Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii funkcí elliptických, nekonečných řad a integrálů omezených. [I.]

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 1 (1891), č. 8, 135–148

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501696

PŘÍSPĚVKY
K THEORII FUNKCÍ ELLIPTICKÝCH, NEKONEČNÝCH ŘAD
A INTEGRÁLŮ OMEZENÝCH.

NAPSAL M. LERCH.

PŘEDLOŽENO DNE 30. ZÁŘÍ 1891.

1. Z theorie integrálů Eulerových známy jsou vzorce

$$(1)\qquad \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(1+x)^{s+t}} = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)},$$

$$(2)\qquad \Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}};$$

k těmto připojme vzorce známé z theorie řad Fourierových

$$\lim_{\omega=\infty}\int_0^\alpha f(x)\,\frac{\sin\omega x}{x}\,dx = \lim_{\omega=\infty}\int_0^\alpha f(x)\,\frac{\sin\omega x}{\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,f(0)$$

kde α značí kladnou veličinu, která ve druhém vzorci musí býti menší než π. Pro nás bude důležitým důsledek těchto vzorců

$$(3)\qquad \lim_{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx = \pi\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m\pi)$$

kde limita se vztahuje k celistvým hodnotám n.

Jeli $\alpha > 0$ a $\leqq 1$, máme z (2)

$$\left|\Gamma(\alpha+\beta i)\right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha}{\sqrt{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^2+\frac{\beta^2}{n^2}}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{\beta^2}{(n+\alpha)^2}}} \leqq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\frac{1+\beta^2}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta^2}{n^2}\right)}},$$

tedy

$$(2^*)\qquad \left|\,\Gamma(\alpha+\beta i)\,\right| \leqq \Gamma(\alpha+1)\sqrt{\frac{1+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\sqrt{\frac{\beta\pi i}{\sin\beta\pi i}},$$

pokud $0 < \alpha \leqq 1$.

Z této nerovnosti obdrží se pomocí vlastnosti funkce $\Gamma(s)$ vyslovené vzorcem $\Gamma(s+n) = (s+n-1)\ (s+n-2)\ldots(s+1)\ s\ \Gamma(s)$ horní mez funkce $\Gamma(\alpha+\beta i)$ i pro ostatní α.

Udělme substitucí $x = e^z$ vzorci (1) tvar

$$(1^*)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sz}\,dz}{(1+e^z)^a} = \frac{\Gamma(s)\ \Gamma(a-s)}{\Gamma(a)},$$

pišme zde $s+nti$, kde t značí kladnou veličinu realnou, násobme $e^{2nu\pi i}$ a utvořme součet vůči $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N$; i obdržíme

$$\frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=-N}^{N} \Gamma(s+nti)\ \Gamma(a-s-nti)\ e^{2nu\pi i}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{sx}}{(1+e^x)^a}\ \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\left(tx+2u\pi\right)}{\sin\frac{tx+2u\pi}{2}}\,dx;$$

předpokládajíce *u realným*, převeďme pravou stranu substitucí $tx + 2u\pi = 2z$ na tvar:

$$\frac{2}{t}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s}{t}(z-u\pi)}}{\left(1+e^{\frac{2}{t}(z-u\pi)}\right)^a}\ \frac{\sin(2N+1)z}{\sin z}\,dz.$$

Přejděme nyní k mezným hodnotám pro $N = \infty$, užívajíce vzorce (3); i bude

$$(4)\qquad \left|\begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\ e^{2nu\pi i} \\ &= \frac{2\pi}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}. \end{aligned}\right.$$

Levá strana konverguje absolutně i stejnoměrně vůči u pro všecka u obsažená uvnitř *pásu* (u) omezeného dvěma rovnoběžkama s osou realnou vedenýma souměrně vůči této u vzdálenosti $\frac{t}{2}$; t. j. body pásu (u) jsou dány podmínkou $-\frac{t}{2} < \mathrm{Jm.}\,u < \frac{t}{2}$, značí-li Jm. u pomyslnou část při u.

