Matyáš Lerch

O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových

Věstník Král. čes. spol. nauk 1889, 188–222

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501664

O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových.

Napsal **Matyáš Lerch.**

(Předloženo dne 22. listopadu 1889.)

(Zvláštní otisk z Věstníka královské české společnosti nauk.)

Účelem krátké stati této jest odvoditi základní vlastnosti funkcí Eulerových a to užitím výhradně method nauky o funkcích, jež se před ostatními vyznamenávají zvláštní jednolitostí úvah a přirozeností myšlenkového pochodu. Co se původnosti týče, není mi známo, že by o podobnou theorii řečených úkonů již byly činěny pokusy, pouze prvá část našich úvah stýká se poněkud s prací záhy zemřelého učence německého *L. Scheeffera.* *)

Ku konci pak připojím některé poznámky jiného poněkud rázu, ježto buď obsahem neb methodou mohou býti zajímavy.

Při tom vynasnažím se býti srozumitelným i začátečníku, aby se tak stať tato i vrstvám studentstva stala přístupnou. Hlavní obsah této práce byl předmětem mých přednášek konaných r. 1888—9 na c. k. české vysoké škole technické.

1.

Symbolem $\Gamma(a)$ znamenáme integrál Eulerův druhého způsobu

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx, \tag{1}$$

jenž má pouze pro kladná a určitý smysl, jak z elementarných vět o konvergenci integrálů bezprostředně vyplývá. Je-li a komplexní, $a = \xi + i\eta$, musí realná část jeho ξ býti kladnou.

Je-li realná část veličiny a větší než 1, poskytne nám částečná integrace

*) Zur Theorie der Functionen $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 97, 1884.

výsledek
$$\int e^{-x}x^{a-1}dx = -e^{-x}x^{a-1} + (a-1)\int e^{-x}x^{a-2}dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}dx = (a-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{a-2}dx,$$

t. j. $\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$, aneb zaměníme-li a za $a+1$,

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a). \tag{2}$$

Z této vlastnosti plyne postupným jí užíváním

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\ \ldots\ a\Gamma(a).$$

Pro $a = 1$ máme pak

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1,$$

a tedy

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ \ldots\ 3.2.1 = n!,$$

takže se nám integrál $\Gamma(a)$ jeví jakožto interpolační úkon arithmetické funkce (fakulty, faktorielly) $(a-1)!$

Aby se funkční povaha integrálu $\Gamma(a)$ prozkoumala, je pohodlno zavésti s *Prymem**) funkce

$$P(a) = \int_0^\omega e^{-x}x^{a-1}dx, \qquad Q(a) = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{a-1}dx, \tag{3}$$

kde ω značí libovolnou veličinu kladnou, na př. $\omega = 1$. Pak bude

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a).$$

Integrál $P(\omega)$ lze rozvinouti v řadu následujícím způsobem. Násobme rovnici

$$e^{-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$$

po obou stranách $x^{a-1}dx$ a integrujme v mezích o a ω; i obdržíme

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 82. Téhož rozkladu užil již dříve *de Casparis* (Akademie Neapolská, 1867.)

$$(4) \qquad P(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\omega^{\nu+a}}{(\nu+a)\nu!}.$$

Že tu dovoleno integrovati řadu člen za členem a výsledky sečísti, plyne odtud, že uvedená řada pro e^{-x} konverguje stejnoměrně v integračním oboru.

Tento rozvoj (4) pak dostatečně vyznačuje povahu funkce $P(a)$. Neboť řada (4) sestává z členů, jež jsou až na společný faktor ω^a racionalné funkce proměnné a, a patrně konverguje *stejnoměrně* v každém konečném oboru. Dle známé věty Weierstrassovy bude tedy $P(a)$ funkcí *analytickou*. Jelikož členové řady (4) stanou se nekonečnými pouze na jednom z míst $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$, mohou pouze tato býti místy zvláštními naší funkce. Skutečně, nalézá-li se a v jistém okolí místa $-n = a_0$, bude lze z řady (4) vyloučiti člen $\nu = n$, jenž jediný je ∞ pro $a = a_0$, kdežto zbylá řada

$$\sum (-1)^\nu \frac{\omega^{\nu+a}}{(\nu+a)\nu!}, \quad (\nu = 0, 1, \ldots n-1, n+1, n+2, \ldots)$$

jest konečnou pro $a = a_0$ a dá se pro a v jistém okolí místa a_0 uvésti na tvar

$$c_0 + c_1(a - a_0) + c_2(a - a_0)^2 + \ldots$$

Jelikož vyloučený člen $(-1)^n \frac{\omega^{a+n}}{(a+n)n!}$ lze psáti ve tvaru

$$\frac{c\omega^a}{a - a_0} = \frac{c}{a - a_0} + c' + c'_1(a - a_0) + c'_2(a - a_0)^2 + \ldots,$$

je patrno, že lze řadu (4) uvésti na tvar $\frac{c}{a - a_0}$ + řada celistvých kladných mocnin $(a - a_0)$.

To vyjadřuje, že bod a_0 jest *pólem* funkce (4). Znamenáme-li pak $P(a)$ funkci (4) i tehdy, kdy integrál $P(a)$ nemá smyslu (pro záporná a), shledáváme, že $P(a)$ *jest funkcí analytickou jednoznačnou, která nemá jiných míst zvláštních než póly prvého stupně* $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$ a která tedy existuje v celé rovině.*)

*) Že *integrál* $P(a)$ neexistuje v celém oboru proměnné a, a přec vyjádřen je funkcí existující v celé rovině, nemůže překvapovati. Tak již na př. integrál

Tím povaha funkce $P(a)$ dostatečně objasněna. Zbývá ještě vyšetřiti funkční povahu integrálu

$$Q(a) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Především je patrno, že integrál tento existuje pro všecka konečná a. Dokážeme, že jej lze vyjádřiti řadou mocninovou *stále konvergentní*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (a-1)^n.$$

A sice budou koefficienty této řady dány vzorcem

$$A_n = \frac{1}{n!} \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} (log\ x)^n dx.$$

Věc by byla jasna, kdyby bylo známo, že $Q(a)$ jest funkce analytická. Kdybychom chtěli předpokládati znalost věty Cauchyovy o integrálech v mezích komplexních, t. j. znalost Cauchy-Riemannovy nauky o funkcích, stačilo by dokázati, že existuje derivace

$$\lim_{h=0} \frac{Q(a+h) - Q(a)}{h} = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} \log x\, dx.$$

Jiný důkaz obdržel by se vyšetřováním zbytku Taylorovského rozvoje, spočívajícího na větě, již objevil p. *Darboux* a různými způsoby dokázal p. *Mansion*.

