Matyáš Lerch

Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Funktionen

J. Reine Angew. Math. 103 (1888),126–138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501654

Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen.

(Von Herrn *Mathias Lerch* in Prag.)

In dieser Note wollen wir die Reihen von der Form

$$(1.)\qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x$$

in Bezug auf die Existenz eines bestimmten endlichen Differentialquotienten untersuchen, wobei

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots\quad a_\nu,\quad \ldots$$

ganze positive Zahlen sind, von denen vorausgesetzt wird, dass es eine unendliche Reihe von einander verschiedener ganzer Zahlen

$$b_1,\quad b_2,\quad b_3,\quad \ldots\quad b_\nu,\quad \ldots$$

giebt, für welche die Quotienten $\frac{a_{\nu+\varkappa}}{b_\nu}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$ ganze Zahlen sind, während $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ gebrochen sein kann. Die c_ν sollen Glieder einer absolut convergirenden Reihe ausmachen.

Es wird sich zeigen, dass es unter den Functionen (1.) unendlich viele giebt, die an allen Stellen von der Form $x = \frac{a}{b_m}$ (a bedeutet eine ganze Zahl) keinen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Nun sind die eben erwähnten Stellen in jedem noch so kleinen Intervalle des Argumentgebietes in unendlicher Anzahl vorhanden, sodass wir es hier also mit Functionen zu thun haben, welche mit den mit Hülfe des *Hankel*schen Condensationsprincips construirten Functionen eine analoge Eigenschaft gemein haben, jedoch sind sie durch einfachere Ausdrücke dargestellt, weshalb sie eine sehr elementare Behandlung zulassen.

Unter den Reihen von der Form (1.) giebt es auch solche, die an keiner Stelle überhaupt einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, namentlich die von Herrn *Weierstrass* aufgestellte *) und von Herrn *Chr. Wiener* **) ausführlich untersuchte Function, die sich hier als ein ganz specieller Fall einer unten anzugebenden Reihe ergiebt.

1. Setzt man in die Reihe (1.) den Werth

$$x = x_0 + h, \quad x_0 = \frac{a}{b_m}$$

ein, wobei a eine ganze Zahl bedeuten soll, so erhält man:

$$f(x_0+h) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \cos a_\nu \pi (x_0+h) + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{a a_\nu}{b_m}} c_\nu \cos a_\nu h\pi$$

und für $h=0$:

$$f(x_0) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \cos a_\nu \pi x_0 + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{a a_\nu}{b_m}} c_\nu,$$

sodass also:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi (x_0+h) - \cos a_\nu \pi x_0}{h} + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{a a_\nu}{b_m}} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi h - 1}{h}.$$

Nun ist klar, dass sich bei unendlich klein werdendem h die erste Summe rechts dem ganz bestimmten Grenzwerthe

$$-\pi \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x_0$$

nähert, und es nähert sich also der Differenzenquotient $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ einer bestimmten Grösse oder nicht, je nachdem die Reihe

$$(2.) \qquad \sum_{\nu=m+1}^{\infty} (-1)^{\frac{a a_\nu}{b_m}} c_\nu \frac{\cos a_\nu h\pi - 1}{h}$$

für unendlich kleine h einen endlichen Grenzwerth besitzt oder nicht.

Sind nun die Quotienten $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ von einem bestimmten an immer gleicher Parität, so zerfällt die Reihe (2.) sowohl für gerade als auch für

---

*) Brief an Herrn *P. du Bois-Reymond*. Dieses Journal Bd. 79. — Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin, Springer, 1886, p. 97.

**) Dieses Journal Bd. 90. — In der Functionenlehre des Herrn *Weierstrass* findet sich auf S. 100 eine Bemerkung, aus der man schliessen könnte, dass Herr *Wiener* das *Weierstrass*sche Resultat für unrichtig halte. Diese Bemerkung bezieht sich indes nicht auf Herrn *Wiener*; denn derselbe bemerkt im citirten Aufsatze (p. 247), dass die Ergebnisse des Herrn *Weierstrass* und die seinigen zugleich stattfinden, wenn man sich auf den von Herrn *Weierstrass* doch allein untersuchten Fall (nämlich $ab > \frac{3}{2}\pi + 1$) beschränkt.

ungerade a in zwei Theile, von welchen der eine aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, während der andere eine unendliche Reihe ist, die bis auf das Vorzeichen mit dem Reste der Reihe

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi h - 1}{h}$$

übereinstimmt. Der erste, endliche Bestandtheil besitzt für $\lim h = 0$ immer einen endlichen Grenzwerth, und der zweite nähert sich einer bestimmten Grösse dann und nur dann, wenn der Grenzwerth

$$\lim_{h=0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

existirt, d. h. wenn die Function $f(x)$ an der Stelle $x=0$ einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt.

