Matyáš Lerch
Příspěvek k nauce o množinách bodů v rovině

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1884, 176–178

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501700

24.

Příspěvek k nauce o množinách bodů v rovině.

Přednesl **Matyáš Lerch** dne 23. května 1881.

Budiž M libovolná množina bodů v rovině. Nalezá-li se v rovině této bod a' mající tu vlastnost, že se v každém jeho okolí nalezají body z M, nazývá se, jak známo, a' *bodem hromadným* množiny M, nechť pak již sám je prvkem této neb není.

Známá věta *Weierstrassova* praví, že množiny vykazující v konečném oboru nějakém neomezený počet prvků mají nutně aspoň jedno místo hromadné.

Soubor míst hromadných množiny M zove se její *derivací* či *množinou odvozenou* M'. Má-li tato opět místa hromadná, tvoří jich soubor množinu M'', která je *druhou derivací* M'' množiny M atd.

Tak obdržíme řadu množin

$$(1) \qquad M' \; M'' \; M''' \ldots M^{(\nu-1)} \; M^{(\nu)} \ldots$$

v níž je každá obsažena ve všech předcházejících, takže veškery prvky množiny $M^{(\nu)}$ jsou zároveň prvky množiny $M^{(\nu-1)}$ atd.

Dokažme to pro $\nu = 2$. Buď a'' libovolný bod množiny M''; je-li pak δ libovolně malá daná veličina kladná, opišme kol a'' kruh poloměru δ, jejž znamenejme (a''). Jelikož bod a'' je hromadné místo množiny M', musí se vždy uvnitř kruhu (a'') nalezati body množiny M'; buď m' jeden z nich. Opíšeme-li kol m' kruh (m') poloměru $\delta - a''m'$, který je tedy všecek uvnitř kruhu (a'') obsažen, shledáme podobně, že se v tomto kruhu také nalezají body množiny M, poněvadž m' je bodem hromadným této; libovolný z těchto bodů m nalezaje se uvnitř (m') nalezá se též uvnitř (a''), a tedy obsahuje každé okolí bodu a'' body m množiny M, takže a'' je místem hromadným pro M a jako takové náleží prvé derivaci.

Řada derivac (1) je buď konečná neb neomezená. Zakončí-li se, tedy je posledním prvkem jistá množina $M^{(n)}$, která nemá více bodů hromadných. V každém konečném oboru nalezá se dle výše uvedené věty *Weierstrassovy* nanejvýš konečný počet bodů z $M^{(n)}$. V tom případě sluje množina *prvého rodu* (genre).

Sestává-li $M^{(n)}$ z konečného počtu bodů, zove se množina původní M *racionalnou druhu n*. Je-li naopak počet bodů v $M^{(n)}$ neomezený, je množina M *irracionalnou*. V tom případě můžeme jí přiřknouti symbolický bod hromadný ∞, takže existuje derivace $M^{(n+1)}$ sestávající z jediného bodu v nekonečnu. Stanovíme-li polohu bodů v rovině komplexními hodnotami, můžeme množinu irracionalnou přetvořiti v racionalnou následujícím způsobem. Buď a hodnota, jež není prvkem ani v M ani v M'; přiřadíme-li každému bodu z bod $z_1 = \frac{1}{z-a}$, přetvoříme tím množinu M v množinu M_1, která je všecka obsažena v jistém konečném oboru omezeném kružnicí se středem v o. Neboť poněvadž a není ani prvkem množiny M ani bodem hromadným, existuje zajisté jistý kruh určitého poloměru se středem v a, uvnitř kterého není bodů množiny M, a tento kruh přejde transformací naší v kruh S, jehož vnitřek odpovídá vnějšku kruhu kol a. Body hromadné irracionalné množiny M, M', M''... transformují se patrně opět v hromadné body množin M_1, M'_1, M''_1.... a mimo to přibude v bodě $z_1 = o$ příslušném ku $z = \infty$ nový skutečný bod hromadný množiny $M_1^{(\omega)}$, jenž odpovídá symbolickému bodu hromadnému ∞. Množina M_1, jejíž derivace $M_1^{(\omega+1)}$ sestává z jediného bodu o, je patrně racionalnou. Je tedy rozdíl mezi množinami racionalnými a irracionalnými pouze formalný.