My však odůvodníme hořejší tvrzení způsobem následujícím. Buď N libovolná veličina větší než ω, a proveďme rozklad

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx = \int_{\omega}^{N} e^{-x} x^{a-1} dx + \int_{N}^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx.$$

Pak máme patrně pomocí vzorce

$\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}$ postrádá smyslu, je-li a ve své realné části záporným, kdežto funkce $\frac{1}{a}$ existuje pro všecka a.

$$x^{a-1} = e^{(a-1)\log x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b^\nu}{\nu!} (\log x)^\nu, \quad b = a-1,$$

$$(\alpha) \qquad \int_{\infty}^{N} e^{-x} x^{a-1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \int_{\infty}^{N} e^{-x} (\log x)^n dx.$$

Dále tvrdíme, že řada

$$S_N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \int_{N}^{\infty} e^{-x} (\log x)^n\, dx$$

konverguje. Abychom to dokázali, uvažme, že platí při $x \geqq N$ nerovnosť

$$\log x < x^{\frac{1}{2}},$$

a tedy

$$\int_{N}^{\infty} e^{-x} (\log x)^n\, dx < \int_{N}^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}}\, dx.$$

Je-li n sudé, bude poslední integrál menší než

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}} dx = \frac{n}{2}\,;$$

je-li však n liché, bude týž výraz menší než

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{\frac{n+1}{2}} dx = \frac{n+1}{2}\,!$$

V obou případech máme tedy

$$\int_{N}^{\infty} e^{-x} (\log x)^n\, dx < \left[\frac{n+1}{2}\right]!,$$

kde $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ značí dle obyčeje celky zlomku $\frac{n+1}{2}$.

Členové řady S_N jsou tedy menší než členové řady absolutně konvergentní

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{n+1}{2}\right]!}{n!} b^n,$$

a tedy je též S_N absolutně konvergentní. Zároveň shledáváme, že S_N konverguje stejnoměrně v každém konečném oboru.

Předepsána-li jistá sebe menší veličina kladná δ, můžeme rozděliti řadu S_N na p členů ($n = 0, 1, 2, \ldots p-1$) a na zbytek ($n = p, p+1, p+2, \ldots$), jenž je při všech našich hodnotách N menší než δ. Pro veliká N jsou pak členové první velmi malí a tedy lze voliti N_0 tak, aby pro $N \geqq N_0$ byl součet oněch prvých p členů menším než δ, tak že pak pro $N \geqq N_0$ bude $S_N < 2\delta$.

. Dále lze najisto určiti $N_1 \geqq N_0$ tak, aby pro všecka $N \geqq N_1$ byl integrál

$$\int_N^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$$

absolutně menší než δ.

Toto předeslavše, uvažujme rozdíl

$$R = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{n!} \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} (\log x)^n dx.$$

Podle (α) bude tento roven veličině

$$R = \int_N^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx - S_N,$$

a tedy $|R| < 3\delta$, z čehož soudíme, že $R = 0$. Neb kdyby $|R| > 0$, stačilo by voliti $\delta < \frac{1}{3} |R|$, aby poslední nerovnost $|R| < 3\delta$ nebyla možnou. Tedy musí $R = 0$, t. j.

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-1)^n}{n!} \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} (\log x)^n dx,$$

čímž dokázána rozvinutelnosť funkce $Q(a)$ v řadu mocninovou stále konvergentní. Funkce, jež takovými řadami mohou býti vyjádřeny, a které jsou tedy konečny a jednoznačny v celé rovině, slují *celistvými* a to cel. transcendentními, nejsou-li to funkce racionalné.

Jelikož integrál $\Gamma(a)$ rovná se součtu integrálů $P(a)$ a $Q(a)$, je rovnicí

$$\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$$

definována *jednoznačná funkce analytická nemající jiných míst zvláštních mimo póly* $a = 0, -1, -2, -3, -4, \ldots$, která pro hodnoty a s kladnou částí realnou rovná se integrálu $\Gamma(a)$.

Vlastnosť (2) dokázaná pro kladná a platí pro všecka a bez rozdílu. Neboť podíl

$$\frac{\Gamma(a+1)}{a\Gamma(a)}$$

jest analytická funkce existující v celé rovině, která pro kladná a je stálou a sice rovna 1; musí tedy býti rovnou 1 i pro všecka ostatní a, c. b. d.

2.

Seznavše analytickou povahu funkcí $\Gamma(a)$, $P(a)$, $Q(a)$, obraťme svoji pozornosť k některým jich zvláštním vlastnostem. Vzorec (2) obdrželi jsme částečnou integrací. Pomocí téže obdržíme

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx = [-e^{-x} x^{a-1}]_{x=\omega}^{x=\infty} + (a-1)\int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{a-2} dx$$

čili

$$Q(a) = e^{-\omega} \omega^{a-1} + (a-1)\, Q(a-1).$$

Odečteme-li obě strany rovnice této od identity

$$\Gamma(a) = (a-1)\, \Gamma(a-1),$$

obdržíme

$$P(a) = -e^{-\omega} \omega^{a-1} + (a-1)\, P(a-1),$$

takže máme následující soustavu vztahů

$$(2^*)\qquad \begin{cases} \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \\ P(a+1) = -e^{-\omega} \omega^{a} + a\, P(a) \\ Q(a+1) = e^{-\omega} \omega^{a} + aQ(a). \end{cases}$$

Druhá z rovnic těchto poskytne

$$e^{\omega}\,P(a)=\frac{\omega^a}{a}+\frac{e^{\omega}\,P(a+1)}{a}$$

a odtud máme

$$\frac{e^{\omega}P(a+\nu)}{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}=\frac{\omega^{a+n}}{a(a+1)\ldots(a+\nu)}+$$
$$\frac{e^{\omega}P(a+\nu+1)}{a(a+1)\ldots(a+\nu)}.$$

Dosadíme-li sem za ν po řadě 0, 1, 2, . . . n a sečteme-li výsledky, obdržíme

$$e^{\omega}\,P(a)=\frac{\omega^a}{a}+\frac{\omega^{a+1}}{a(a+1)}+\frac{\omega^{a+1}}{a(a+1)(a+2)}+\ldots+$$
$$+\frac{\omega^{a+n}}{a(a+1)\ldots(a+n)}+\frac{e^{\omega}\,P(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}.$$

Dokážeme-li pak, že tu platí

$$(\alpha)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{P(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}=0,$$

obdržíme vzorec *Hočevarův*

$$(5)\qquad P(a)=\frac{e^{-\omega}\omega^a}{a}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\omega^{\nu}}{(a+1,\ \nu)},$$

kde položeno

$$(x,\ \nu)=x(x+1)\,(x+2)\ldots(x+\nu-1),$$

a zvláště $(x,\ 0)=1$, $(x,\ 1)=x$. Jinými slovy, píšeme

$$(x,\ \nu)=\nu\,!\binom{x+\nu-1}{\nu}.$$

Důkaz vzorce (α) lze pak následujícím způsobem provésti. Buď p nejmenší celistvé číslo hovící nerovnosti $p>|\,a\,|+1$; pak bude

$$\left|\frac{1}{(a+p)(a+p+1)\ldots(a+n)}\right|<\frac{1}{(p-|\,a\,|)(p+1-|\,a\,|)\ldots(n-|\,a\,|)}$$
$$<\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-p+1)}.$$

Jelikož $n>p$, jest $a+n$ v realné části kladné a tedy

$$\frac{P(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)} = \int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{a+n}dx}{a(a+1)\ldots(a+p-1)(a+p)\ldots(a+n)},$$

což jest absolutně menší než

$$k.\int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{\xi+n}dx}{(n-p+1)!}, \quad k = \frac{1}{|a(a+1)\ldots(a+p-1)|},$$

kde ξ značí realnou část veličiny a. Z konvergence řady exponencialné pak patrno, že lze ke každému danému kladnému δ určiti n_0 tak, aby pro každé $n \geqq n_0$ bylo pro všecka x mezery $(0 \ldots \infty)$

$$\frac{x^{n-p+1}}{(n-p+1)!} < \delta,$$

takže pak máme

$$\left|\frac{P(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}\right| < k\delta \int_0^\infty e^{-x}x^{\xi+p-1}\,dx \text{ pro } n \geqq n_0,$$

čímž platnosť vzorce (α) dokázána.

