Matyáš Lerch

Poznámky k Schendelovu zobecnění řady Taylorovy. [II.]

Věstník Čes. Akademie cís. Fr. Jos. pro vědy, slovesnost a umění v Praze, 1 (1891), 109–111

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501694

od J. te Winkela; 7. Děje jazyka Friesův od Th. Siebse; 8. Děje anglického jazyka od Fr. Kluge (s příspěvky od D. Behrense a E. Einenkela). Ve přídavku jest výklad o zkoumání živých nářečí a sice 1. Všeobecné zásady od Th. Wegenera; 2. Nářečí skandinavská od J. A. Lundella; 3. Nářečí německá a nizozemská od Fr. Kauffmanna. Poslední, VI. část obsahuje Mythologii od E. Mogka.

Z druhého svazku dosud vydány jsou: Část VII. (úplná) Pověsti bohatýrské od B. Symonsa; z části VIII. Dějiny literatur a sice: 1. Literatura gotská od Ed. Sieversa; 2. Literatury severské a to *a*) norsko-islandská od E. Mogka; *b*) švédsko-dánská od H. Schücka; 3. Literatura německá, a to *a*) stará hornoněmecká a nizoněmecká od R. Kögela; *b*) střední hornoněmecká od F. Vogta; *c*) střední nizoněmecká od H. Jellinghausa; 4. Nizozemská literatura od J. te Winkela; 5. Literatura Friesův (dosud nedokončena). Slíbena jest 6. Literatura anglická a to: *a*) staroanglická od B. ten Brinka; *b*) středoanglická od A. Brandla. Přídavkem k této části VIII. má býti Přehled sbírek poesií prostonárodních a to: *a*) Prostonárodní poesie skandinavská od A. Lundella; *b*) Prostonárodní poesie německá a nizozemská od J. Meiera; *c*) Prostonárodní poesie anglická od A. Brandla. Část IX. obsahovati bude Metriku od E. Sieversa, H. Paula, G. Schippera a K. Luicka. Dále již vydány jsou část X. Hospodářství od K. Th. Inama-Sternegga; část XI. Právo od K. Amiry; část XII. Vojenství od A. Schultze; část XIII. Mrav vl. zvyky a obyčeje lidu a to: 1. Poměry skandinavské od Kr. Kålunda; 2. Poměry německo-anglické od A. Schultze (dosud nedokonč.) Přídavkem k této části bude studium nynějších zvykův a obyčejů lidových od E. Mogka. Konečně část XIV. obsahovati bude Umění a to 1. Umění výtvarné od A. Schultze; 2. Hudbu od R. Liliencrona.

K některým z těchto prací přihlédneme budoucně; zde budiž jen ještě podotčeno, že tento programm jakkoli bohatý přece všude neuspokojil. R. Heinzel na př. v posudku (obsaženém v Ztft. f. d. österr. Gym. 1889 str. 773 násl.) nesrovnává se s vyloučením nových literatur, z věd pomocných pohřešuje dějepisu politického a dějin řemesel a průmyslu a chválí Gust. Gröbra, který v programm svého „Grundr. der romanischen Philologie“ pojal také dějiny věd v romanských zemích. Výtky Heinzelovy zajisté zdají se býti dobře oprávněny; ale Paul v úvodním výkladu svém netvrdí, že by předměty tyto nenáležely v obor vědomostí germ. filologovi potřebných, jenže k praktickému provedení chvály hodného záměru svého dbáti musil známých slov: Sunt certi denique fines.

Poznámky k Schendelovu zobecnění řady Taylorovy.

Napsal *M. Lerch.*

(Dokončení.)