2. Je li množina M derivací nějaké množiny $M^{(-1)}$, obsahuje všecky body prvé své derivace M'. Z toho plyne, že mnohdy nelze utvořiti množiny $M^{(-1)}$, které by příslušela řečená vlastnosť.

Nazyvejme *upravenou či modifikovanou* každou množinu $\mathfrak{M}(M,M') = M$, která obsahuje zároveň veškery své body hromadné. Takovou lze utvořiti z každé množiny dané, připojí-li se jí pouze její body hromadné.

Nyní dokažme větu:

Každé modifikované množině 1. rodu M v rovině náleží nekonečný počet množin $M^{(-1)}$, které ji mají za svou první derivaci. Takové množiny $M^{(-1)}$ zovou se prvými *kontraderivacemi* množiny M.

V řadě článků uveřejněných v Comptes Rendus pařížské akademie r. 1882 dokázal p. *Mittag-Leffler*, že lze pro každou danou racionalnou množinu modifikovanou M v rovině utvořiti funkci jednoznačnou $F(x, M)$, která má ve všech bodech množiny M a jen v těchto místa *podstatně zvláštní* (wesentlich singuläre Stellen).

O každé racionalní množině platí pak známá věta, že je *seřaditelnou* (má mohútnosť přirozené řady čísel), takže lze prvky její u_ν napsati v řadě

$$u_1\ u_2\ u_3\ \ldots\ u_\nu\ \ldots \tag{2}$$

která se skládá toliko z prvků množiny M, jejížto každý prvek též naopak v řadě a to pouze jednou přichází.

Dále dokázal p. *Picard* (Comptes Rendus 1879), že v okolí každého svého místa podstatně zvláštního obdrží funkce jednoznačná komplexní proměnné veškery možné hodnoty, vyjímaje nanejvýš dvě, které pak nazývati můžeme *kritickými*. Buďtež tedy $v_1\,v_2$ kritické hodnoty příslušné zvláštnímu bodu u_1, $v_3\,v_4$ kritické hodnoty pro bod u_2, $v_5\,v_6$ pro u_3 atd. Patrně lze pak napsati všecka v_i v řadě

(3) $$v_1\;v_2\;v_3\;\ldots\;v_i\;\ldots,$$

takže kritické hodnoty funkce jednoznačné tvoří množinu seřaditelnou.

Dle známého theorému *Cantorova**) existuje pak nekonečně mnoho hodnot φ, jež nenáležejí řadě (3) a při nejmenším vyplňují spojité křivky (oblouky kruhové a p.), takže množina hodnot φ má mohutnosť kontinua. Je to právě množina hodnot, jež obdržeti může funkce $F(x, M)$. Tudíž:

Soubor všech hodnot, jež obdržeti může analytická funkce jednoznačná a monogenní, tvoří vždy množinu mohútnosti kontinua.

Buď φ_0 libovolný prvek této množiny; pak tvoří kořeny x rovnice

$$F(x, M) = \varphi_0$$

množinu $x(\varphi_0)$ zajisté apantachickou (diskretní), jejíž prvá derivace shoduje se s množinou M míst podstatně zvláštních funkce $F(x, M)$, což z vlastností základních těchto míst bezprostředně vyplývá. Každá z těchto množin $x(\varphi_0)$ jest kontraderivací množiny M.

Věta dokázána pro množiny racionalné; poněvadž však lze linearnou transformací uvésti každou množinu irracionalnou rodu 1. v racionalnou, je obecná platnosť její patrna.

Zároveň shledáváme, že mohútnosť množiny, jejíž prvky jsou kontraderivace množiny dané rodu 1. není menší mohútnosti kontinua.

Množina $x(\varphi_0)$ není modifikovanou, poněvadž funkce ve zvláštních místech M nemá významu. Myslíme-li si ji doplněnou na modifikovanou, takže pak máme množinu $x(\varphi_0) + M$, můžeme sestrojiti prvou kontraderwaci této množiny, tuto pak doplniti na modifikovanou a tak pokračovati do nekonečna.

*) Mathematische Annalen, XX p. 112. Acta mathematica 1883. p. 329.