Pro funkci $P(a)$ obdrželi jsme dva jednoduché rozvoje, kdežto pro celistvou funkci transcendentní $Q(a)$ obdrželi jsme toliko rozvoj Taylorův, kde koefficienty jsou dány ve tvaru integrálů omezených.

Pan *Hermite* nalezl pro $Q(a)$ řadu*), kterou i s odvozením chceme zde reprodukovati. Rozštěpením integrálu

$$Q(a) = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{a-1}dx$$

v nekonečný počet jiných

$$(\beta) \qquad Q(a) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots,$$

kde

$$Q_n = \int_{\omega+n}^{\omega+n+1} e^{-x}x^{a-1}dx,$$

obdržíme rozmanité vzorce, vyjádříme-li Q_n různými tvary.

---

*) Sur l'intégrale Eulérienne de seconde espèce. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 90.

Pan *Hermite* převedl substitucí $x = z + \omega + n$ integrál Q_n na tvar

$$(\gamma) \qquad Q_n = e^{-\omega - n} \int_0^1 (z + \omega + n)^{a-1} e^{-z} dz$$

a uživ binomického rozvoje

$$(z + \omega + n)^{a-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a-1}{\nu} (\omega + n)^{a-\nu-1} z^{\nu},$$

obdržel řadu

$$Q_n = e^{-\omega - n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a-1}{\nu} (\omega + n)^{a-\nu-1} \mathfrak{S}(\nu + 1),$$

kde

$$\mathfrak{S}(\nu + 1) = \int_0^1 e^{-z} z^{\nu} dz$$

$$= - e^{-1}[1 + \nu + \nu(\nu - 1) + \nu(\nu - 1)(\nu - 2) + \ldots + \\ + \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \ldots 3 . 2 . 1] + \nu!$$

Tento rozvoj Q_n bude správným pro $n = 0, 1, 2, \ldots$, je-li $\omega > 1$. Za této podmínky máme tedy dosazením do (β):

$$Q(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a-1}{\nu} (\omega + n)^{a-\nu-1} e^{-\omega - n} \mathfrak{S}(\nu + 1).$$

Znamenáme-li pak

$$(6) \qquad S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega + n)^{a} e^{-\omega - n},$$

obdržíme konečný vzorec Hermiteův

$$(7) \qquad Q(a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{a-1}{\nu} \mathfrak{S}(\nu + 1) S(a - \nu - 1),$$

při čemž

$$\mathfrak{S}(\nu + 1) = \frac{\nu!}{e} \left[e - \sum_{\alpha=0}^{\nu} \frac{1}{\alpha!} \right], \quad \omega > 1.$$

Ku konci dodejme ještě nové odvození vzorce Hočevarova. Tu užijeme identity

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{a+n} = \sum_{\mu=0}^{n} (-1)^{\mu} \frac{\binom{n}{\mu}}{a\binom{a+\mu}{\mu}},$$

již snadno obdržíme posloupným užíváním stejniny

$$\frac{1}{a+n} = \frac{1}{a} - \frac{n}{a} \cdot \frac{1}{(a+1)+(n-1)}.$$

Dosazením hodnoty (α) do vzorce

$$P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\omega^{a+n}}{n!\,(a+n)}$$

vznikne

$$P(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \frac{\binom{n}{\nu}}{n!} \frac{\omega^{a+n}}{a\binom{a+\nu}{\nu}},$$

a klademe-li zde $n = \nu + \mu$, obdržíme

$$P(a) = \sum_{\mu,\,\nu} (-1)^{\mu} \frac{\omega^{a+\mu+\nu}}{\mu!\,\nu!\,a\binom{a+\nu}{\nu}}, \quad (\mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

kterážto řada dvojnásobná je totožna se součinem řad

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} \frac{\omega^{\mu}}{\mu!} = e^{-\omega}$$

a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{a+n}}{(a,\ \nu+1)},$$

takže tedy bude

$$P(a) = e^{-\omega} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega^{a+\nu}}{(a,\ \nu+1)}$$

což jest právě vzorec Hočevarův.

3.

Vraťme se nyní k vlastnostem funkce $\Gamma(a)$. Klademe-li

$$\bar{f}(a) = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

obdržíme dle (2)

$$\bar{f}(a+1) = -\bar{f}(a);$$

zároveň pak vidíme, že $\bar{f}(a)$ jest funkcí jednoznačnou, která nemá jiných míst zvláštních mimo póly $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, takže pak součin

$$f(a) = \sin \pi a \,.\, \bar{f}(a) = \sin \pi a\, \Gamma(a)\, \Gamma(1-a)$$

jest funkcí jednoznačnou stále konečnou.

Tato má mimo to vlastnost

$$f(a+1) = f(a),$$

t. j. je to funkce periodická.

Z poslední vlastnosti funkce $f(a)$ plyne, že ji stačí uvažovati v jednom *pásu*, takže klademe-li $a = \xi + i\eta$, lze předpokládati ξ v mezích $(0 \ldots 1)$. Užívajíce rozkladu $\Gamma(a) = P(a) + Q(a)$ volme nyní $\omega = 1$ a pak bude

$$|Q(a)| = \left|\int_1^\infty e^{-x} x^{\xi - 1 + i\eta} dx\right| \leqq \int_1^\infty e^{-x} x^{\xi - 1} dx \leqq \frac{1}{e}$$

$$|P(a)| = \left|\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{\xi + \nu + i\eta}\right| < \frac{1}{|\eta|} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} = \frac{e}{|\eta|},$$

z čehož plyne

$$|\Gamma(\xi + i\eta)| \leqq \frac{1}{e} + \frac{e}{|\eta|},$$

a jelikož $1 - \xi$ je též v mezích $(0 \,.\,.\, 1)$:

$$|\Gamma(1 - \xi - i\eta)| \leqq \frac{1}{e} + \frac{e}{|\eta|},$$

a tedy

$$|\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)| \leqq \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{|\eta|}\right)^2; \quad a = \xi + i\eta.$$