Abychom obdrželi obor stejnoměrné konvergence pravé strany, v němž by tato byla zároveň jednoznačnou, vylučme z roviny u pomocí přímočarých řezů všecky body u, jichž realné části jsou $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a pomyslné části absolutně větší než $\frac{t}{2}$ $\left(\text{aneb rovny } \frac{t}{2}\right)$. Rovina $[u]$ takto vzniklá z roviny volné u jest ještě oborem souvislým a obsahuje kromě toho celý pás (u).

Definujemeli v pásu (u)

$$\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a = e^{a \log\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)},$$

kde logarithmus je přirozený a má pomyslnou část v mezích $(-\pi \ldots \pi)$, pak bude každá z těchto funkcí konečnou a spojitou i různou od nully pro všecka u uvnitř pásu, a mimo to lze tyto funkce do ostatního oboru $[u]$ jen jedním způsobem propagovati.

Za supposice $0 < \text{Real. } s < \text{Real. } a$ pak konverguje pravá strana rychleji než určitá řada geometrická nezávislá na u, jakmile u leží v okolí určitého místa oboru $[u]$; tudíž jest konvergence pravé strany rovněž stejnoměrná v okolí každého místa uvnitř $[u]$.

2. Jeli a číslo celistvé, bude výraz (4) analytickou funkcí jednoznačnou vůči u v celé rovině u, která má na místech

$$u = n + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) t i, \qquad (n, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$$

póly stupně a. Užitím elementarných vzorců

$$\Gamma(a - s - nti) = (1 - s - nti)(2 - s - nti) \ldots (a - 1 - s - nti)\, \Gamma(1 - s - nti),$$

$$\Gamma(s)\, \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin s\pi}$$

obdržíme při označení

$$(z, 0) = 1,\ (z, 1) = z,\ (z, 2) = z(z+1), \ldots (z, \nu) = z(z+1) \ldots (z + \nu - 1)$$

následující vzorec

$$(4^*) \quad \left\{ \begin{aligned} f_a(u, s) &= \frac{1}{(a-1)!} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - s - nti,\ a - 1)}{\sin \pi (s + nti)}\, e^{2nu\pi i} \\ &= \frac{2}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}. \end{aligned} \right.$$

Tato funkce hoví patrně rovnicím

$$f_a(u+1) = f_a(u), \quad f_a(u + ti) = e^{-2s\pi i} f_a(u)$$

a součin $f_a(u, s)\ \vartheta_0(u \mid ti)^a\ \vartheta_1(s \mid ti)$ bude celistvou funkcí transcendentní obou proměnných u, s, a vůči u bude funkcí theta stupně a, tak že jej lze vyjádřiti pomocí transcendent elliptických, což skutečně provésti může míti svoje obtíže.

Ustanovme nejdříve hodnotu funkce $f_1(u)$ dané řadou

$$(4^b) \quad f_1(u, s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin \pi (s + nti)} = \frac{2}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{1 + e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}},$$

při čemž užívati hodláme pouze prvé z našich řad, považujíce ji za funkci komplexní proměnné s, vůči níž existuje v celé rovině a má následující vlastnosti: $f(s+1) = -f(s)$, $f(s+ti) = e^{-2u\pi i} f(s)$, a součin $g(s) = f(s)\,\vartheta_1(s \mid ti)$ jest celistvá funkce transcendentní hovící podmínkám

$$g(s+1) = g(s), \quad g(s+ti) = -g(s)\, e^{-\pi i(2s+2u)+ti},$$

které jsou společny též funkci $\vartheta_0(s + u \mid ti)$.