Giebt es aber unter den Zahlen $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ unendlich viele gerade und ebenso ungerade, so hat man für a nur eine gerade ganze Zahl zu wählen, um zu demselben Resultate zu gelangen. Also:

„*Die durch die Reihe* (1.) *dargestellte Function der reellen Veränderlichen x verhält sich in Bezug auf die Existenz oder Nichtexistenz eines bestimmten Differentialquotienten an den Stellen $x = \frac{a}{b_m}$, unter a eine gerade ganze Zahl, und wenn es unter den Zahlen $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu > m)$ nur eine endliche Anzahl gerader oder ungerader giebt, eine beliebige ganze Zahl verstanden, in derselben Weise, wie an der Stelle $x = 0$.*"

Nun ist offenbar

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -2 \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a_\nu \pi x}{x},$$

also

$$\frac{f(-x)-f(0)}{-x} = -\frac{f(x)-f(0)}{x}; \tag{3.}$$

besitzt aber die Function $f(x)$ an der Stelle $x=0$ einen endlichen Differentialquotienten, so ist derselbe gleich

$$\lim_{x=0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x=0} \frac{f(-x)-f(0)}{-x},$$

und fällt nach (3.) mit seinem entgegengesetzten Werthe zusammen, und ist deshalb gleich Null.

Ist also die Bedingung

$$(3^a.)\qquad \lim_{x=0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = 0$$

nicht erfüllt, so hat die Function $f(x)$ an der Stelle $x=0$ keinen bestimmten endlichen Differentialquotienten.

Wendet man dies auf den Rest der Reihe (2.) an, so erhält man den Satz, dass

„wenn die Function $f(x)$ an der betrachteten Stelle $x_0=\frac{a}{b_m}$ einen bestimmten Differentialquotienten besitzt, derselbe durch die Formel

$$f'(x_0) = -\sum_{\nu=0}^{m}\pi a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x_0$$

dargestellt wird."

Mit Ausnahme des hier auszuschliessenden Falles der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu c_\nu \sin a_\nu \pi x$$

ist uns kein allgemeines Criterium für die Geltung der Gleichung ($3^a.$) bekannt. In manchen Fällen gelingt es aber, die Unzulässigkeit der Gleichung ($3^a.$) in der Weise darzulegen, dass man an die Stelle des stetigen Grenzüberganges $\lim x=0$ einen unstetigen, durch eine unendliche Folge von schliesslich unendlich klein werdenden Grössen x' erzeugten Grenzübergang $\lim x'=0$ treten lässt.

Setzt man z. B.

$$x' = \frac{k}{b_r},$$

so folgt:

$$(4.)\qquad \frac{f(x')-f(0)}{x'} = -\frac{2b_r}{k}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \sin^2\frac{a_\nu k\pi}{2b_r}.$$

Giebt es nun unter den Quotienten $\frac{a_\nu}{2b_r}$ ($\nu=0,\ 1,\ 2,\ \dots\ \infty$) bei unendlich vielen b_r auch solche, deren absolut kleinsten Reste unter eine feste Grenze α nicht herabsinken, sie mögen dem Werthe $\nu=\nu'$ entsprechen, und sind die c_ν sämmtlich positiv und so beschaffen, dass bei allen den betrachteten b_r unter den betreffenden Grössen $b_r c_{\nu'}$ immer einige vorhanden sind, die für $r=\infty$ nicht unendlich klein werden, so darf die rechte Seite von (4.) nicht unendlich abnehmen für sämmtliche unendlich grossen Werthe von r, und es wird also der Differenzenquotient $\frac{f(x')-f(0)}{x'}$ zugleich mit x' nicht unendlich klein werden können, wenn k ungerade ist.

Die hier angeführten Bedingungen werden z. B. erfüllt sein, wenn man

$$a_\nu = \nu!, \quad b_r = (r+1)!$$

setzt, und zwar ist hier $\nu' = r+1$, da

$$\frac{a_{\nu'}}{2b_r} = \frac{1}{2}$$

ist. Also hat man den Satz:

„Giebt es unter den positiv vorausgesetzten Grössen α_ν unendlich viele, die unter eine gewisse Grenze $\varrho > 0$ nicht herabsinken, so hat die absolut convergent vorausgesetzte Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\nu!} \cos \nu! \pi x$$

für keinen rationalen Werth von x einen bestimmten Differentialquotienten.“

Denn der Satz gilt von der Stelle $x = 0$, und da die Quotienten $\frac{a_\nu}{b_m}$ $(\nu \geqq m+3)$ sämmtlich gerade sind, so gilt er auch für alle Werthe von der Form $x = \frac{a}{m!}$, auf die sich alle rationalen Brüche bringen lassen.

