Matyáš Lerch

O jistých výrazech příbuzných integrálům Eulerovým

Věstník Král. čes. spol. nauk 1890, 137–141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501684

10.

O jistých výrazech příbuzných integrálům Eulerovým.

Napsal Matyáš Lerch v Praze.

(Předloženo 7. února 1890.)

Ve svém pojednání *Adnotationes ad seriem*

$$(1)\qquad 1+\frac{x}{y}v+\frac{x(x+1)}{y(y+1)}v^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)}v^3+\ldots$$

zabýval se dr. Schaeffer[1]) nadepsanou řadou, hledě při tom k řadě Gaussově (hypergeometrické) jakožto vzoru, jejíž jest ona zvláštní případ.

Znamenaje hodnotu řady (1) $\psi(x, y, v)$, při čemž v jest absolutně menší jednotky, obdržel řečený mathematik rozmanité výrazy pomocí omezených integrálů, které zde uvádíme:

$$\int_0^1 \beta^{x-1}(1-\beta)^{y-x-1}\frac{d\beta}{1-v\beta}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}\psi(x, y, v)$$

$$\int_0^\varrho \frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1+\alpha)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1+\varrho)^x}\,\psi\left(x, y, \frac{\varrho}{1+\varrho}\right)$$

$$\int_0^\varrho \frac{\alpha^{y-2}d\alpha}{(1-\alpha)^x}=\frac{\varrho^{y-1}}{(y-1)(1-\varrho)^x}\,\psi\left(x, y, \frac{\varrho}{\varrho-1}\right)$$

$$\int_0^\infty \alpha^{y-x-1}(1+\alpha)^{1-y}\frac{d\alpha}{1-v+\alpha}=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y-x)}{\Gamma(y)}\psi(x, y, v).$$

Při stylisaci mého pojednání[2]) o integrálech Eulerových napadlo mi studovati integrál

---

[1]) Crelleův žurnál sv. 37, p. 127.

[2]) Věstník král. české Společnosti náuk z r. 1889, str. 188.

$$(2)\qquad \mathfrak{M}(a,\,b)=\int_0^{\omega} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

kde ω je pravý kladný zlomek. Napodobiv Bourguetův důkaz Hočevarova vzorce obdržel jsem rovněž řadu (1).

Ačkoli nikterak nepřeceňuji tento velmi jednoduchý a snadný výsledek, přec mám za to, že elegantní forma výrazů tu přicházejících zasluhuje, aby funkce tyto v širší známost vešly, z kteréžto příčiny uveřejňuji své úvahy tak, jak jsem je provedl před poznáním citované práce Schaefferovy.

1.

Vycházejme z integrálu

$$(3)\qquad \mathfrak{M}(a,\,b)=\int_0^{\omega} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

kde a, b jsou veličiny v kladných částech realných a ω značí kladný pravý zlomek.

Částečnou integrací obdržíme vzorec redukční

$$(4)\qquad \mathfrak{M}(a,\,b)=\frac{\omega^a(1-\omega)^b}{a}+\frac{a+b}{a}\,\mathfrak{M}(a+1,\,b),$$

jehož posloupným užíváním máme pak vzorec obecnější

$$\mathfrak{M}(a,\,b)=\omega^a(1-\omega)^b\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(a+b,\,\nu)}{(a,\,\nu+1)}\,\omega^\nu+\frac{(a+b,\,n)}{(a,\,n)}\,\mathfrak{M}(a+n,\,b),$$

kde jsme položili jako v pojednání o integrálech Eulerových

$$(s,\,n)=s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1);\ (s,\,0)=1,\ (s,\,1)=s.$$

Snadno shledáme, že tu platí

$$\lim_{n=\infty}\frac{(a+b,\,n)}{(a,\,n)}\,\mathfrak{M}(a+n,\,b)=0,$$

a tedy

$$(5)\qquad \mathfrak{M}(a,\,b)=\omega^a(1-\omega)^b\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(a+b,\,\nu)}{(a,\,\nu+1)}\,\omega^\nu,$$

což lze dle Schaefferova označení psáti též takto:

$$\mathfrak{M}(a, b) = \frac{\omega^a(1-\omega)^b}{a}\,\psi(a+b,\ a+1,\ \omega).$$

Kdybychom ve výrazu (2) funkci $(1-x)^{b-1}$ rozvinuli dle mocností x (řadou binomialní), obdrželi bychom výraz

$$\mathfrak{M}(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{b-1}{\nu}\frac{\omega^{a+\nu}}{a+\nu}, \tag{5a}$$

a tedy porovnáním řad (5) a (5a) vztah

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b, n)}{(a, n+1)}\,\omega^n = (1-\omega)^{-b}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{b-1}{\nu}\frac{\omega^\nu}{a+\nu},$$

Rozvineme-li v pravo $(1-\omega)^{-b}$ dle věty binomické a provedše součin porovnáme na obou stranách koefficienty při ω^n, obdržíme

$$\frac{(a+b, n)}{(a, n+1)} = (-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}\binom{-b}{\mu}\binom{b-1}{n-\mu}\frac{1}{a+n-\mu}.$$