Jakožto funkce theta řádu prvého mohou se obě funkce lišiti toliko stálým činitelem, tak že

$$f_1(u, s) = A \frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_1(s)},$$

kde A nezávisí na s. Dle definice (4^b) bude mocninový rozvoj funkce f_1 obsahovati též $\frac{1}{s}$ a sice pochází tato mocnosť jediné ze členu $n = 0$; a sice bude patrně

$$f_1(u, s) = \frac{1}{\sin \pi s} + \mathfrak{P}(s) = \frac{1}{\pi s} + \mathfrak{P}_1(s);$$

pravá strana poslední rovnice však začíná svůj rozvoj členem

$$\frac{A\,\vartheta_0(u)}{\vartheta'_1 \cdot s},$$

který musí splývati s $\frac{1}{\pi s}$ a tedy $A = \frac{\vartheta'_1}{\pi} \cdot \frac{1}{\vartheta_0(u)}$, tak že nacházíme*

$$(4^c) \qquad f_1(u, s) = \frac{\vartheta'_1}{\pi} \frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_1(s)},$$

kde elliptické transcendenty ϑ jsou tvořeny vesměs na základě parametru ti.

Z prvého výrazu (4^a) plyne při označení

$$(s, a-1) = \varphi(s)$$

vztah

$$(a-1)!\, f_a = \sum_n \sum_{\nu=0}^{a-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(1-s)}{\nu!} (\;nti)^\nu \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin \pi(s+nti)}$$

---

* Vzorec tento nalezl *Jacobi*; zvlášť jednoduchý důkaz jeho a vzorců podobných i jich důsledky vyvinul p. *Hermite* (Annales de l'Ecole Normale, 1885). Viz též náš důkaz ve 12. svazku Acta math.

aneb

$$(a-1)!\,f_a=\sum_{\nu=0}^{a-1}\frac{1}{\nu!}\,\varphi^{(\nu)}(1-s)\left(\frac{-t}{2\pi}\right)^{\nu}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(2n\pi i)^{\nu}\,e^{2nu\pi i}}{\sin\pi(s+nti)},$$

a odtud posléz vůči (4^b)

$$(5)\qquad f_a(u,s)=\frac{1}{(a-1)!}\sum_{\nu=0}^{a-1}\frac{1}{\nu!}\varphi^{(\nu)}(1-s)\,.\left(\frac{-t}{2\pi}\right)^{\nu}\frac{\vartheta'_1}{\pi\vartheta_1(s)}\,D_u^{\nu}\,\frac{\vartheta_0(u+s)}{\vartheta_0(u)}\,.$$

3. Ve vzorci (4) položme $u=\frac{vt}{2\pi}$, násobme t a přejděme k limitě vůči $t=0$; i obdržíme dle definice omezeného integrálu vzorec

$$(6)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Gamma(s+xi)\,\Gamma(a-s-xi)\,e^{vxi}\,dx=2\pi\,\Gamma(a)\,\frac{e^{-vs}}{\left(1+e^{-v}\right)^{a}};$$

$$0<\text{Real. } s<\text{Real. } a.$$

Vzorec ten třeba však přesněji dokázati, což se může na př. státi důkazem obecného vzorce *Fourierova*

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{vzi}\,dz\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{xzi}\,dx=2\pi f(-v),$$

jímž se však zabývati nehodláme; klademe-li zde

$$f(x)=\frac{e^{sx}}{(1+e^{x})^{a}}\,,$$

obdržíme užívajíce vztahu (1^a) vzorec (6).

Obraťme se nyní k stanovení integrálu

$$A=\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}k^{s}\,\frac{ds}{s},$$

kde k je kladná veličina realná, $a>0$, a integrace se děje po přímce vedené bodem $s=a$ rovnoběžně s osou pomyslnou. Vyčíslení jeho podaří se pomocí integrálu

$$B=\int k^{s}\,\frac{ds}{s},$$

v němž cesta integrační skládá se z přímočarých úseků $(a-Ni\,\ldots\,a+Ni)$, $(a+Ni\,\ldots\,M+Ni)$, $(M+Ni\,\ldots\,M-Ni)$, $(M-Ni\,\ldots\,a-Ni)$. Zde značí N velikou veličinu kladnou, M velikou veličinu, kladnou pro $k<1$, zápornou pro $k > 1$, takže pro $k < 1$ leží pól $s = 0$ mimo obor integrační a tedy $B = 0$, kdežto pro $k > 1$ leží $s = 0$ uvnitř oboru toho a pak $B = 2\pi i$.

