Matyáš Lerch
O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1892), č. 33, 1–7

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501712

ROZPRAVY
ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ V PRAZE.

ROČNÍK I. TŘÍDA II. ČÍSLO 33.

O HLAVNÍ VĚTĚ THEORIE FUNKCÍ VYTVOŘUJÍCÍCH.

NAPSAL
M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 25. LEDNA 1892.

V PRAZE.
NÁKLADEM ČESKÉ AKADEMIE CÍSAŘE FRANTIŠKA JOSEFA
PRO VĚDY, SLOVESNOST A UMĚNÍ.
1892.

Tiskem J. Otty v Praze.

Některé úkoly počtu integralního dají se pohodlně řešiti pomocí t. zv. funkcí vytvořujících (fonction génératrice), jež zavedl *Abel*; nazývá se tak funkce $f(x)$ hovící rovnici

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx = \varphi(a) ;$$

užívání této methody však vyžaduje důkaz věty, že za jistých okolností »určující« funkci $\varphi(a)$ přísluší jediná funkce vytvořující $f(x)$. Provésti tento důkaz jest účelem následující úvahy; v odstavci I. předeslána věta z nauky o funkcích realné proměnné, kterou jiným způsobem dokázal p. *Weierstrass* ve spisech Berlínské akademie a současně p. *Runge* ve svých universitních přednáškách r. 1885, z nichž podán stručný výtah v časopise Acta mathematica, sv. 7.

Tuto methodu vytvořujících funkcí měli jsme na mysli při poznámce pod čarou, již jsme učinili při své práci Mittheilungen aus der Integralrechnung.*)

I. Budiž $f(x)$ libovolná konečná a spojitá funkce realné proměnné x, obsažené v určité mezeře $(a \ldots b)$; pak lze sestrojiti řadu celistvých funkcí racionalných

$$R_1(x),\, R_2(x),\, R_3(x),\, \ldots R_n(x),\, \ldots$$

které v celém intervallu $(a \ldots b)$ stejnoměrně s rostoucím n hodnotě $f(x)$ se blíží, t. j. výraz

$$\lim_{n=\infty} R_n(x)$$

konverguje stejnoměrně a rovná se $f(x)$.

Důkaz. Volme klesající řadu kladných konstant

$$(1) \qquad \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 > \ldots > \delta_n > \ldots ; \qquad \lim \delta_n = 0 .$$

Intervall $(a \ldots b)$ rozdělme na r dílů rovných, a nazveme A_s bod, jehož souřadnice jsou

$$x = a + \frac{s(b-a)}{r}, \qquad y = f\left(a + s\,\frac{b-a}{r}\right).$$

*) Monatshefte für Mathematik und Physik, I. roč.

1*

Tím obdržíme na křivce $y = f(x)$ znázorňující průběh naší funkce $r + 1$ bodů $A_0, A_1, A_2, \ldots A_r$. Lomená čára $A_0 A_1 A_2 \ldots A_r$ (složená z přímých délek $A_s A_{s+1}$) bude se celkem málo lišiti od čáry $y = f(x)$, jeli r dosti veliké, t. j. rozdíl mezi funkcí $f(x)$ a mezi funkcí $\varphi(x)$ znázorněnou touto čarou bude veskrz menší než daná veličina. Kterémukoli číslu n z řady $1, 2, 3, \ldots$ můžeme pak ustanoviti číslo $r = m_n$ tak, aby tímto způsobem vzniklá funkce $\varphi(x)$ — již znamenáme nyní $\varphi_n(x)$ — lišila se od $f(x)$ o veličinu menší než $\frac{1}{3}\delta_n$, t. j. aby v celém intervallu $(a \ldots b)$

$$f(x) - \varphi_n(x) | < \tfrac{1}{3}\delta_n .$$

Zároveň ale znamenáme m_n nejmenší z hodnot r, pro něž tento případ nastane.