Násobíme-li po obou stranách veličinou $|\sin a\pi|$, vznikne

$$|f(a)| \leqq \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{|\eta|}\right)^2 |\sin a\pi|,$$

nerovnosť to platná pro každé $a = \xi + i\eta$, kde ξ je pravý zlomek. Jelikož však pro celistvá n jest $f(a) = f(a+n)$, $\sin a\pi = \pm \sin(a+n)\pi$, platí tato nerovnosť pro všecka komplexní a vůbec. — Buď nyní m kladná veličina a volme $|\eta| > m$; pak bude při $M = \left(\frac{1}{e} + \frac{e}{m}\right)^2$ platit nerovnosť

$$|f(a)| < M |\sin a\pi|.$$

Jelikož $f(a)$ jest funkce konečná a připouští periodu 1, bude funkce

$$f\left(\frac{\log \zeta}{2\pi i}\right)$$

konečnou pro všecka ζ mimo $\zeta = 0$, ∞ a jednoznačnou, takže dle věty Laurentovy bude vyjadřitelna řadou tvaru

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \zeta^\nu,$$

a tedy

(1) $$f(a) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \zeta^\nu, \quad \zeta = e^{2a\pi i}.$$

Dále plyne z nerovnosti patrné

$$|\sin a\pi| = \frac{|e^{(\xi i - \eta)\pi} - e^{(-\xi i + \eta)\pi}|}{2} < e^{|\eta\pi|}$$

a z nerovnosti výše odvozené vztah

(2) $$|f(a)| < M e^{|\eta|\pi} = g.$$

Pro $\zeta = e^{2a\pi i}$, $a = \xi + i\eta$ probíhá při stálém η a proměnném ξ bod ζ obvod kruhu opsaného kol počátku $\zeta = 0$ poloměrem $r = e^{2\eta\pi}$.

Na tomto kruhu má řada (1) hodnotu menší než g a tedy bude dle známé věty dokázané Cauchyem, Rouchéem a Weierstrassem*)

(3) $$|A_\nu| < gr^{-\nu}.$$

Jeli tu

$$\eta > 0, \text{ bude } e^{|\eta\pi|} = e^{\eta\pi} = r^{\frac{1}{2}}$$

a pak

$$|A_\nu| < Mr^{\frac{1}{2}-\nu}.$$

Volíme-li η dosti veliké, bude pro $\nu \geqq 1$ výraz $Mr^{\frac{1}{2}-\nu}$ tak malý jak libo, takže A_ν nemůže míti hodnotu od nully různou. I bude nutně

$$A_1 = A_2 = A_3 = \ldots = 0.$$

Naproti tomu pro $\eta < 0$ jest $e^{|\eta\pi|} = e^{-\eta\pi} = r^{-\frac{1}{2}}$, a $r = e^{2\eta\pi}$ je veličina malá pro veliká η. Nerovnosť (3) poskytne pak

$$|A_\nu| < Mr^{-\frac{1}{2}-\nu};$$

volíme-li tu $-\eta$ dosti veliké a ν záporné, bude pravá strana tak malá jak libo, což vyžaduje

$$A_\nu = 0, \text{ t. j. } A_{-1} = A_{-2} = \ldots = A_{-n} = \ldots = 0.$$

Shledáváme tedy, že řada (1) se redukuje na jediný člen

$$f(a) = A_0,$$

takže jest veličinou stálou. Pro malá a máme dle vzorce (4)

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} + c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots, \text{ a pak } \sin \pi a = \pi a - \frac{\pi^3 a^3}{6} + \ldots$$
$$\Gamma(1-a) = 1 + c'_1 a + c'_2 a^2 + \ldots,$$

takže nalezneme

$$f(a) = \sin \pi a \, \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \pi + C_1 a + C_2 a^2 + \ldots$$

a tedy

$$A_0 = \pi.$$

---

*) Viz též poznámku p. *Gutzmera* v Math. Annalen Bd. XXXII. Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas (red. F. Gomes Teixeira), vol. VIII, p. 147.

Z toho pak plyne důležitá vlastnosť funkce Γ:

$$\text{(I)} \qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

kterou jsme chtěli odvoditi. Budeme jí potřebovati k následujícímu odvození rozvoje v součin.

Především plyne z (I), že *funkce* $\Gamma(a)$ *nikdy nezmizí.* Dále víme, že stane se nekonečnou v prvém stupni na místech $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$.

Podobnou vlastnosť má nekonečný součin

$$\Phi(a) = \frac{1}{a} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a}{1+\frac{a}{\nu}},$$

jenž patrně jest absolutně (bezpodmínečně) konvergentním. Tento má vlastnosť podobnou vztahu (2), totiž

$$\Phi(a+1) = a\Phi(a).$$

Neboť

$$\Phi(a+1) = \frac{1}{a+1} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{a+1}}{1+\frac{a+1}{\nu}} = \frac{1}{a+1} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a}{1+\frac{a}{\nu+1}}$$

$$= \frac{1}{a+1} \prod_{\nu=2}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^a}{1+\frac{a}{\nu}} \cdot \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{\nu}}{1+\frac{1}{\nu+1}}\right)^a = a\Phi(a).$$

Podíl

$$F(a) = \frac{\Gamma(a)}{\Phi(a)}$$

je pak jednoznačná funkce vždy konečná a mající vlastnosť

$$F(a+1) = F(a).$$

Součin $\Phi(a)\,\Phi(1-a)$ jest pak patrně roven funkci

$$\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

a tedy

$$(\alpha) \qquad \frac{\pi F(a)}{\sin a\pi} = \Gamma(a)\Phi(1-a).$$

Klademe-li $1 - a = \xi + i\eta$, předpokládajíce ξ v mezích $(0\ldots 1)$, obdržíme

$$|\Phi(1-a)| < \frac{1}{|\eta|}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\xi}}{\left|1+\frac{\xi}{\nu}+\frac{i\eta}{\nu}\right|} = \frac{1}{|\eta|}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\xi}}{\sqrt{\left(1+\frac{\xi}{\nu}\right)^2+\frac{\eta^2}{\nu^2}}},$$

tedy

$$|\Phi(1-a)| < \frac{1}{|\eta|}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\xi}}{1+\frac{\xi}{\nu}} = \frac{1}{|\eta|}\cdot\xi\Phi(\xi).$$

Probíhá-li ξ mezeru $(0\ldots\ldots 1)$, zůstává součin $\xi\Phi(\xi)$ pod stálou mezí, takže bude

$$|\Phi(1-a)| < \frac{1}{|\eta|}k,$$

kde k je veličina nezávislá na a. Dříve jsme viděli, že pro táž a jest

$$|\Gamma(a)| < \frac{1}{e} + \frac{e}{|\eta|},$$

a tedy plyne z (α) při $|\eta| > m$

$$(\beta) \qquad |F(a)| < M|\sin a\pi|,$$

kde

$$M = \frac{k}{m}\left(\frac{1}{e}+\frac{e}{m}\right).$$

Spojíce nerovnosť (β) s vlastností, že $F(a)$ jest funkcí stále konečnou a periodickou, obdržíme podobně jako předešle výsledek, že $F(a)$ jest veličinou stálou, a sice $=1$; tudíž plyne

$$(\mathrm{II}) \qquad \Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{a}}{1+\frac{a}{\nu}},$$

kteréžto věta již Eulerovi byla známa a Gaussem za definici funkce $\Gamma(a)$ přijata.

