Matyáš Lerch

Sur la différentiation des séries

Jornal des sciencias mathematicas e astronomicas, Coimbra, 11 (1892), 107–114

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501730

SUR LA DIFFÉRENTIATION DES SÉRIES

(Extrait d'une lettre adressée à Gomes Teixeira)

PAR

M. Lerch

(Professeur à l'École Polytechnique de Prague)

Je prends la liberté vous communiquer une remarque à la quelle m'a donné l'occasion la note de M. de la Vallée Poussin contenue dans le 3me numéro du t. XI de votre journal. Dans mes leçons à l'École technique tschèque j'ai développé une démonstration d'un théorème qui traite un sujet analogue à celui de M. de la Vallée Poussin, mais avec moins d'hypothèses.

Le théorème dont il s'agit est le suivant: Supposons que les termes de la série infinie

$$f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

sont des fonctions uniformes et synectiques dans une aire finie quelconque A et que la série soit uniformément convergente lorsque la variable x parcourt tout le contour S de cette aire A. Alors je dis que la série sera convergente aussi pour tous les points intérieurs de A et qu'elle représente une fonction analytique $F(x)$ dont les dérivées s'obtiennent en différentiant les termes de la série considérée.

Employons à cet effet la formule

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_n(z)\,dz}{z-x},$$

où x est un des points intérieurs de A, l'intégrale étant prise le long du contour S dans le sens positif. Il s'ensuit

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \int_S \frac{dz}{z-x} \sum_{n=m}^{m+p} f_n(z);$$

or la série $\Sigma f_n(z)$ étant uniformément convergente sur le contour S, on peut trouver une limite m_0 telle que, pour chaque valeur de m supérieure à m_0, chaque corps de termes éloignés $\Sigma f_n(z)$, $(n = m, m+1, \ldots, m+p)$ a une somme moindre qu'une quantité ε donnée d'avance, quelque soit p.

On aura ainsi l'inégalité

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_S \frac{ds}{|z-x|},$$

en représentant par ds la différentielle de l'arc du contour s. De là il suit que la série $\Sigma f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est convergente lorsque x est à l'intérieur de A, mais on ne voit pas encore si cette convergence est uniforme. Pour ce but je représente par k la distance moindre d'un point intérieur x_0 au contour S et je considère l'entourage de ce point donné par l'inégalité $|x - x_0| \leqq \rho$, ρ étant une constante positive moindre que k. La distance de tous les points de cet entourage aux points z du contour S étant inférieure à $k-\rho$, on aura $|z-x| < k-\rho$ et par conséquent

$$\int_S \frac{ds}{|z-x|} < \frac{S}{k-\rho},$$

en convenant de représenter par S la longueur de la périphérie S.

Ainsi lorsque x appartient à l'entourage du point x_0 la somme $\Sigma f_n(x)$, $(n = m, m+1, \ldots m+p)$ sera inférieure à une constante $\frac{\epsilon S}{2\pi(k-\rho)}$, d'où il suit que notre série converge *uniformément* dans les environs de tous les points intérieurs de l'aire A.

On vois de même que l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)\,dz}{z-x},$$

en posant, sur le contour S,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

d'où l'on tire aisément que nous avons dans l'entourage considéré du point x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m (x-x_0)^m, \quad C_m = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(z)\,dz}{(z-x_0)^{m+1}},$$

ce qui prouve que notre série représente une fonction analytique. La quantité C_m est évidemment égale à la série

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f_n(z)\,dz}{(z-x_0)^{m+1}}$$

identique avec la suivante

$$C_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{(m)}{f_n}(x_0)}{m!},$$

ce qui démontre qu'aussi les séries dérivées sont convergentes et ont des sommes égales à des dérivées de la somme primitive, ce qui est le résultat auquel nous voulions parvenir.

C'est précisément le théorème de M. Weierstrass modifié pour une aire quelconque. Car l'illustre géomètre considère une somme de termes de la forme

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} x^{\nu},$$

l'aire A étant ici un cercle $|x| \leqq R$, et suppose que la somme $f_n(x)$ soit uniformément convergente pour tous les points de la circonférence $|x| = R$; dans ce cas nous aurons évidemment, en prenant dans notre résultat $x_0 = 0$, $\rho < R$, $|x| \leqq \rho$, l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^m, \quad C_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}.$$

On peut désirer une généralisation qui aurais plus d'analogie *formale* avec le théorème de l'illustre géomètre, en étudiant une catégorie spéciale des développements

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} \varphi_\nu(x)$$

et en se proposant la question relative à des conditions à remplir pourqu'on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \varphi_\nu(x), \quad C_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\nu}.$$

Cette circonstance se vérifie toutes les fois que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ soient entières et que l'on ait $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(x) . x^{-m_\nu} = K$, cette quantité-ci étant constante, mais on n'a pas aucun théorème général sur ce sujet.

J'ai essayé de résoudre cette question sous des conditions qui sont souvent remplies.