Intervall $(a \ldots b)$ rozšiřme po obou stranách o délku ε, t. j. uvažujme nadále intervall $(a - \varepsilon \ldots b + \varepsilon)$. V částech $(a - \varepsilon \ldots a)$, $(b \ldots b + \varepsilon)$ nově připojených funkce $\varphi_n(x)$ není ještě definována. Volme tedy v první části $\varphi_n(x) = \varphi_n(a)$, v druhé $\varphi_n(x) = \varphi_n(b)$. Pak bude $\varphi_n(x)$ funkcí konečnou a spojitou v celém intervallu $(a - \varepsilon \ldots b + \varepsilon)$, jež je znázorněna lomenou čarou. Dá se tedy tato funkce dle známých vlastností funkcí Dirichletovských vyjádřiti řadou

$$\varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi ,$$

která konverguje stejnoměrně v oboru $(a \ldots b)$. Následkem stejnoměrnosti konvergence naší řady můžeme ustanoviti číslo*) m'_n tak, aby součet

$$\sum_{\nu=m'_n}^{\infty} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi$$

v celém oboru $(a \ldots b)$ byl absolutně menší než $\frac{\delta_n}{3}$, takže pak rozdíl mezi $\varphi_n(x)$ a funkcí analytickou

$$\psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m'_n - 1} a_\nu^{(n)} \cos \frac{x - a + \varepsilon}{b - a + 2\varepsilon} \nu\pi$$

bude menší než $\frac{\delta_n}{3}$ a tedy pro všecka x mezery $(a \ldots b)$

$$| f(x) - \psi_n(x) | < \tfrac{2}{3}\delta_n .$$

Funkci $\psi_n(x)$ lze pak rozvinouti dle pravidla Taylorova v řadu stále konvergentní:

$$\psi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu^{(n)} x^\nu ,$$

---

*) A sice volíme za m'_n opět nejmenší číslo hovící naší podmínce.

která tedy rovněž konverguje stejnoměrně v mezeře $(a \ldots b)$. Znamenejme nyní m''_n nejmenší číslo té vlastnosti, že zbytek

$$\sum_{\nu = m''_n}^{\infty} b_\nu^{(n)} x^\nu$$

je v celém intervallu $(a \ldots b)$ menší než $\frac{\delta_n}{3}$, a položme

$$(2) \qquad R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{m''_n - 1} b_\nu^{(n)} x^\nu .$$

Pak bude

$$| \psi_n(x) - R_n(x) | < \frac{\delta_n}{3} ,$$

a tedy

$$| f(x) - R_n(x) | < \delta_n .$$

Volímeli po řadě $n = 1, 2, 3, \ldots$, sestrojíme tím způsobem zákonitou řadu funkcí tvaru (2)

$$(2') \qquad R_1(x), R_2(x), R_3(x), \ldots$$

a jež mají tu vlastnosť, že $R_n(x)$ se od $f(x)$ liší o veličinu menší než je n-tý člen řady (1), t. j. δ_n. Tím je věta dokázána.

II. Buď nyní $f(x)$ funkce konečná a spojitá, daná v celém intervallu $(0 \ldots \infty)$ a nechť existuje pro všecka a, převyšující jistou mez, integrál

$$(3) \qquad \int_0^\infty e^{-ax} f(x)\, dx = \varphi(a) .$$

Pak sluje dle *Abel*-a $f(x)$ funkcí *vytvořující* (fonction génératrice) úkon $\varphi(a)$, kdežto $\varphi(a)$ sluje funkcí *určující* (fonction déterminante) úkon $f(x)$.

Že k dané funkci vytvořující existuje jediná určující, je patrno. Platí však též důležitá věta:

Dané funkci určující $\varphi(a)$ může odpovídati nanejvýš jedna funkce $f(x)$, která ji vytvořuje.