4.

Přistupme nyní k vyšetření hodnoty Eulerova integrálu prvního způsobu

$$B(a,\, b) = \int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1} dx,$$

v němž nutno předpokládati, že realná část veličin a, b jest kladnou.

Předpokládejme dokonce, že realná část b jest větší než 1.

Pak bude

$$x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{b-1}{\nu} x^{a+\nu-1}$$

a tedy

$$\int_0^x x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\, dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{b-1}{\nu} \frac{x^{a+\nu}}{x+\nu}.$$

Jeli b v realné části větší než 1, konverguje tato řada i pro $x=1$, a dle věty Abelovy a Dirichletovy bude se výsledek pro $x=1$ rovnati hodnotě integrálu s horní mezí $x=1$, takže obdržíme

$$B(a,\, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \binom{b-1}{\nu} \frac{1}{a+\nu}.$$

Z toho plyne, že $B(a,\, b)$ jest funkcí jednoznačnou proměnné a, která nemá jiných míst zvláštních mimo póly $a = 0,\ -1,\ -2, \ldots.$

Z redukčního vzorce

$$B(a,\, b) = \frac{a-1}{a+b-1}\, B(a-1,\, b),$$

jenž patrně musí platit všeobecně (ano B jest funkcí analytickou) obdržíme

$$B(a,\, b) = \frac{(a+b)\,(a+b+1)\ldots(a+b+k-1)}{a(a+1)\ldots(a+k-1)}\, B(a+k,\, b).$$

Jeli tu a záporným ve své části realné, můžeme voliti k tak veliké, aby $a+k$ bylo kladné co do části realné. Pak bude zajisté vždy $B(a+k, b)$ konečné, jeli b kladné ve své části realné. Předpokládáme-li, že b není celistvé, a volíme-li $a+b=-n$, kde n je kladné a celistvé, nebude a celistvým a tedy bude

$$B(a, b)=\frac{-n(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+n)}{a(a+1)\ldots(a+n)}.$$

$$\frac{(-n+n+1)\ldots(-n+n+h-1)}{(a+n+1)\ldots(a+n+h-1)}B(h-b, b)$$

rovno nulle, předpokládáme-li h tak veliké, aby $h-b$ bylo kladné co do části realné.

Tudíž *funkce* $B(a, b)$ *zmizí* pro $a+b=0, -1, -2, \ldots$

Následkem toho jest výraz

$$\frac{\Gamma(a+b)B(a, b)}{\Gamma(a)}=\Psi(a)$$

funkcí jednoznačnou stále konečnou.

Tato má zároveň vlastnosť

$$\Psi(a+1)=\Psi(a).$$

Ze vztahu

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}$$

plyne pak

$$\frac{\pi\Psi(a)}{\sin a\pi}=\Gamma(1-a)\Gamma(a+b)B(a, b)$$

a tu snadno ukážeme, že pravá strana jest pro $a=\xi+i\eta$, kde ξ je v mezích $(0\ldots1)$ a $|\eta|>m>0$, menší než jistá veličina nezávislá na a. Odtud a z uvedených vlastností funkce $\Psi(a)$ soudíme podobně jako v odstavci předešlém, že $\Psi(a)$ jest stálou, tak že bude

$$B(a, b)=\frac{\Gamma(a)C}{\Gamma(a+b)},$$

kde C závisí na b. Kladouce $a=1$ obdržíme však

$$B(1,b)=\frac{1}{b}, \qquad \frac{\Gamma(1)C}{\Gamma(1+b)}=\frac{C}{b\Gamma(b)}$$

a tedy

$$C = \Gamma(b),$$

tak že posléz máme vzorec Eulerův *)

$$\text{(III)} \qquad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Odvozením základních vzorců (I), (II), (III) končí náš úkol vlastní. Poznámky, jež tu ještě přičiníme, nechť jsou považovány za dodatek mající s předešlými úvahami málo společného, jehož obsah však nicméně zasluhuje povšimnutí.

5.

Z integrálu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

obdržíme differencováním pod znamením integračním

$$\text{(1)} \qquad A = \Gamma'(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \log x dx.$$

Substitucí $x = az$ obdržíme odtud

$$A = \Gamma(s) \log a + a^s \int_0^\infty e^{-ax} x^{s-1} \log x dx,$$

při čemž a značí libovolnou veličinu kladnou. Násobme po obou stranách $e^{-a} da$ a integrujme v mezích 0 a ∞; i obdržíme

$$A = \Gamma(s) \int_0^\infty e^{-a} \log a \, da + \int_0^\infty e^{-a} a^s da \int_0^\infty e^{-ax} x^{s-1} \log x dx$$

*) Způsob odvození zde podaný v podstatě je týž jako v našem článku Démonstration nouvelle etc. uveřejněném v Bulletin de la Société math. de France, t. XV. Pouze pomocné věty jsou tu odvozeny způsobem jednodušším.

Dle (1) máme patrně

$$\int_0^\infty e^{-a} \log a \, da = \Gamma'(1),$$

a tedy bude

$$A = \Gamma(s)\, \Gamma'(1) + \int_0^\infty e^{-a} a^s da \int_0^\infty e^{-ax} x^{s-1} \log x \, dx.$$

Změníme-li v posledním výrazu pořádek integrace, což zde patrně dovoleno, obdržíme

$$A = \Gamma(s)\, \Gamma'(1) + \int_0^\infty x^{s-1} \log x \, dx \int_0^\infty e^{-a(1+x)} a^s da$$

aneb dle známého vzorce

$$\int_0^\infty e^{-bx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s)}{b^s},$$

$$A = \Gamma(s)\, \Gamma'(1) + \Gamma(s+1) \int_0^\infty \frac{x^{s-1} \log x \, dx}{(1+x)^{s+1}},$$

a dělíme-li obě strany na $\Gamma(s)$,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \Gamma'(1) + s \int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x}\right)^{s-1} \log x \, \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

Klademe-li zde

$$\frac{x}{1+x} = t,$$

přejde poslední člen u výraz

$$B = s \int_0^1 t^{s-1} \log \frac{t}{1-t} \, dt.$$

Částečnou integrací obdržíme odtud

$$B = \left[t^s \log \frac{t}{1-t} - \int t^s \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\int_0^1 t^{s-1} dt + \left[(1-t^s) \log (1-t) - \int \frac{t^s - 1}{1-t} dt \right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= -\frac{1}{s} + \int_0^1 \frac{1-t^s}{1-t} dt$$

tak že máme

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{s} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1-t^s}{1-t} dt.$$

Ze vzorce $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ plyne však

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{s} = \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)},$$

a tedy bude

$$\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)} = \Gamma'(1) + \int_0 \frac{1-t^s}{1-t} dt,$$

aneb pro $s = a - 1$,

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \Gamma'(1) + \int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t} dt,$$

kterýžto známý vzorec nejčastěji bývá odvozován pomocí vzorce (II).
Způsob zde uvedený zamlouvá se svojí jednoduchostí.

