Matyáš Lerch

O integralenu jednog sistema linearnich totalnich diferencijalnich jednačina i o jednom svojstvu determinanota

Glas Srpske Kr. Akad. 11 (1889), 9–20

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501666

О ИНТЕГРАЛЕЊУ ЈЕДНОГ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ТОТАЛНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА И О ЈЕДНОМ СВОЈСТВУ ДЕТЕРМИНАНАТА.

од

М. Лерха

у прагу.

1). Нека је дат један систем линеарних једначина облика:

$$1)\qquad \begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + a_{nn}\alpha_n. \end{cases}$$

Ја ћу га представити на следећи начин:

$$1^{x})\qquad (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n) = M(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

узимајући краткоће ради слово M место симбола:

$$2)\qquad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ја ћу, као што је уобичајено, звати матрисом (matrice) систем M, чији су елементи $a_{\lambda\mu}$. Узмимо још један систем једначина:

3) $$(j_1, j_2, \ldots j_n) = N(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n),$$

где су елементи матрисе $N: b_{\lambda\mu}$. Замењујући у 3) β вредностима из 1) добијамо:

4) $$(j_1, j_2, \ldots j_n) = NM(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

где NM значи матрису, чији су елементи $C_{\lambda\mu}$ дати обрасцем

$$C_{\lambda\mu} = \sum_{\sigma=1}^{n} b_{\lambda\sigma}\, a_{\sigma\mu}.$$

Уопште матрисе M и N нису смењиве (echange ables), то ће рећи симбол NM различан је од MN. Ти се симболи зову *производи* од N и M односно од M и N. Теорија матриса била је предмет важних испитивања и подудара се са теоријом билинеарних облика и са теоријом линеарних замена и сва је разлика само у имену и симболици. Иста теорија у особеном случају $n = 2$ (бинерне матрисе) подудара се са Hamilton-овом теоријом кватерниона.

Ставимо још

$$M \pm N = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11}, a_{12} \pm b_{12}, \ldots a_{1n} \pm b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \pm b_{n1}, a_{n2} \pm b_{n2}, \ldots a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$kM = \begin{pmatrix} ka_{11}, ka_{12}, \ldots ka_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ ka_{n1}, ka_{n2}, \ldots ka_{nn} \end{pmatrix}$$

где је k стварна или комплексна количина. Означимо најзад са M^2 производ MM, са M^3 производ $M.M^2 = M^2.M$ и т. д. Па сад проматрајмо детерминанту:

$$5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & a_{23}, & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, & \dots & a_{nn} - z \end{vmatrix} = (-1)^n \varphi(z),$$

која је цела функција z-та n-ога реда, и коју пишем овако:

$$\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} + \dots + A_{n-1} z + A_n.$$

Г. Cayley поставио је теорему, која служи као основа теорији матриса и која је исказана у једначини:

$$6)\quad M^n + A_1 M^{n-1} + A_2 M^{n-2} + \dots + A_{n-1} M + A_n M^0 = 0$$

или краће у једначини: $\varphi(M) = 0$ [1]. Символ M^0 значи матрису:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

која се зове јединица и означава са 1. Једначина $\varphi(z) = 0$ има, уопште n *различних* корена $z = \rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$, које г. Sylvester зове латентним коренима. Очевидно је

$$\varphi(z) = (z - \rho_1)(z - \rho_2) \dots (z - \rho_n).$$

[1] Ова теорема налази се доказана у једној белешци — на ческом језику — од г. Ed. Weyr-a на два начина, од којих један припада по к. Краусу (часопис Ческог Учепог Друштва 1887).

Означимо са $\varphi_a(z)$ целу функцију:

$$7)\quad \varphi_a(z) = \frac{\varphi(z)}{z-\varrho_a} = (z-\varrho_1)\ldots(z-\varrho_{a-1})(z-\varrho_{a+1})\ldots(z-\varrho_n)$$

и ставимо уопште:

$$8)\qquad J_a = \frac{\varphi_a(M)}{\varphi'(\varrho_a)},\ (\alpha = 1, 2, \ldots n).$$

Онда Cayley-ва теорема даје:

$$9)\qquad f(M) = \sum_{a=1}^{n} f(\varrho_a)\, J_a,$$

где је $f(z)$ цела функција z-та. Посебице је:

$$9')\qquad M^k = \sum_{a=1}^{n} \varrho_a^k\, J_a,$$

где је k цео број.

