \alpha$, ale splývá s oborem integračním, je-li $v = \beta$; obor $\mathfrak{A}_{v+dv}$ vztahující se k parametru $v + dv > v$ musí obsahovati celý obor $\mathfrak{A}_v$; takže roste-li v, obor $\mathfrak{A}_v$ se rozšiřuje.

Za těchto podmínek bude

$$A = \int_\alpha^\beta f(v)\, d\, B(v).$$

Toto Catalanovo tvrzení takto se dokáže.

Znamenejme A_v integrál

$$A_v = \int\int \ldots \int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, f\left[\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\right] d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatý nad oborem $\mathfrak{A}_v$, který dán jest nerovností

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq 0, \quad \xi_\varkappa \geqq 0;$$

pak bude differenciál

$$d\, A_v = A_{v+dv} - A_v$$

roven integrálu

$$d\, A_v = \int\int \ldots \int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, f\left[\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\right] d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatému nad oborem $\mathfrak{A}_{v+dv} - \mathfrak{A}_v = d\,\mathfrak{A}_v$ definovaným nerovností

$$v \leqq \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq v + dv.$$

V tomto oboru jest φ takměř rovno konstantě v (poněvadž dv je velmi malé) a tedy máme

$$d\, A_v = f(v) \cdot \int\int \ldots \int_{d\mathfrak{A}_v} F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

---

[1]) Catalan praví „v mezích $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ a $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n) \leq v$."

Integrál, kterým se v pravo $f(v)$ násobí, pokládati můžeme patrně za differenciál integrálu

$$B(v) = \int\int \ldots \int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatého nad oborem $\mathfrak{A}_v$; je to týž integrál, o němž byla výše řeč. Máme pak

$$d A_v = f(v)\, d B(v),$$

tedy, ano A_v mizí pro $v = \alpha$,

$$A_v = \int_\alpha^v f(v)\, d B(v).$$

Pro $v = \beta$ přejde dle podmínky A_v v daný integrál A, a tedy máme

$$A = \int_\alpha^\beta f(v)\, d B(v),$$

což jest vzorec Catalanův, který tedy dokázán.

Poznamenejme ještě, že se integrační obor daného integrálu nejlépe charakterisuje podmínkou

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq \beta.$$

4. Jakožto applikaci uvažujme s Catalanem integrál [1])

$$A = \int\int \ldots \int \xi_1^{a_1 - 1} \xi_2^{a_2 - 1} \ldots$$

$$\ldots \xi_n^{a_n - 1} \left(\frac{1 - a_1 \xi_1 - a_2 \xi_2 - \ldots - a_n \xi_n}{1 - \xi_1 - \xi_2 - \ldots - \xi_n} \right)^s d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

vzatý nad oborem

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n \leqq 1,$$

při čemž $a_\varkappa$ značí ryzí zlomky.

Volíme-li

$$v = \frac{1 - a_1 \xi_1 - a_2 \xi_2 - \ldots - a_n \xi_n}{1 - \xi_1 - \xi_2 - \ldots - \xi_n},$$

máme pro obor $\mathfrak{A}_v$ podmínku

$$(v - a_1)\, \xi_1 + (v - a_2)\, \xi_2 + \ldots + (v - a_n)\, \xi_n \leqq v - 1;$$

bude tu pak $\alpha = 1$, $\beta = \infty$, a obdržíme

$$A = \int_1^\infty v^s\, d B(v),$$

[1]) Integrál, jejž Catalan v odstavci VI. vyšetřuje, jest jen zdánlivě obecnějším.

klademe-li

$$B(v) = \iint\limits_{\mathfrak{A}_v} \dots \int \xi_1^{s_1-1} \xi_2^{s_2-1} \dots \xi_n^{s_n-1} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n \, .$$

Abychom tento integrál určili, proveďme substituci

$$\xi_\varkappa = \frac{v-1}{v-a_\varkappa} x_\varkappa \, ,$$

i obdržíme

$$B(v) = \prod_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{v-1}{v-a_\varkappa}\right)^{s_\varkappa} . \iint \dots \int x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} \dots x_n^{s_n-1} \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_n \, ,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq 1 \, , \; x_\varkappa \geqq 0 \, .$$