6.

Differencujemeli obě strany rovnice

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

dle b, obdržíme

$$\frac{d\,B(a,b)}{db} = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \log (1-x)\, dx.$$

Rozvinemeli $\log(1-x)$ dle mocností x, obdržíme řadu

$$\log(1-x) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu},$$

která konverguje toliko pro $x < 1$, kdežto pro $x = 1$ diverguje. Nicméně bude řada

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

konvergentní a bude se rovnati veličině $\dfrac{d\,\mathrm{B}(a,b)}{db}$.

Abychom to dokázali, uvažme, že platí pro $x \leqq 1$ nerovnosť

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} x^\nu < -\log(1-x),$$

takže obdržíme při kladných realných a, b:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} \int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx < -\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx.$$

Řada v levo sestává ze samých kladných členů a je menší než pravá strana, jež nezávisí na n; obdržíme tudíž v levo řadu konvergentní, položíme-li $n = \infty$, a sice bude

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx \leqq -\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx.$$

Pro každý kladný pravý zlomek ε platí pak

$$-\int_0^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^{1-\varepsilon} x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$$< \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

Znamenámeli tedy S prozatím řadu naši, máme

$$-\int_0^{1-\varepsilon} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx < \mathrm{S}$$

$$\leqq -\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx$$

pro každé sebe menší kladné $\varepsilon < 1$. Z toho plyne ale patrně

$$\mathrm{S} = -\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx,$$

t. j.

$$-\mathrm{D}_b \mathrm{B}(a,b) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\mathrm{B}(a+\nu, b),$$

kde jsme položili $\mathrm{B}(a+\nu, b)$ na místo integrálu

$$\int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Avšak

$$\mathrm{B}(a+\nu,b) = \frac{\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+\nu)} = \frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu)}\,\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu)}\mathrm{B}(a,b),$$

a tedy

$$-\frac{\mathrm{D}_b \mathrm{B}(a,b)}{\mathrm{B}(a,b)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\,\frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu)}.$$

Levá strana rovná se však logarithmické derivaci (dle b) zlomku $\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, a tedy máme

$$\text{(V)} \qquad \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a,\nu)}{\nu\,.\,(a+b,\nu)},$$

kterýžto vzorec nachází se na př. v Bertrandově Traité de calcul intégral (p. 256).

Rozvoj tento konverguje, pokud a, b jsou veličiny v realné části kladné. Úplné kriterium její konvergence odvodíme v odst. 9.*)

*) Prozatím postačí nám věděti, že vzorec (V) je správným, pokud absolutní hodnota veličiny a je menší než realná část součtu $a+b$.

Pro $a = 1$ obdržíme z (V) vzorec

$$\frac{1}{b} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \binom{b+\nu}{\nu}}$$

Kdybychom podobným způsobem vyšetřovali vzorec

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu . dx,$$

obdrželi bychom rovněž zajímavý výsledek.

$$\frac{a+b-1}{b-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu)},$$

kde real. $b > 1$, real. $a > 0$.

7.

Z rozvoje součinového (II) plyne takměř bezprostředně vzorec

$$\Gamma(x)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\Gamma(2x),$$

zvláštní to případ obecnějšího vztahu Gaussova. K vzorci tomu dospějeme však také cestou počtu integrálního, a to následujícím způsobem:

Klademe-li ve vzorci

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

$a = b$, obdržíme

$$A = \frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(2a)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} [x(1-x)]^{a-1}\,dx.$$

Zavedeme-li novou integrační proměnou $t = 4x(1-x)$, obdržíme

$$A = \frac{2}{4^a}\int_0^1 \frac{t^{a-1}\,dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{4^a}\,B\left(a, \frac{1}{2}\right),$$

t. j.

$$\frac{\Gamma(a)^2}{\Gamma(2a)} = \frac{2}{4^a} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)},$$

odkudž máme na základě vzorce $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ výše řečený vztah.

8.

V odstavci 6. odvozený vzorec (V) poskytne pro $b = 1$ rozvoj

$$\frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \Gamma'(1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a}{\nu(a+\nu)}$$

či

$$(\mathrm{V}^a) \qquad \frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} = \Gamma'(1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{a+\nu}\right).$$

Součet nekonečný v pravo rovná se patrně integrálu

$$\int_0^1 \frac{1-t^a}{1-t}\,dt,$$

čímž výsledek odstavce 5. na novo dokázán. —

Integrujeme-li vzorec (V) vůči a v mezích 0 a 1, obdržíme

$$\log\Gamma(b+1) - \log\Gamma(b) - \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} = \int_0^1 da \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a,\nu)}{\nu(a+b,\nu)}$$

aneb, jelikož

$$\log\Gamma(b+1) - \log\Gamma(b) = \log\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)} = \log b,$$

$$\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} = \log b - \int_0^1 \frac{a\,da}{a+b} - \int_0^1 da \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(a,\nu)}{\nu(b,\nu)}.$$

Odtud máme posléz integrací dle b

$$\log \Gamma(b) = C' + b(\log b - 1) - \int db \int_0^1 \frac{a\,da}{a+b}$$

$$+ \int_b^\infty d\beta \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(a,\nu)}{\nu(a+\beta,\nu)}.$$

Avšak

$$\int db \int_0^1 \frac{a\,da}{a+b} = \int_0^1 a \log(a+b)\,da + \text{const},$$

což lze pro veliká b psáti též, značíce ε jistý pravý zlomek,

$$\log(b+\varepsilon)\int_0^1 a\,da + \text{const} = \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{b} - \ldots\right) + \text{const.},$$

tak že máme

$$(\alpha) \qquad \log \Gamma(b) = C + \left(b - \frac{1}{2}\right)\log b - b + \varphi(b),$$

kde $\varphi(b)$ klesá s rostoucím b pod každou mez, tak že $\varphi(\infty) = 0$. Abychom určili stálou C, užijme vzorce

$$\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}\,\Gamma(2x)$$

odvozeného v odst. 7. Z něho máme

$$\log \Gamma(x) + \log \Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) - \log \Gamma(2x) = \log 2\sqrt{\pi} - 2x\log 2.$$

Ze vzorce (α) plyne tedy

$$\left[C + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x\right] + \left[C + x\log\left(x+\frac{1}{2}\right) - x - \frac{1}{2}\right]$$
$$- \left[C + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\log 2x - 2x\right] = \log 2\sqrt{\pi} - 2x\log 2 + \Phi(x)$$

kde $\Phi(\infty) = 0$. Levá strana má však hodnotu

$$C + x\log\left(1 + \frac{1}{2x}\right) - \frac{1}{2} - \left(2x - \frac{1}{2}\right)\log 2$$

a rozvineme-li

$$x \log\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{x}\right),$$

kde $\left(\frac{1}{x}\right)$ značí veličinu, jež mizí pro $x=\infty$, obdržíme porovnáním obou stran

$$C=\frac{1}{2}\log 2\pi+\left[\Phi(x)+\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Uzávorkovaný výraz musí však identicky $=0$, poněvadž C je nezávislé na x a výraz ten mizí pro $x=\infty$. Tudíž

$$C=\frac{1}{2}\log 2\pi$$

a tedy máme vzorec

$$\text{(VI)}\qquad \log\Gamma(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)\log a-a+\frac{1}{2}\log 2\pi+\varphi(a),$$

kde $\varphi(a)$ je nekonečně malé*) pro nekonečně veliké kladné hodnoty a.