Analoge Beispiele sind leicht zu bilden.

2. Minder einfach ist die Untersuchung der Reihe (1.) in Bezug auf ihre Differentiirbarkeit an einer beliebigen Stelle x; wir wollen uns hier auf einen einfachen Fall beschränken. Wir nehmen nämlich a_ν in der Form

$$(1.) \qquad a_\nu = p_0 p_1 p_2 \dots p_\nu$$

an, unter den p positive ungerade Zahlen verstanden, die von einander verschieden oder theilweise oder auch sämmtlich einander gleich sind, jedoch mit Ausnahme der ersten grösser als 1 sein müssen. Wir bilden dann die Reihe

$$(2.) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x,$$

in welcher die c_ν nicht negative Grössen sind, die eine endliche Summe besitzen, und benutzen zu ihrer Untersuchung die von Herrn *Weierstrass* in seinem oben erwähnten Briefe an Herrn *P. du Bois-Reymond* zuerst dargelegte Methode.

Es sei x eine gegebene reelle Grösse; dann giebt es eine ganze Zahl α_m, für welche die Differenz

$$a_m x - \alpha_m = x_{m+1}$$

die Ungleichheit befriedigt:

$$-\tfrac{1}{2} < x_{m+1} \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Man erhält so x in der Form

$$x = \frac{\alpha_m + x_{m+1}}{a_m},$$

und wenn man

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a_m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a_m}$$

setzt, so folgt

$$x' - x = -\frac{1 + x_{m+1}}{a_m}, \quad x'' - x = \frac{1 - x_{m+1}}{a_m},$$

sodass $x' - x$ negativ, $x'' - x$ positiv ist, und diese beiden Grössen für $m = \infty$ unendlich klein werden. Nun ist offenbar

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \pi \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{\pi a_\nu (x' - x)} + \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{x' - x}.$$

Da aber für $\nu \geqq m$:

$$a_\nu x' = \frac{a_\nu(\alpha_m - 1)}{a_m}$$

eine ganze Zahl ist, und zwar von derselben Parität wie $(\alpha_m - 1)$, und da ausserdem

$$a_\nu x = \frac{a_\nu}{a_m} \alpha_m + \frac{a_\nu x_{m+1}}{a_m},$$

sodass für $\nu \geqq m$:

$$\cos a_\nu \pi x' = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos a_\nu \pi x = (-1)^{\alpha_m} \cos \frac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m},$$

so folgt, da ausserdem

$$x' - x = -\frac{1 + x_{m+1}}{a_m},$$

offenbar die Formel

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \pi \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x' - \cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi (x' - x)}$$

$$+ (-1)^{\alpha_m} \frac{a_m}{1 + x_{m+1}} \sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu \left(1 + \cos \frac{a_\nu \pi x_{m+1}}{a_m}\right).$$

Ganz analog findet man:

$$\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} = \pi\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu \frac{\cos a_\nu \pi x''-\cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi(x''-x)}$$
$$-(-1)^{a_m}\frac{a_m}{1-x_{m+1}}\sum_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\left(1+\cos\frac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m}\right),$$

und daher kommt

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}-\dfrac{f(x'')-f(x)}{x''-x} \\ = \pi\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu\left(\dfrac{\cos a_\nu \pi x'-\cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi(x'-x)}-\dfrac{\cos a_\nu \pi x''-\cos a_\nu \pi x}{a_\nu \pi(x''-x)}\right) \\ +2(-1)^{a_m}\dfrac{a_m}{1-x_{m+1}^2}\sum\limits_{\nu=m}^{\infty} c_\nu\left(1+\cos\dfrac{\pi a_\nu x_{m+1}}{a_m}\right). \end{cases}$$