Je suppose que les fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... sont synectiques et uniformes dans l'aire A et telles qu'il leur corresponde une suite de fonctions $\psi(z)$, $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, définies sur la ligne S pour lesquelles l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \varphi_m(z)\,\psi_n(z)$$

prise le long du contour S est zéro en général, mais égale à l'unité lorsque $m=n$.

On suppose de plus qu'en représentant par ψ_ν le module maximum de $\psi_\nu(z)$ sur le contour S, la série $\sum \psi_\nu\,\varphi_\nu(x)$ soit absolument convergente.

À l'aide de ces hypothèses on établit cette proposition analogue à celle de Cauchy qu'en représentant par g le module maximum sur le contour S de la somme

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu\,\varphi_\nu(z)$$

supposée uniformément convergente sur le contour S, on a l'inégalité

$$|C_\nu|<\frac{S}{2\pi}\,g\psi_\nu.$$

Considérons maintenant une série de la forme

$$V(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),\quad \text{où } f_n(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\,\varphi_\nu(x),$$

toutes les séries $V(x)$ et $f_n(x)$ étant supposées uniformément convergentes sur le contour S. Nous allons établir 1°) que $V(x)$ converge aussi à l'intérieur de A et 2°) que l'on a $V(x) = \Sigma\varphi_\nu(x)\Sigma a_{n\nu}$.

On tire d'abord de la convergence uniforme $V(z)$ l'inégalité

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(z)\right| < \varepsilon \text{ ou bien } \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}\right| < \varepsilon,$$ (z est sur la ligne S),

qui a lieu pour une quantité ε donnée d'avance, lorsque l'entier m surpasse une certaine limite. En employant le théorème (1) on en déduit

$$(\alpha) \qquad \left|\sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}\right| < \frac{S}{2\pi}\varepsilon\psi_\nu$$

ce qui prouve que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n\nu} = A_\nu$ sont convergentes, et que leurs restes satisfont à l'inégalité

$$(\beta) \qquad \left|\sum_{n=m}^{\infty} a_{n\nu}\right| \leqq \frac{S}{2\pi}\varepsilon\psi_\nu.$$

La première partie du théorème se vérifie aisément à l'aide de l'inégalité (α). Car soit x un point intérieur de l'aire A, et observons que l'identité

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi_\nu(x) \sum_{n=m}^{m+p} a_{n\nu}$$

combinée avec l'inégalité (α) donne

$$\left|\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x)\right| < \frac{S\varepsilon}{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} |\varphi_\nu(x)|\,\psi_\nu;$$

or ε étant infiniment petit pour m infini, on voit que la série $\Sigma f_n(x)$ doit être convergente, ce qui prouve la première proposition. Il faut encore établir la convergence de la série $\Sigma A_\nu \varphi_\nu(x)$ et montrer qu'elle est égale à $V(x)$. Décomposons à cet effet la série A_ν comme il suit:

$$A_\nu = A_\nu' + A_\nu'', \quad A_\nu' = \sum_{n=0}^{m-1} a_{n\nu}, \quad A_\nu'' = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n\nu},$$

il est clair que l'on a

$$\sum_{n=0}^{m-1} f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu' \varphi_\nu(x), \quad |A_\nu''| \leqq \frac{S}{2\pi} \varepsilon \psi_\nu;$$

la dernière inégalité prouve que la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |A_\nu \varphi_\nu(x)| \leqq \frac{S}{2\pi} \varepsilon \sum_{\nu=0}^{\infty} |\psi_\nu \varphi_\nu(x)|$$

et par conséquent aussi la série $\Sigma A_\nu'' \varphi_\nu(x)$ est convergente et devient infiniment petite avec ε. Puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \varphi_\nu(x) = \sum_{n=m}^{\infty} f_n(x) - \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu'' \varphi_\nu(x)$$

et que les deux sommes deviennent infiniment petites pour m infini, il est claire que cette différence est rigoureusement zéro.

Dans le théorème démontré plus haut on n'a pas fait voir quel est le caractère de convergence de la série $\Sigma f_n(x)$ lorsque x s'approche indéfiniment du contour S. Cette question exige un moyen un peu moins élémentaire, à savoir le théorème que les valeurs de la partie réelle (imaginaire) de $f_n(x)$, pour les points intérieurs de A, sont contenues entre deux valeurs réelles (imaginaires) de $f_n(z)$ sur le contour S. M. Jules Riemann en a conclut que la partie réelle ainsi que la partie imaginaire du corps de termes éloignés

$$\sum_{n=m}^{m+p} f_n(x) = \sum_{n=m}^{m+p} U_n + i \sum_{n=m}^{m+p} V_n$$

sera contenue entre deux limites indépendantes de x et de p, qui seront infiniment petites pour m infiniment croissant. En d'autres termes, on a cette proposition beaucoup plus précise (mais superflue pour quelques buts), que la convergence de notre série $\Sigma f_n(x)$ sera uniforme dans toute l'aire A.