Kdyby totiž existovala ještě funkce $f_1(x)$ hovící rovnici (3), t. j.

$$\int_0^\infty e^{-ax} f_1(x)\, dx = \varphi(a),$$

pak bychom obdrželi odečtením obou rovnic

$$\int_0^\infty e^{-ax} \left[f(x) - f_1(x) \right] dx = 0 .$$

Avšak

$$f(x) - f_1(x) = f_2(x)$$

je konečná a spojitá funkce v oboru $(0 \dots \infty)$, a my dokážeme, že pro takovou nemůže integrál

$$\int_0^\infty e^{-ax} f_2(x)\, dx$$

pro všecka a zmizeti. Zavedemeli proměnnou $z = e^{-x}$, přejde integrál v následující

$$J_a = \int_0^1 z^{a-1} f_2(l \tfrac{1}{z})\, dz ,$$

o němž se má dokázati, že nemizí pro všecka a převyšující jistou mez. Funkce $f_2(l \frac{1}{z}) = \psi(z)$ je spojitou ve všech bodech mezery $(0 \dots 1)$, nanejvýše bude bod $z = 0$ činiti výminku. Bude nám tedy dokázati nemožnosť rovnice

(4) $$J_a = \int_0^1 x^{a-1}\, \psi(x)\, dx = 0$$

předpokládané pro všecka a převyšující jistou mez. *Omezíme se dokázati větu pouze pro ten případ, že existuje veličina* c, *pro niž*

(5) $$\lim_{x=0} x^c\, \psi(x) = 0 .$$

Volímeli pak $x^c\, \psi(x) = \chi(x)$, a zaměnímeli a za $a + c$, přejde (4) v

(4′) $$J'_a = \int_0^1 x^{a-1}\, \chi(x)\, dx ,$$

kde funkce $\chi(x)$ je spojitou v celém oboru $(0 \dots 1)$.

Pak existuje celistvá funkce

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu x^\nu ,$$

která se od $\chi(x)$ liší o veličinu, jež v celém oboru $(0 \dots 1)$ je menší než předepsaná veličina δ, t. j. bude

$$| \chi(x) - R(x) | < \delta .$$

Ze vzorce (4′) plyne, ano $a + \nu > a$,

$$J'_{a+\nu} = \int_0^1 x^{a+\nu-1}\, \chi(x)\, dx = 0$$

a tedy

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu J'_{a+\nu} = \int_0^1 x^{a-1} \chi(x) R(x) \, dx = 0$$

t. j.

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) \, dx + \int_0^1 x^{a-1} \chi(x) \left[R(x) - \chi(x) \right] = 0$$

a odtud dle poslední nerovnosti:

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) \, dx < \delta \int_0^1 x^{a-1} \, | \chi(x) | \, dx \, .$$

Integrál na pravé straně nezávisí na volbě funkce $R(x)$, t. j. na δ, a tedy plyne odtud, že integrál

$$\int_0^1 x^{a-1} \chi^2(x) \, dx$$

je menší než libovolná veličina kladná, což vyžaduje, aby zmizel. Ano $\chi^2(x)$ je funkce kladná, musí býti nullou, t. j. $\chi(x) = 0$. Odtud plyne, že též funkce $\psi(x)$ t. j. $f_2(l \frac{1}{x})$ je identicky nullou a věta dokázána.

Pozn. Dlužno podotčíti, že supposice (5) obmezuje všeobecnou platnosť naší věty do jisté míry. Žádajíc, aby $\lim x^c \psi(x) = 0$, t. j. aby $\lim\limits_{x=\infty} e^{-cx} f_2(x) = 0$, dovolila podmínka ta provésti důkaz pouze pro ony funkce $f(x)$, $f_1(x)$, jichž rozdíl se stane zároveň s x nanejvýš tak nekonečným, jako jistá funkce exponencialní.

Obdržímeli tedy někdy vztah

$$\int_0^\infty e^{-ax} f(x) \, dx = \int_0^\infty e^{-ax} f_1(x) \, dx$$

platný pro všecka a dostatečně veliká, budeme jen tehdy moci souditi na rovnosť

$$f(x) = f_1(x) \, ,$$

jeli lze určiti kladnou veličinu c tak, aby

$$\lim_{x=\infty} e^{-cx} \left(f(x) - f_1(x) \right) = 0 \, .$$