9.

Vzorec (VI) vyjádří se též přechodem od logarithmu k číslu jak následuje:

$$\Gamma(a)=\sqrt{2\pi}\, e^{-a}a^{a-\frac{1}{2}}(1+\varepsilon_a),$$

kde ε_a klesá s rostoucím a pod každou mez.

Vzorec ten je správný i pro komplexní a, je-li jen realná část této veličiny kladnou, jak z odvození je patrno. Můžeme ho užiti k stanovení podmínek konvergence řady (V). Neboť obecný člen této řady jest

$$u_\nu=\frac{(a,\ \nu)}{\nu(a+b,\ \nu)},$$

takže

$$\nu\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)}u_\nu=\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a+b+\nu}=\nu^{-b}(1+\varepsilon_\nu),$$

kde $\varepsilon_\infty=0$. Musí tedy realná část veličiny b býti kladnou, má-li řada (V) absolutně konvergovati, kterážto podmínka také *stačí.*

---

*) Bližší ustanovení veličiny $\varphi(a)$ nalezne čtenář v kompendiích; z prací nejnovějších o tom jednajících uveďme dopis p. Hermitea „Démonstration nouvelle etc." ve Věstníku z 1888 a pak práci p. Stieltjesa uveřejněnou právě nyní v V. sv. Jordanova žurnálu.

Nutná i dostatečná podmínka absolutní konvergence řady

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(u,\nu)}{\nu(v,\nu)}$$

jest, aby realná část rozdílu $v - u$ byla kladnou.

10.

Integrál

$$\int_0^1 \log \Gamma(x+u)\, dx$$

ustanoven byl ve tvaru zakončeném od Raabea.*) Tento obsažen jest jako zvláštní případ v integrálu

$$\Phi(u) = \int_0^1 \log \Gamma(x+u) \cos 2m\pi\,(x+u)\, dx,$$

jejž vyčíslíme pro celistvá m. Patrně máme

$$\Phi(u) = \int_u^{u+1} \log \Gamma(x)\,.\cos 2mx\pi dx$$

a tedy

$$\frac{d\Phi}{du} = \Big[\log \Gamma(u+1) - \log \Gamma(u)\Big] \cos 2mu\pi$$

čili dle vzorce (2) v odst. 1.

$$\frac{d}{du}\,\Phi(u) = \log u\,.\cos 2mu\pi.$$

Odtud máme částečnou integrací

$$\Phi(u) = A + \frac{1}{2m\pi}\left(\sin 2mu\pi\,.\log u - \int_0^{2mu\pi} \frac{\sin v}{v}\, dv\right),$$

*) Jednoduchý jeho důkaz podán byl v autorově článku: Démonstration élémentaire d'une formule de Raabe. Giornale di Matematiche diretto dal Professore G. Battaglini, vol. 26. (Níže je tento důkaz reprodukován.) Zároveň byl otištěn v Jornal de Sc. math. e astr. vol. IX., p. 21.

kde A jest integrační stálá, která v našem případě má hodnotu zcela určitou, již obdržíme volíce $u = 0$; bude

$$A = \Phi(0) = \int_0^1 \log \Gamma(x) \cos 2mx\pi dx.$$

Jedná se tedy pouze o tento zvláštní integrál. Substitucí $x = 1 - x'$ obdržíme

$$A = \int_0^1 \log \Gamma(1 - x) \cos 2mx\pi dx.$$

Z posledních dvou vzorců máme sečtením

$$2A = \int_0^1 \log \left[\Gamma(x)\, \Gamma(1 - x)\right] . \cos 2mx\pi dx$$

aneb dle základního vzorce (I)

$$2A = \int_0^1 \log \frac{\pi}{\sin x\pi} \cos 2mx\pi dx = -\int_0^1 \log \sin x\pi . \cos 2mx\pi dx.$$

Částečnou integrací vznikne odtud

$$2A = \frac{1}{2m} \int_0^1 \frac{\cos x\pi \,.\, \sin 2mx\pi}{\sin x\pi} dx.$$

Avšak

$$\frac{\cos x\pi \,.\, \sin 2mx\pi}{\sin x\pi} = 1 + \cos 2mx\pi + 2\sum_{\nu=1}^{m-1} \cos 2\nu x\pi,$$

z čehož plyne

$$2A = \frac{1}{2m}$$

a tedy výsledný vzorec

$$\text{(VII)} \qquad \int_u^{u+1} \log \Gamma(x) . \cos 2mx\pi dx$$

$$\frac{1}{2m\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \sin 2mu\pi . \log u - \int_0^{2mu\pi} \frac{\sin v}{v} dv\right).$$

V případě $m=0$ tento vzorec pozbývá významu, i dlužno jej vyšetřovati zvlášť. Tu bude

$$\frac{d\Phi(u)}{du}=\log u$$

a tedy

$$\Phi=A+u(\log u-1),$$

kde

$$A=\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx,$$

a podobně jako předešle

$$2A=\int_0^1 \log[\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)]\,x=\log\pi-\int_0^1 \log\sin\pi x dx.$$

Abychom určili poslední integrál

$$B=\int_0^1 \log\sin\pi x dx,$$

uvažme, že tu patrně

$$\frac{1}{2}\pi B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin u\,du,$$

a zaveďme $v=\frac{\pi}{2}-u$, čímž máme

$$\frac{1}{2}\pi B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos v dv,$$

takže vznikne sečtením

$$\pi B=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u\,.\cos u)\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2u\right)du$$

t. j.

$$\pi B=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin v\,dv-\frac{\pi}{2}\log 2.$$

Integrál v pravo má hodnotu πB a tedy vznikne odtud

$$B = -\log 2,$$

takže máme posléz

$$A = \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Integrál Raabeův má tudíž hodnotu

$$\int_u^{u+1} \log \Gamma(x)\, dx = u \log u - u + \log \sqrt{2\pi}. \tag{VII^a}$$

Levá strana rovná se jedné z hodnot, jež obdrží funkce $\log \Gamma(x)$ v mezeře $(u \ldots u+1)$ a tedy je přirozeno, že pravá strana liší se od sblíženého (asymptotického) výrazu pro $\log \Gamma(u)$ (udaného v VI) pouze členy, jež pro $u = \infty$ jsou nekonečny stupně nižšího.

11.