Pravou stranu můžeme též psáti

$$(-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}(-1)^\mu\binom{n}{\mu}\binom{b+\mu-1}{n}\frac{1}{a+n-\mu}$$

a nahradíme-li index summační μ výrazem $n-\nu$, obdržíme

$$\frac{(a+b, n)}{(a, n+1)} = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\binom{b+n-\nu-1}{n}\frac{1}{a+\nu}, \tag{6}$$

vzorec to, jejž bychom ostatně též elementárnou cestou algebraickou mohli odvoditi.[1])

---

[1]) Stačí uvážiti, že levá strana je ryze lomenou funkcí racionalnou proměnné a o jednoduchých pólech $a=0, -1, -2, \ldots -n$, a po té vyšetřiti příslušná residua.

Myslíme-li si obě strany algebraické identity (6) rozvinuty dle klesajících mocností a, obdržíme porovnáním koefficientů při $\frac{1}{a}$:

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{b+n-\nu-1}{n}=1. \tag{6a}$$

Nahradíme-li ve vzorci literu a hodnotou $a+k$ a sečteme-li výsledky pro $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N$, obdržíme vzhledem k relaci

$$\lim_{N=\infty}\sum_{-N}^{N}\frac{1}{k+a}=\pi \operatorname{cotg} a\pi$$

následující výsledek:

$$\lim_{N=\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{(a+b+k, n)}{(a+k, n+1)}=\pi \operatorname{cotg} a\pi . \sum_{\nu=0}^{n}(1-)^{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{b+n-\nu-1}{n}$$

aneb vůči (6a) posléz rozvoj

$$\pi \operatorname{cotg} a\pi=\lim_{N=\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{(a+b+k, n)}{(a+k, n+1)} \tag{7}$$

aneb jelikož levá a následkem toho též pravá strana nezávisí na b,

$$\pi \operatorname{cotg} a\pi=\lim_{N=\infty}\sum_{k=-N}^{N}\frac{(c+k, n)}{(a+k, n+1)}. \tag{7a}$$

Substitucí $x=1-y$ do integrálu (2) obdržíme výsledek

$$\mathfrak{M}(a, b \mid \omega)+\mathfrak{M}(b, a \mid 1-\omega)=B(a, b), \tag{8}$$

kde

$$B(a, b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Výraz (8) má tu výhodu, že řady pro $\mathfrak{M}(a, b \mid \omega)$ a $\mathfrak{M}(b, a \mid 1-\omega)$ konvergují pro všecka konečná a, b, pokud ω je uvnitř mezory $(0 \ldots 1)$.

2.

Pišme nyní ω_1 místo $1-\omega$ a kombinujme redukční vzorce

$$\mathfrak{M}(a, b) = \frac{\omega^a \omega_1^b}{a} + \frac{a+b}{a}\mathfrak{M}(a+1, b)$$

$$\mathfrak{M}(a, b) = -\frac{\omega^a \omega_1^b}{b} + \frac{a+b}{b}\mathfrak{M}(a, b+1);$$

i obdržíme odtud

$$\mathfrak{M}(a, b) = \frac{\omega^a \omega_1^{b+1}}{a} - \frac{\omega^{a+1}\omega_1^b}{b} + \frac{(a+b)(a+b+1)}{ab}\mathfrak{M}(a+1, b+1)$$

Pomocí tohoto vzorce odvodíme rozvoj

$$(9)\quad \mathfrak{M}(a, b) = \omega^a \omega_1^b \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a+b, 2\nu)}{(a, \nu)(b, \nu)} \omega^\nu \omega_1^\nu \left[\frac{\omega_1}{a+\nu} - \frac{\omega}{b+\nu}\right]$$

správný pro $\omega < \frac{1}{2}$.

Ke konci ještě vzpomeňme prvého vzorce Schaefferova, jenž ovšem jest jen zvláštním případem obecnějšího vztahu Eulerova Nalezli jsme

$$\mathfrak{M}(a, b) = \frac{\omega^a(1-\omega)^b}{a}\psi(a+b, a+1, \omega)$$

a poněvadž dle řečeného vztahu

$$\psi(a+b, a+1, \omega) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+b)\Gamma(1-b)}\int_0^1 \beta^{a+b-1}(1-\beta)^{-b}\frac{d\beta}{1-\omega\beta}$$

obdržíme relaci

$$(10)\int_0^\omega x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\omega^a(1-\omega)^b\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)\Gamma(1-b)}\int_0^1 t^{a+b-1}(1-t)^{-b}\frac{dt}{1-t\omega}$$

kde reálná část b musí býti algebraicky menší než 1.

O dalších vlastnostech funkce $\varphi(x, y, v)$ nehodláme se šířiti, poněvadž jeví se jakožto zvláštní případy vlastností řady hypergeometrické $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, ano $\varphi(x, y, v) = F(1, x, y, v)$.