Jelikož $A = \lim\limits_{M=\infty, N=\infty} B$, máme $A = 0$ pro $k < 1$, $A = 2\pi i$ pro $k > 1$.
Pro $k = 1$ obdržíme přímým vyčíslením

$$\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{ds}{s} = \left[\log s\right]_{s=a-\infty i}^{s=a+\infty i} = \pi i,$$

a tedy máme výsledek:

Jsouli a, k veličiny kladné, bude

$$\text{(7)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} k^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 1 & \text{pro } k > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{»} \ \ k = 1 \\ 0 & \text{»} \ \ k < 1. \end{cases}$$

Podobně bychom nalezli v *případě* $k > 0$, $a < 0$:

$$\text{(7*)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} k^s \frac{ds}{s} = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{»} \ \ k = 1 \\ -1 & \text{»} \ \ k < 1. \end{cases}$$

4. Předpokládajíce, že u je pravý kladný zlomek, násobme (4) differenciálem $\frac{ds}{s}$, a integrujme obě strany v mezích $(b - \infty i \ldots . b + \infty i)$, kde $0 < b <$ Real. a; uvážímeli, že dle výsledku předešlého odstavce má integrál

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} \frac{ds}{s}$$

jen tehdy hodnotu od nully různou, jeli exponent $\frac{2\pi}{t}(n-u)$ kladný, obdržíme vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nu\pi i} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \Gamma(s+nti)\,\Gamma(a-s-nti) \frac{ds}{s}$$

$$\alpha) \qquad = \frac{2\pi\Gamma(a)}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}.$$

Obecný člen levé strany přetvořme substitucí $s = b + (x - nt)i$, čímž ona obdrží tvar:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nu\pi i} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(b+xi)\,\Gamma(a-b-xi) \frac{dx}{b+xi-nti}$$

aneb též

$$\beta)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(b+xi)\Gamma(a-b-xi)\,dx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{b+xi-nti}.$$

Nekonečnou řadu zde se vyskytující lze sečísti na základě vzorce

$$(8)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{v-n}=2\pi i\,\frac{e^{2uv\pi i}}{e^{2v\pi i}-1}$$

platného za podmínky $0<u<1$ při všech v.* Bude pak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2nu\pi i}}{b+xi-nti}=\frac{2\pi}{t}\,\frac{e^{\frac{2u\pi}{t}(b+xi)}}{e^{\frac{2\pi}{t}(b+xi)}-1};$$

dosadímeli tuto hodnotu do výrazu β) a transformujemeli integrál substitucí $b+xi=s$, dospějeme srovnáním veličin α) a β) k výsledku:

$$(9)\qquad \Gamma(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^{a}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma(s)\Gamma(a-s)\,\frac{e^{\frac{2su\pi}{t}}}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1}\,ds,$$

$$(0<u<1,\ 0<b<\text{Real. }a;\ t>0).$$

Ve zvláštním případě $a=1$ máme odtud, kladouce $b=\frac{1}{2}$, tedy $s=\frac{1}{2}+\frac{ix}{t}$, a píšíce $\frac{1}{t}$ místo t:

$$(10)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{tu\pi}}{t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2ux\pi i}\,dx}{\left(e^{\frac{x\pi}{t}}+e^{-\frac{x\pi}{t}}\right)\left(e^{t\pi+2x\pi i}-1\right)}.$$

Integrál tento rozveďme v součet dle schematu

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1},$$

a transformujme obecný člen substitucí $x=n+z$; tím veličina (9) obdrží tvar:

$$\frac{1}{2}e^{tu\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{dz}{e^{t\pi+2z\pi i}-1}\left(\frac{2}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2u\pi i(z+n)}}{e^{\frac{\pi}{t}(z+n)}+e^{-\frac{\pi}{t}(z+n)}}\right);$$