Dle (1) má tento výraz hodnotu

$$B(v) = \prod_{\varkappa=1}^{n} \left(\frac{v-1}{v-a_\varkappa}\right)^{s_\varkappa} \cdot \frac{\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(1 + s_1 + s_2 + \dots + s_n)}$$

a tedy náš integrál původní má hodnotu

$$A = \frac{\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(1 + s_1 + s_2 + \dots + (s_n)} \int_1^\infty v^s \, d\,R(v) \, ,$$

kde položeno

$$R(v) = \frac{(v-1)^{s_1 + s_2 + \dots + s_n}}{(v-a_1)^{s_1} (v-a_2)^{s_2} \dots (v-a_n)^{s_n}} \, ,$$

kterýžto integrál lze podobně přetvořiti, jako jsme to výše učinili.

5. Uvažujme dále integrál

$$A = \iint \dots \int \xi_1^{s_1-1} \xi_2^{s_2-1} \dots \xi_n^{s_n-1} \, \varphi(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

vzatý nad oborem

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leqq 1 \, , \quad \xi_\varkappa \geqq 0 \, ;$$

obor $\mathfrak{A}_v$ zde bude

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leqq v \, ,$$

tedy $\alpha = 0$, $\beta = 1$.

Funkce $B(v)$ jest v našem případě

$$B(v) = \iint \dots \int \xi_1^{s_1-1} \dots \xi_n^{s_n-1} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \dots d\xi_n \, ,$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \leqq v \, , \quad \xi_\varkappa > 0 \, .$$

a má hodnotu

$$B(v) = v^{s_1 + s_2 + \dots + s_n} \frac{\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2) \dots \Gamma(s_n)}{\Gamma(1 + s_1 + s_2 + \dots + s_n)} \, ,$$

takže máme dle vzorce

$$A = \int_0^1 \varphi(v)\, dB(v)$$

výsledek Liouvilleův

$$A = \frac{\Gamma(s_1)\,\Gamma(s_2)\ldots\Gamma(s_n)}{\Gamma(s_1+s_2+\ldots+s_n)} \int_0^1 \varphi(v)\, v^{s_1+s_2+\ldots+s_n-1}\, dv\,.$$

6. Catalanův obecný theorém lze lépe a obecněji takto vysloviti a do jisté míry rozšířiti.

Integrál

$$A = \int\int\ldots\int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) f\left[\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\right] d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

budiž vzat nad určitým oborem $\mathfrak{A}$ (který může obsahovati i negativní ξ); nechť na okraji tohoto oboru funkce φ má hodnotu stálou β, uvnitř pak jediné minimum $\xi_1^0 \xi_2^0 \ldots \xi_n^0$ a žádné maximum; tuto minimální hodnotu φ znamenejme α.

Obor $\mathfrak{A}$ lze pak charakterisovati podmínkou

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq \beta\,;$$

je-li v mezi α a β, znamenejme $\mathfrak{A}_v$ obor

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n) \leqq v\,,$$

a předpokládejme, že $\mathfrak{A}_{v+dv}$ obsahuje úplně obor $\mathfrak{A}_v$. Znamenáme-li pak

$$B(v) = \int\int_{\mathfrak{A}_v}\ldots\int F(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n\,,$$

bude

$$A = \int_\alpha^\beta f(v)\, d B(v)\,.$$

Nynější stav otázky experimentalního diabetu po vynětí mikteru.

Podává *Alois V. Velich.*

(Dokončení.)

Při dosavadních pokusech dála se zmínka vždy jen o operacích na psech; sluší proto dříve, než o vlastních příčinách vystoupení úplavice cukrové po exstirpaci mikteru, či spíše o hypothesách zjev ten vykládajících se zmíníme, uvésti i pokusy, jež v tomto směru na jiných druzích zvířat vykonány byly. Minkowski, jenž spolu s Mehringem, jak svrchu řečeno bylo, dokázal, že po úplném odstranění mikteru vystoupí u psů bezvýjimečně diabetes mellitus v nejtěžší své formě, konal pokusy s exstirpací mikteru i na kočkách, krá-