Ze (4) plyne

$$(1-q)\,x\,\Delta_x(x,y,q,-n) = \frac{1}{\left(x+q^{-\alpha}y\right)^{n}_{\alpha=1}} - \frac{q^{-n}\left(x+q^{-1}y\right)}{\left(x+q^{\alpha}y\right)^{n+1}_{\alpha=1}}$$

a dále

$$\Delta_x(x,y,q,-n) = \frac{1-q^{-n}}{1-q}\,(x,y,q,-n-1)\,,$$

vzorec úplně podobný vzorci (2). Odtud pak máme

$$\Delta_\alpha^k (x, y, q, -n) = \left(\frac{1-q^{-n+1-\alpha}}{1-q}\right)_{\alpha=1}^k . (x, y, q, -n-k),$$

tak že obdržíme z (1*) vzorec úplně podobný (3a)

$$(5) \quad (x, y, q, -n) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k}_q (v, y, q, -n-k) . (x, -v, q, k),$$

kde ovšem zbývá ještě dokázati konvergenci pravé strany pro jisté x absolutně větší než v. Poněvadž poly funkce na levé straně jsou $-\frac{y}{q}, \frac{y}{q^2}, \frac{y}{q^3}, \ldots;$ musí býti $|v| < \left|\frac{y}{q}\right|$, má-li funkce míti na místech $v, qv, q^2v, \ldots$ povahu funkce celistvé. Jen za podmínky $|v| < \left|\frac{y}{q}\right|$ může rovnice (5) býti správnou.

Obecný člen řady (5) lze psáti

$$u_k = \left(\frac{1-q^{-n+1-\alpha}}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^k \frac{(x-q^\alpha v)_{\alpha=0}^{k-1}}{(v+q^{-\alpha} y)_{\alpha=1}^{n+k}}$$

a zde se předpokládá $|v| < |x| < \left|\frac{y}{q}\right|$.

Z tvaru tohoto je patrno, že bude

$$|u_k| < M \left| \frac{q^{-nk-\frac{1}{2}k(k-1)} x^k}{q^{-\frac{1}{2}(n+k)(n+k+1)} y^{n+k}} \right|,$$

kde M nezávisí na k; proto

$$|u_k| < M' \left|\frac{qx}{y}\right|^k .$$

Poněvadž $\left|\frac{qx}{y}\right| < 1$, konverguje řada $\Sigma |u_k|$, a tedy *rovnice (5) je správnou, jak mile* $|x| < \left|\frac{y}{q}\right|$.

Rovnici tu možno dále psáti

$$\frac{(v+q^{-\alpha} y)_{\alpha=1}^n}{(x+q^{-\alpha} y)_{\alpha=1}^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-q^{\alpha-1} v}{1-q^\alpha}\right)_{\alpha=1}^k \left(\frac{1-q^{-n-\alpha+1}}{v+q^{-n-\alpha} y}\right)_{\alpha=1}^k,$$

a odtud plyne při $n = \infty$ vzorec Schendelův

$$\prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{y+q^{\alpha} v}{y+q^{\alpha} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{qx-q^{\alpha} v}{1-q^{\alpha}}\right)_{\alpha=1}^{k} y^{-k}$$

anebo pro $y = 1$, píšeme-li x místo qx,

$$\prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1+q^{\alpha} v}{1+q^{\alpha-1} x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{\alpha=1}^{k} \frac{x-q^{\alpha} v}{1-q^{\alpha}} \right), \tag{6}$$

vzorec správný pro $|x| < 1$.

Jiný vzorec obdržel p. Schendel z věty binomické (3), když byl výsledku tomu udělil tvar

$$\left(\frac{x+q^{\alpha} y}{v+q^{\alpha} y}\right)_{\alpha=0}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-q^{n+1-\alpha}}{1-q^{\alpha}}\right)_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{x-q^{\alpha-1} v}{v+q^{n-\alpha} y}\right)_{\alpha=1}^{k},$$

dosadil $q^{-n} y$ za y a přešel k limitě pro $n = \infty$:

$$\prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{y+q^{\alpha} x}{y+q^{\alpha} v} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \prod_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{q^{\alpha}}{1-q^{\alpha}} \frac{x-q^{\alpha-1} v}{y+q^{\alpha} v}\right), \tag{7}$$

kterýžto vzorec zobecňuje některé známé vztahy z theorie funkcí elliptických.

Poznamenejme, že kriteria konvergenční zde dokázaná jsou zvláštní případy obecných vět, které o řadách s obecným členem

$$A_n (x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})$$

podal p. *Ivar Bendixson* ve své zajímavé práci *Sur l'extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss*, uveřejněné v 9. sv. časopisu Acta mathematica. Řady Schendelovy však zasluhují pozornosti zvláštní, poněvadž u nich se jeví též analogie differencování, která jest velmi důležita.