* Vzorec ten jest ode dávna znám; konal dobré služby při studiích p. *Kronecker*ových uveřejněných v Sitzungsberichte der kön. preuss. Akad. d. Wiss. Za nedlouho vyjde tiskem autorův elementarný důkaz v portugalském časopisu Jornal de Sciencias mathematicas. Jiný důkaz vyvineme níže na str. 21.

uzávorkovaný výraz lze však psáti též

$$\frac{2}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{2\pi}{t}\left(\frac{1}{2}+nti\right)(z+n)}}{1+e^{\frac{2\pi}{t}(z+n)}},$$

a tato veličina má dle (4^b) a (4^c) hodnotu

$$\frac{\vartheta'_1}{\pi}\,\frac{\vartheta_0(-z+\frac{1}{2}+uti)}{\vartheta_0(-z)\vartheta_1(\frac{1}{2}+uti)}=\frac{\vartheta'_1}{\pi}\,\frac{\vartheta_3(z-uti)}{\vartheta_0(z)\vartheta_2(uti)},$$

tak že vzorec (10) obdrží tvar velmi zajímavý:

$$(10^a)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{ut\pi}\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_2(uti)}\int_0^1\frac{\vartheta_3(z-uti)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)},$$

kde elliptické transcendenty ϑ jsou tvořeny pomocí parametru ti.

Integrál v pravo je celistvou funkcí transcendentní vůči u, jmenovatel $\vartheta_2(uti)$ podobně, rovněž levá strana jest jednoznačnou pro všecka u; následkem toho platí vztah (10^a) pro všecky hodnoty proměnné u.

Pravá strana obdrží neurčitý tvar $\frac{0}{0}$ pro $u=\frac{i}{2t}$, a rovná se tedy dle známé věty poměru derivací čitatele a jmenovatele vůči u; obdržíme tedy

$$(11)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{2nt\pi}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\vartheta'_0(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)},$$

kterýmžto vzorcem řada *Lambertova* uvedena na tvar integrálu omezeného sestrojeného z funkcí elliptických.*

5. Transformujme známý integrál

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(s)}{\Gamma(a+s)}=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{a-1}dx,$$

v němž realné části veličin a, s jsou kladné, substitucí $x=e^{-x}$, abychom obdrželi

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(s)}{\Gamma(a+s)}=\int_0^{\infty}e^{-sx}\left(1-e^{-x}\right)^{a-1}dx.$$

* Ponecháváme si na jinou příležitosť vyvinouti na základě jednoduššího principu celou řadu analogických výsledků.

V tomto vzorci klaďme $s + nti$ za s (kde t jest opět kladné a realné), násobme $e^{2nu\pi i}$ a utvořme součet vůči $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; i obdržíme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)} e^{2nu\pi i}$$

$$= \lim_{N=\infty} \int_0^{\infty} e^{-sx}\left(1-e^{-x}\right)^{a-1} \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(tx-2u\pi)}{\sin\frac{tx-2u\pi}{2}}\,dx.$$

Píšemeli v pravo $tx - 2u\pi = 2z$, obdržíme

$$\frac{2}{t} \lim_{M=\infty} \int_{-u\pi}^{\infty} e^{-\frac{2s}{t}(z+u\pi)}\left(1-e^{-\frac{2}{t}(z+u\pi)}\right)^{a-1} \frac{\sin Mz}{\sin z}\,dz$$

kde $M = 2N + 1$ je celistvé číslo liché. Z věty citované na počátku odstavce 1. plyne, že za *supposice* $0 < u < 1$ tento výraz obdrží hodnotu

$$\frac{2\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(u+n)}\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(u+n)}\right)^{a-1}.$$

Kdyby $u = 0$, bylo by dlužno předpokládati Real. $a > 1$, aby výsledek byl konvergentním; v tomto případě člen prvý $n = 0$ zmizí a věta je správnou. Tímto způsobem dokázán vzorec velmi zajímavý

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)} e^{2nu\pi i} \\ &= \frac{2\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(n+u)}\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n+u)}\right)^{a-1} \end{aligned} \right.$$

s podmínkami Real. $a > 0$, Real. $s > 0$, $0 < u < 1$, po případě $u = 0$, Real. $a > 1$, Real. $s > 0$.