2). После ових напомена потребних за разумевање онога, што иде, ја прелазим на решаваље система симултаних једначина:

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases}$$

где се $y_1, y_2, \ldots y_n$ имају израчунати као функције једне само прапроменљиве x, и где су $a_{\lambda\mu}$ стални. По мало пре усвојеном означавању систем 10) пише се краће овако:

$$10') \qquad \left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_n}{dx}\right) = M(y_1, y_2, \dots y_n),$$

где је M матриса елемената $a_{\lambda\mu}$. Из 10') добијамо диференцијалењем:

$$\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^2y_2}{dx^2}, \dots \frac{d^2y_n}{dx^2}\right) = M\left(\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots \frac{dy_n}{dx}\right),$$

а одавде замењујући заграду вредношћу из 10'):

$$\left(\frac{d^2y_1}{dx^2}, \frac{d^2y_2}{dx^1}, \dots \frac{d^2y_n}{dx^2}\right) = M^2(y_1, y\ , \dots y_n.$$

Продужујући тако и даље долазимо до општег обрасца:

$$11) \qquad \left(\frac{d^my_1}{dx^m}, \frac{d^my_2}{dx^m}, \dots \frac{d^my_n}{dx^m}\right) = M^m(y_1, y_2, \dots y_n),$$

одакле се види, да су изводи $\frac{d^my_a}{dx^m}$ линеарне функције количина $y_1, y_2, \dots y_n$. Одатле налазимо вредности извода за $x = 0$. Означив са $c_1, c_2, \dots c_n$ вредности извода количина $y_1, y_2, \dots y_n$ за $x = 0$ имаћемо:

$$11') \qquad (y_1^{(m)}, y_2^{(m)}, \dots y_n^{(m)}) = M^m(c_1, c_2, \dots c_n),$$

где $y_a^{(m)}$ стоји место $\left(\frac{d^my_a}{dx^m}\right)_{x=0}$.

Али је по Taylor-у и Maclaurin-у

$$y_a = c_a + y_a^{(1)}x + y_a^{(2)}\frac{x^2}{1.2} + y_a^{(3)}\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots,$$

и како се из 11') види да је:

$$\left(y_1^{(m)}\frac{x^m}{m!},\ y_2^{(m)}\frac{x^m}{m!},\ \ldots\ y_n^{(m)}\frac{x^m}{m!}\right) = \frac{x^m}{m!}M^m(c_1, c_2, \ldots c_n),$$

то је онда:

$$12)\qquad (y_1, y_2, \ldots y_n) = \left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Mx)^m}{m!}\right].(c_1, c_2, \ldots c_n).$$

Стављајући даље

$$13)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(Mx)^m}{m!} = e^{Mx}$$

добијамо из 12):

$$12')\qquad (y_1, y_2, \ldots y_n) = e^{Mx}(c_1, c_2, \ldots c_n).$$

Затим из 9') закључујемо, да је:

$$14)\qquad e^{Mx} = \sum_{a=1}^{n} e^{\rho_a x} J_a$$

где ρ_a представља латентне корене матрисе M и J_a матрисе независне од x. Из 12') и 14) сљедује сада:

$$15)\qquad y_\lambda = \sum_{a=1}^{n} C_a\, e^{\rho_a x},$$

где су C_a сталне независне од x.

Обратно лако је увидети, да функције y, које даје 12'), задовољавају једначине 10, па ма какве биле сталне $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Сад ћемо да покажемо још један начин, како се налазе функције y_λ, и при томе ћемо наићи успут на једну нову и интересну истину теорије детерминаната. Напишимо једначине 10) на скраћени начин овако:

$$10'')\qquad \frac{dy_\lambda}{dx} = \sum_{a=1}^{n} a_{\lambda a}\, y_a.$$

Одавде следује:

$$\frac{d^2 y_\lambda}{d x^2} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha} \frac{d y_\alpha}{d x} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\lambda\alpha} a_{\alpha\beta} y_\beta .$$

Ако сад ставимо краткоће ради:

$$a_{\lambda\mu}^{(1)} = a_{\lambda\mu}, \; a_{\lambda\mu}^{(2)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha} a_{\alpha\mu}, \; a_{\lambda\mu}^{(3)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(2)} a_{\alpha\mu},$$

$$a_{\lambda\mu}^{(4)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(3)} a_{\alpha\mu}, \quad \text{и т. д.,}$$

наћи ћемо узастопце:

$$16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d y_\lambda}{d x} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(1)} y_\alpha \\ \dfrac{d^2 y_\lambda}{d x^2} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(2)} y_\alpha \\ \dfrac{d^3 y_\lambda}{d x^3} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(3)} y_\alpha \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^n y_\lambda}{d x^n} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha}^{(n)} y_\alpha \end{array} \right.$$