Naznačivše takto některé z nejznámějších vlastností funkce gamma, obrátíme se konečně k rozvoji funkce $Q(a)$ majícímu s udaným výše vozvojem Hermiteovým jistou podobnosť.

Z definice

$$Q(1-a) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{-a} dx$$

plyne

$$\frac{dQ(1-a)}{d\omega} = -e^{-\omega} \omega^{-a};$$

avšak

$$\omega^{-a} \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-\omega x} x^{a-1} dx, \quad (real.\, a > 0)$$

takže

$$\Gamma(a) \frac{dQ(1-a)}{d\omega} = -\int_0^\infty e^{-\omega(x+1)} x^{a-1} dx.$$

Integrací obdržíme pak

$$\Gamma(a)\, Q(1-a) = \int_0^\infty e^{-\omega(x+1)} x^{a-1} \frac{dx}{x+1} + C,$$

kde C nezávisí na ω. Roste-li ω do $+\infty$, blíží se levá strana a integrál v pravo mezi 0, takže musí $C=0$; bude tedy

$$(1)\qquad \Gamma(a)\, Q(1-a)=\int_0^\infty e^{-\omega(x+1)}\frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}.$$

Jelikož

$$\int_0^u e^{t(x+1)}\,dt=\frac{e^{u(x+1)}-1}{x+1},$$

obdržíme z (1)

$$(2)\qquad \Gamma(a)\, Q(1-a)=\int_0^\infty \frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a-1}dx}{e^{u(x+1)}-1}\int_0^u e^{t(x+1)}dt.$$

Znamenáme-li

$$(3)\qquad \Phi(n)=\int_0^u e^t t^{n-1}dt,$$

bude

$$\int_0^u e^{t(x+1)}\,dt>\sum_{\nu=1}^{n}\Phi(\nu)\frac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

a tedy dle (2) pro kladná realná a

$$\Gamma(a)\, Q(1-a)>\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Phi(\nu)}{(\nu-1)!}\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a+\nu-2}dx}{e^{u(x+1)}-1}.$$

Součet v pravo sestává z členů kladných a je menší než veličina $\Gamma(a)\,Q(1-a)$ nezávislá na n; bude tedy řada vzniklá z pravé strany volbou $n=\infty$ konvergentní, takže pak

$$\Gamma(a)\, Q(1-a)\geqq\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Phi(\nu)}{(\nu-1)!}\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a+\nu-2}\,dx}{e^{u(x+1)}-1}.$$

Poslední součet je však větší než řada

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Phi(\nu)}{(\nu-1)!}\int_0^N\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a+\nu-2}dx}{e^{u(x+1)}-1}=\int_0^N e^{-\omega(x+1)}\frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}$$

kteráž veličina liší se od $\Gamma(a)\,Q(1-a)$ tak málo jak libo, je-li N dostatečně veliké. Z toho plyne identita

$$\Gamma(a)Q(1-a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Phi(\nu)}{(\nu-1)!}\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a+\nu-2}\,dx}{e^{u(x+1)}-1}.$$

Snadno se dokáže správnosť rozvoje

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a-1}dx}{e^{u(x-1)}-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_0^\infty e^{-(\omega+na)(x+1)}x^{a-1}\,dx,$$

a tedy

$$\int_0^\infty\frac{e^{-\omega(x+1)}x^{a-1}\,dx}{e^{u(x+1)}-1}=\Gamma(a)\Psi(-a),\tag{5}$$

kde

$$\Psi(a)=\sum_{n=1}^{\infty}(\omega+nu)^a e^{-\omega-nu},\tag{6}$$

takže pak

$$Q(1-a)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Gamma(a+\nu-1)}{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(\nu)}\Phi(\nu)\Psi(-a-\nu+1),$$

aneb nahradíme-li a veličinou $1-a$

$$Q(a)=\sum_{a=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\binom{a-1}{\nu-1}\Phi(\nu)\Psi(a-\nu),\tag{7}$$

kterážto relace dokázána pro realná a algebraicky menší než 1.

Tento rozvoj funkce $Q(a)$ má jistou podobnosť s řadou danou p. Hermitem, o níž jsme výše jednali, a kterou lze podobným způsobem odvoditi, o čemž pomlčíme, zabývajíce se dále řadou (7).

Pišme (7) ve tvaru

$$\frac{1}{\Gamma(1-a)}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(\nu)}\Phi(\nu)\Psi(a-\nu).$$

Pro veliká ν jest sblížené

$$\frac{\Gamma(\nu - a)}{\Gamma(\nu + n)} = \nu^{-a-n}.$$

Z toho soudíme na konvergenci řady

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu - a)}{\Gamma(\nu + n)} \nu^n \Phi(\nu) \Psi(a - \nu),$$

a tedy též na konvergenci řady

$$(\beta) \qquad \sum \frac{\Gamma(\overline{\nu + n} - \overline{a + n})}{\Gamma(\nu + n)} \Phi(\nu + n)\, \Psi(\overline{a + n} - \overline{\nu + n}).$$

Neboť patrně platí pro $u < 1$ nerovnosť

$$\Phi(\nu + n) < \Phi(\nu).$$

Pro $u > 1$ máme

$$\Phi\,(\nu + n) < e^u\, u^{n+\nu-1}$$

$$\Phi(\nu) > \frac{u^\nu}{\nu},$$

tedy

$$\Phi(\nu + n) < e^n u^{n-1} \,.\, \nu\Phi(\nu),$$

takže pak *vždy*

$$\Phi(\nu + n) < const.\ \nu\Phi(\nu)$$

a tedy jsou členové řady (β) menší než příslušní členové řady (α) násobení jistým společným činitelem.

Klademe-li pak $b = a + n$, plyne z konvergence řady (β) konvergence následující řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m - b)}{\Gamma(m)} \Phi(m) \Psi(b - m),$$

t. j. *řada (7) konverguje pro všecka realná a.*

Buď a veličina komplexní, α její realná část. Pak bude dle (6)

$$|\,\Psi(a - \nu)\,| \leqq \Psi(\alpha - \nu);$$

dále jest pro veliká ν sblíženě

$$\left|\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(\nu)}\right| = |\nu^{-a}| = \nu^{-\alpha} = \frac{\Gamma(\nu-\alpha)}{\Gamma(\nu)}$$

a tedy pro dosti veliká ν bude absolutní hodnota veličiny

$$\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(\nu)}\,\Phi(\nu)\Psi(a-\nu)$$

menší než dvojnásobek veličiny

$$\frac{\Gamma(\nu-\alpha)}{\Gamma(\nu)}\,\Phi(\nu)\Psi(a-\nu)$$

a odtud soudíme, že řada (7) konverguje pro všecka a (realná i komplexní) a sice *stejnoměrně*. *Rovnice (7) platí tedy pro všecka a bez rozdílu.* Zároveň vidíme, že platí také pro všecka kladná u, ω.

Těmito vlastnostmi liší se náš rozvoj (7) od výsledku Hermiteova.

Nákladem královské české společnosti nauk — Tiskem dra. Edv. Grégra v Praze 18[illegible].