Věnujme trochu pozornosti případu $a = 1$. Tu obdržíme píšíce $t = 1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{s+ni} = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2s\pi(n+u)} = 2\pi \frac{e^{-2su\pi}}{1-e^{-2s\pi}}.$$

Vzorec ten dokázán zde pouze pro real. $s > 0$; vyměnímeli však v levo n za $-n$, a násobímeli po obou stranách $e^{2s\pi}$, shledáme, že vzorec je správný též pro $-s$, $1-u$, tedy též pro Real. $s < 0$. Přechodem k mezi Real. $s = 0$ bychom shledali, že platí též pro ryze pomyslná s, jež nejsou tvaru ni.

Tím by bylo dokázáno, že — píšemeli $s = -vi$ — vzorec

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{v-n} = 2\pi i \, \frac{e^{2vu\pi i}}{e^{2v\pi i}-1}$$

uvedený výše pod č. (8), platí pro všecka v, jež nejsou celistvá, a pro realná u mezery $(0 \ldots 1)$.

Píšemeli u vzorci (12) $u = \frac{vt}{2\pi}$, násobímeli t a přejdeme k mezím pro $t = 0$, obdržíme

$$(13) \qquad \Gamma(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+ix)}{\Gamma(a+s+ix)} \, e^{2vxi} dx = 2\pi e^{-vs} \left(1 - e^{-v}\right)^{a-1},$$

kde v je realné a kladné, kdežto a může býti komplexní s kladnou částí realnou. Pouze v krajním případě $v = 0$ musí býti Real. $a > 1$. Formalně zajímavým je případ celistvého $a = \nu$; podržímeli symbol (z, ν) výše definovaný, máme pak $\Gamma(\nu + s + ix) = (s + ix, \nu) \, \Gamma(s + ix)$ a tedy vzorec

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{vxi} dx}{(s+ix,\nu)} = \frac{2\pi}{(\nu-1)!} \, e^{-vs} \left(1 - e^{-v}\right)^{\nu-1}$$

a jeho zvláštní případ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(s+ix,\nu)} = 0 \, .$$

Pravou stranu vzorce (1) lze ještě uvésti na tvar poněkud jiný, rozvinemeli obecný člen dle věty binomické, takže (1) přejde v dvojnásobnou řadu

$$\frac{2\pi}{t} \sum_{n\ \nu} (-1)^{\nu} \binom{a-1}{\nu} e^{-\frac{2\pi}{t}(s+\nu)(u+n)}$$

a provedemeli sčítání vůči n, v řadu jednoduchou

$$(12^*) \qquad \frac{2\pi}{t} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{a-1}{\nu} \frac{e^{-\frac{2u\pi}{t}(s+\nu)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t}(s+\nu)}},$$

což jest právě hledaný tvar veličiny (12).

Jeli a číslem celistvým, redukuje se tato řada na konečný počet členů, a my obdržíme:

$$(12'') \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nv\pi i}}{(s+nti, a)} = \frac{2\pi}{(a-1)!\,t} \sum_{\alpha=0}^{a-1} (-1)^{\alpha} \binom{a-1}{\alpha} \frac{e^{-\frac{2v\pi}{t}(s+\alpha)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t}(s+\alpha)}} \, .$$

V tomto vzorci pišme t', v' místo t, v, položme $s + mt$ za s, násobme $e^{2mv\pi i}$ a utvořme součet vůči $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; i obdržíme předpokládajíce Real. $t > 0$,