Избацајем количина $y_1, y_2, \dots y_{\alpha-1}, y_{\alpha+1}, \dots y_n$ добијамо диференцијалну једначину:

$$17) \quad \left| \begin{array}{l} D y_\lambda - a_{\lambda\lambda}^{(1)} y_\lambda, a_{\lambda 1}^{(1)}, a_{\lambda 2}^{(1)}, \dots a_{\lambda\lambda-1}^{(1)}, a_{\lambda,\lambda+1}^{(1)}, \dots a_{\lambda n}^{(1)} \\ D^2 y_\lambda - a_{\lambda\lambda}^{(2)} y_\lambda, a_{\lambda 1}^{(2)}, a_{\lambda 2}^{(2)}, \dots a_{\lambda\lambda-1}^{(2)}, a_{\lambda\lambda+1}^{(2)}, \dots a_{\lambda n}^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^n y_\lambda - a_{\lambda\lambda}^{(n)} y_\lambda, a_{\lambda 1}^{(n)}, a_{\lambda 2}^{(n)}, \dots a_{\lambda\lambda-1}^{(n)}, a_{\lambda\lambda+1}^{(n)}, \dots a_{\lambda n}^{(n)} \end{array} \right| = 0,$$

која је облика:

$$17') \quad B_0 D^n y_\lambda + B_1 D^{n-1} y_\lambda + \dots + B_{n-1} D y_\lambda + B_n y_\lambda = 0$$

где стоји $D^k y$ место $\frac{d^k y}{d x^k}$ краткоће ради. Сад како функција 15) задовољава једначину 17'), то онда ϱ_1, $\varrho_2, \dots \varrho_n$ морају бити корени једначине:

17'') $B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + B_2 z^{n-2} + \dots + B_{n-1} z + B_n = 0,$

одакле следује, да је:

$$B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \dots + B_n = B_0 \varphi(z),$$

или другаче:

$$18) \quad \begin{vmatrix} z - a^{(1)}_{\lambda,\lambda}, & a^{(1)}_{\lambda,1}, & \dots & a^{(1)}_{\lambda,\lambda-1}, & a^{(1)}_{\lambda,\lambda+1}, & \dots & a^{(1)}_{\lambda,n} \\ z^2 - a^{(2)}_{\lambda,\lambda}, & a^{(2)}_{\lambda,1}, & \dots & a^{(2)}_{\lambda,\lambda-1}, & a^{(2)}_{\lambda,\lambda+1}, & \dots & a^{(2)}_{\lambda,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z^n - a^{(n)}_{\lambda,\lambda}, & a^{(n)}_{\lambda,1}, & \dots & a^{(n)}_{\lambda,\lambda-1}, & a^{(n)}_{\lambda,\lambda+1}, & \dots & a^{(n)}_{\lambda,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n B_0 \begin{vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} - z \end{vmatrix}$$

означавајући са B_0 субдетерминанту, која одговара елементу $z^n - a^{(n)}_{\lambda,\lambda}$ на левој страни. И тако имамо ову интересну теорему теорије детерминаната:

Означив са $a_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \dots n)$ ма какве количине и ставив узастопце

$$a^{(1)}_{\lambda\mu} = a_{\lambda\mu}, \; a^{(2)}_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\lambda\alpha} a_{\alpha\mu}, \; a^{(3)}_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{(2)}_{\lambda\alpha} a_{\alpha\mu},$$

$$a^{(4)}_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{(3)}_{\lambda\alpha} a_{\alpha\mu} \text{ и т. д.,}$$

једначина 18) биће истинита за сваку вредност z-та. Ја сам ову теорему саопштио г. Eduard-у Weyr-у без доказа, и он ми је дао овај алгебарски доказ:

Стављајући као и горе:

$$\varphi(z) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} - z, & a_{12}, & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - z, & \ldots & a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots\ldots & a_{nn} - z \end{vmatrix}$$

$$= z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n$$

и означавајући са M матрису елемената $a_{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n)$, теорема Cayley-а даје:

$$M^n + A_1 M^{n-1} + A_2 M^{n-2} + \ldots + A_{n-1} M + A_n = 0$$

одакле:

a) $$(M^n - z^n) + A_1 (M^{n-1} - z^{n-1}) + A_2 (M^{n-2} - z^{n-2}) + \ldots + A_{n-1} (M - z) = -\varphi(z).$$

Сад како је матриса M^ν састављена из елемената $a^{(z)}_{\alpha,\beta}$ а $-\varphi(z)$ у обрасцу а) матриса

$$\begin{pmatrix} -\varphi(z), & 0, & 0, \ldots & 0 \\ 0, & -\varphi(z), & 0, \ldots & 0 \\ 0, & 0, & 0, \ldots & -\varphi(z) \end{pmatrix}$$

налазимо, упоређујући елементе α-те врсте у матрисама лево и десно у обрасцу а), једначине:

$$a_{a1}^{(n)} + A_1 a_{a1}^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} a_{a1}^{(1)} = 0$$

$$a_{a2}^{(n)} + A_1 a_{a2}^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} a_{a2}^{(1)} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{aa}^{(n)} - z^n + A_1 (a_{aa}^{(n-1)} - z^{n-1}) + \dots + A_{n-1} (a_{aa}^{(1)} - z) = -\varphi(z)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{an}^{(n)} + A_1 a_{an}^{(n-1)} + \dots + A_{n-1} a_{an}^{(1)} = 0.$$

Кад се из ових једначина избаце $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, добија се једначина 18), која је тиме доказана.