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i(mv + nv')}}{(s + mt + nt'i, a)}$$

$$= \frac{2\pi}{(a-1)!\,t'} \sum_{\alpha=0}^{a-1} (-1)^{\alpha} \binom{a-1}{\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2mv\pi i - \frac{2v'\pi}{t'}(s + \alpha + mt)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s + \alpha + mt)}} .$$

Pravou stranu lze opět vyjádřiti elliptickými výrazy. Za tím účelem vyšetřujme řadu

$$(14^*) \qquad \frac{2\pi}{t'} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2\pi}{tt'}(vt'i - v't)(s + mt)}}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s + mt)}} = f(s) ,$$

v níž dlužno předpokládati realnou veličinu v' v mezích $(0 \ldots . 1)$, a která definuje jednoznačnou funkci analytickou proměnné s hovící podmínkám:

$$f(s + t) = f(s), \quad f(s + t'i) = e^{\frac{2\pi i}{t}(vt'i - v't)} ;$$

součin $f(s)\, \vartheta_1 \left(\frac{s}{t} \,\middle|\, \frac{t'i}{t}\right) = g(s)$ je celistvou funkcí transcendentní, jež hoví podmínkám

$$g(s + t) = -g(s) \quad g(s + t'i) = e^{-\frac{\pi i}{t}(2s + 2v't - 2vt'i + t'i)} g(s),$$

kterým hoví také funkce $\vartheta_1 \left(\frac{s + v't - vt'i}{t} \,\middle|\, \frac{t'i}{t}\right)$; ze známé věty základní z theorie funkcí elliptických plyne, že funkce ty se liší pouze stálým činitelem, takže

$$f(s) = \frac{A\vartheta_1\left(\frac{s + v't - vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\right)} .$$

Rozvoj funkce $f(s)$ dle mocností s začíná členem $\frac{1}{s}$ pochodícím z členu $n = 0$:

$$f(s) = \frac{2\pi}{t'} \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi}{t'}(s + mt)}} + \mathfrak{P}(s) = \frac{1}{s} + \mathfrak{P}_1(s),$$

kdežto pravá strana začíná svůj rozvoj členem

$$\frac{A\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)}{\frac{1}{t}\vartheta'_1}\frac{1}{s},$$

z čehož nacházíme porovnáním

$$A=\frac{\vartheta'_1}{t}\frac{1}{\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)},$$

a následovně

$$f(s)=\frac{\vartheta'_1}{t}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+v't-vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)}, \tag{14^b}$$

kde funkce ϑ_1 je tvořena na základě parametru $\frac{t'i}{t}$.

Dle této věty pomocné obdrží náš hořejší výsledek tvar

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(mv+nv')}}{(s+mt+nt'i,a)}\\&=\frac{\vartheta'_1}{(a-1)!t}\sum_{\alpha=0}^{a-1}(-1)^{\alpha}\binom{a-1}{\alpha}e^{-\frac{v\pi i}{t}(s+\alpha)}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha+v't-vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)},\end{aligned}\right. \tag{15}$$

kde součet v levo vztahuje se ke všem soustavám čísel $m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ a v případě, že by konvergence řady nebyla absolutní, což nastane pro $a=1,2$, dlužno nejprvé sečísti vůči n.

Zvláštní případ $a=1$ vyšetřoval p. *Kronecker*,* jehož vzorec

$$\sum_{m\ n}\frac{e^{2\pi i(mv+nv')}}{s+mt+nt'i}=\frac{\vartheta'_1}{t}e^{-\frac{2vs\pi i}{t}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+vt-vt'i}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\,\middle|\,\frac{t'i}{t}\right)} \tag{15^a}$$

ostatně může vésti přímo k výsledku (15).

Je vidno, že bychom podobným rozborem jako u integrálu Eulerova druhu prvého podrobiti mohli množství jiných výrazů, a že bychom tak dospěli ke vzorcům zajisté velmi zajímavým, ač namnoze složitým. Poznamenávajíce toliko, že vzorec

$$\Gamma(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^x}e^{sx}dx$$

* Sitzungsberichte der preussischen Akad. der Wiss. 1890, p. 127.

vede k výsledkům

$$(16)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s+nti)\, e^{2nu\pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}}\, e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+xi)\, e^{vxi}\, dx = 2\pi\, e^{-e^{-v}}\, e^{-sv},$$

kde dlužno předpokládati Real. $s > 0$, $-\frac{t}{4} <$ Im. $u < \frac{t}{4}$, a v druhém Real. $s > 0$, $-\frac{\pi}{2} <$ Im. $v < \frac{\pi}{2}$, ponecháváme si na příští příležitosť vyvozené zde výsledky z části jiným způsobem vyložiti a je zobecniti.

Contributions à la théorie des fonctions elliptiques, des séries et des intégrales définies.

(Résumé.)

Dans cette note nous avons démontré quelque formules du calcul intégral qui sont semblables à quelques développements connus de la théorie des fonctions elliptiques. Nous établissons en premier lieu la relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s+nti)\, \Gamma(a-s-nti)}{\Gamma(a)}\, e^{2nu\pi i}$$

$$= \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^{a}},$$

dans laquelle la partie réelle de a est supérieure à cele de s qui elle-même est positive, tandisque t est réelle et positive, et la partie imaginaire de u est contenue entre $-\frac{t}{2}$ et $\frac{t}{2}$.

Lorsque a est entier, cette quantité s'exprime à l'aide des fonctions elliptiques.

Nous avons remarqué en passant la conséquence

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(s+xi)\ \Gamma(a-s-xi)\ e^{vxi}\, dx = 2\pi\ \Gamma(a)\ \frac{e^{vs}}{\left(1+e^{-v}\right)^{a}},$$

et nous sommes bornés à établir la formule

$$\Gamma(a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}\right)^a}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\Gamma(s)\Gamma(a-s)\,\frac{e^{\frac{2su\pi}{t}}\,ds}{e^{\frac{2s\pi}{t}}-1},$$

où la partie réelle de b est positive et inférieure à la partie réelle de a. Le cas particulier de $a=1$ conduit à la formule

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+e^{2\pi t(n-u)}}=\frac{e^{ut\pi}\vartheta'_1}{2\pi\vartheta_2(uti)}\int_0^1\frac{\vartheta_3(z-uti)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)}$$

qui, pour $u=\frac{i}{2t}$, donne cette représentation de la série de Lambert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-e^{2nt\pi}}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1\frac{\vartheta'_0(z)\,dz}{\vartheta_0(z)\left(e^{t\pi+2z\pi i}-1\right)}\,.$$

Les fonctions théta y sont formées à l'aide du paramètre ti. Le reste de la note est consacré à la démonstration des formules

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a)\Gamma(s+nti)}{\Gamma(a+s+nti)}\,e^{2nu\pi i}$$

$$=\frac{2\pi}{t}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{2s\pi}{t}(n+u)}\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n+u)}\right)^{a-1},$$

où u est réel et entre 0 et 1, et les parties réelles de a, s sont positives; puis

$$\sum_{m,n}\frac{e^{2\pi i(mv+nv')}}{(s+mt+nt'i,a)}$$

$$=\frac{\vartheta'_1}{(a-1)!\,t}\sum_{\alpha=0}^{a-1}(-1)^{\alpha}\binom{a-1}{\alpha}e^{-\frac{2v\pi i}{t}(s+\alpha)}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha+v't-vt'i}{t}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s+\alpha}{t}\right)\vartheta_1\left(\frac{v't-vt'i}{t}\right)},$$

les indices sommatoires m, n devant parcourir les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, les ϑ_1 étant formées à l'aide du paramètre $\frac{t'i}{t}$, et on a posé, pour abréger,

$$(s,a)=(s+1)\ldots(s+a-1);$$

enfin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma(s+nti)\,e^{2nu\pi i}=\frac{2\pi}{t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}}\,e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}\,.$$