3). Завршујем интеграљењем система тоталних линеарних диференцијалних једначина са сталним сачиниоцима. Ја га пишем овако:

19) $$(dy_1, dy_2, \dots dy_n) =$$
$$= (M_1 dx_1 + M_2 dx_2 + \dots + M_p dx_p)(y_1, y_2, \dots y_n),$$

где су $M_1, M_2, \dots M_p$ матрисе, чији су елементи дате константе. Умовањем, које је по све слично ономе, којим смо се послужили у случају $p = 1$, налазимо разрешење у облику:

20) $$(y_1, y_2, \dots y_n) = e^{M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_p x_p} (c_1, c_2, \dots c_n)$$

где су $c_1, c_2, \dots c_n$ произвољне сталне. Али треба доказати, да систем 20) у истини задовољава једначине 19), а да то буде, треба предпоставити, да су испуњени извесни услови, који су у осталом нужни, те да једначине 19) могу заједно опстати. У обрасцу 20) ми смо написали $e^{M_1 x + \dots + M_p x_p}$ место реда:

21) $$e^{M_1 x_1 + \dots + M_p x_p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \dots + M_p x_p)^\nu}{\nu!}$$

ако су сад матрисе $M_1, M_2, \ldots M_p$ смењиве то јест ако је $M_\alpha M_\beta = M_\beta M_\alpha$, онда је:

$$\frac{(M_1 x_1 + \ldots + M_p x_p)^\nu}{\nu!} = \Sigma \frac{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} \ldots M_p^{\alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_p!}$$

где се суматорни знак десно распростире на све могуће комбинације бројева $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ реда 0, 1, 2, $\ldots \nu$, при чему је услов $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = \nu$ увек испуњен. Одатле сљедује очевидно образац:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(M_1 x_1 + M_2 x_2 + \ldots + M_p x_p)^\nu}{\nu!} =$$

$$= \left[\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(M_1 x_1)^\sigma}{\sigma!}\right] \left[\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(M_2 x_2)^\sigma}{\sigma!}\right] \ldots \left[\sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{(M_p x_p)^\sigma}{\sigma!}\right]$$

или другаче:

$$22) \qquad e^{M_1 x_1 + \ldots + M_p x_p} = e^{M_1 x_1} e^{M_2 x_2} \ldots e^{M_p x_p}$$
$$= e^{M_2 x_2} e^{M_1 x_1} \ldots e^{M_p x_p}.$$

Овај образац неби вредио, ако матрисе $M_1, M_2, \ldots M_p$ неби биле смењиве. Јер је на пример:

$$(M_1 x_1 + M_2 x_2)^2 = (M_1 x_1 + M_2 x_2)(M_1 x_1 + M_2 x_2)$$
$$= M_1^2 x_1^2 + (M_1 M_2 + M_2 M_1) x_1 x_2 + M_2^2 x_2^2$$

и ова је матриса различна од

$$M_1^2 x_1^2 + 2 M_1 M_2 x_1 x_2 + M_2^2 x_2^2,$$

ако матрисе нису смењиве. Услов, који смо поставили, јесте дакле нуждан, те да образац 22) буде истинит.

Да би се добио тотални диференцијал матрисе $e^{M_1 x_1 + \dots + M_p x_p}$, треба само развити у ред матрису

$$e^{M_1 (x_1 + d x_1) + \dots + M_p (x_p + d x_p)} = e^{M_1 x_1 + \dots + M_p x_p} \, e^{M_1 d x_1 + \dots + M_p d x_p}$$

по растућим степеним диференцијала $d x_1, d x_2, \dots d x_p$ и узети онај члан тога реда, који је линеаран односно $d x_1, d x_2, \dots d x_p$. Тај је члан

$$d . e^{M_1 x_1 + \dots + M_p x_p} = e^{M_1 x_1 + \dots + M_p x_p} (M_1 d x_1 + \dots M_p d x_p)$$

и одавде се закључује, да функције 20) увек задовољавају једначине 19) предпостављајући да су матрисе $M_1, M_2, \dots M_p$ смењиве.