Der erste Bestandtheil rechts ist offenbar von der Form

$$(\alpha.)\quad \pi\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu(\sin a_\nu \pi\xi''-\sin a_\nu \pi\xi'),$$

wobei ξ', ξ'' eine bestimmte Grösse innerhalb des Intervalles $(x\dots x')$, resp. $(x\dots x'')$ bezeichnet. Nun ist offenbar der absolute Betrag der Grösse $(\alpha.)$ nie grösser als

$$\pi\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu\left|\frac{\sin a_\nu \pi\xi''-\sin a_\nu \pi\xi'}{a_\nu \pi(\xi''-\xi')}\right|\cdot a_\nu \pi(\xi''-\xi') \leqq \pi^2\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu(\xi''-\xi'),$$

und da

$$\xi''-\xi' \leqq x''-x' = \frac{2}{a_m},$$

so ist die Grösse $(\alpha.)$ dem absoluten Betrage nach nie grösser als

$$(\alpha^*.)\quad \frac{2\pi^2}{a_m}\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu.$$

Dagegen ist der zweite Bestandtheil der rechten Seite in (3.) seinem absoluten Betrage nach nicht kleiner als

$$\frac{2a_m c_m}{1-x_{m+1}^2} \geqq 2a_m c_m,$$

weil die dort vorkommende Reihe aus positiven Gliedern besteht, von denen das erste, nämlich $c_m(1+\cos\pi x_{m+1})$, nicht kleiner als c_m ist, da $|x_{m+1}| \leqq \frac{1}{2}$ angenommen wurde.

Daher kann man schreiben:

$$(4.)\quad \frac{f(x')-f(x)}{x'-x}-\frac{f(x'')-f(x)}{x''-x} = \frac{2\pi^2}{a_m}\vartheta\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu+2(-1)^{a_m} a_m c_m \eta,$$

wobei ϑ ein positiver oder negativer echter Bruch ist, und η eine positive nie unter die Einheit herabsinkende Grösse bedeutet.

Besitzt die Function $f(x)$ an der Stelle x einen bestimmten endlichen Differentialquotienten, so muss die linke Seite von (4.) für $m = \infty$ unendlich klein werden. Bestimmt man die c_ν so, dass $a_m c_m$ und zu gleicher Zeit die Differenz

$$(\beta.)\qquad a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m}\sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu,$$

die positiv vorausgesetzt wird, für $m = \infty$ nicht unendlich klein wird, so wird die Grösse (4.) nicht für unendlich grosse Werthe von m unendlich klein, und die Function $f(x)$ besitzt dann an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten.

Ist nun

$$d_1,\quad d_2,\quad d_3,\quad \ldots\quad d_m,\quad \ldots$$

eine beliebige Folge von positiven Grössen, von denen unendlich viele unter eine bestimmte Grenze d nicht hinabsinken, so kann man die c_ν so bestimmen, dass die Grösse $(\beta.)$ gleich d_m wird, und es wird dann die betreffende Function $f(x)$ zu den nicht differentiirbaren gehören. Um dies zu erreichen, hat man bloss

$$a_\nu^2 c_\nu = u_\nu,\quad a_\nu d_\nu = v_\nu$$

zu setzen und die u_ν aus den v_ν mit Hülfe der Recursionsformel

$$(\beta^*.)\qquad u_m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} u_\nu = v_m$$

zu berechnen.

Hier möge noch ein dem *Weierstrass*schen ähnliches Verfahren zur Aufstellung eines speciellen Systems der c_ν Platz finden. Setzt man nämlich

$$a_\nu^2 c_\nu = r^\nu,$$

so ist die Grösse $(\beta.)$ gleich

$$\frac{1}{a_m}\Big(r^m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} r^\nu\Big) = \frac{r^m}{a_m}\Big(1-\frac{\pi^2}{r-1}\Big)+\frac{\pi^2}{a_m(r-1)},$$

und sie wird immer positiv und für $m = \infty$ nicht unendlich klein, wenn

$$(\gamma.)\qquad 1-\frac{\pi^2}{r-1}$$

positiv ist und $\frac{r^m}{a_m}$ für $m = \infty$ nicht verschwindet. Die letztere Bedingung wird aber nur bei speciellen Werthsystemen der a_ν erfüllbar sein. Dies ist z. B. der Fall, wenn die p_ν sich wiederholen, sodass sie nur eine endliche

Anzahl verschiedener Werthe erhalten. Ist die grösste unter den Zahlen p_ν gleich p, so ist

$$\frac{r^m}{a_m} \geqq \frac{r^m}{p^{m+1}},$$

und die rechte Seite wird dann und nur dann nicht unendlich klein für $m=\infty$, wenn

$$r \geqq p$$

ist. Wenn also in dem letzterwähnten Falle $r \geqq p$ und zugleich der Bedingung (γ.) zufolge $r > 1+\pi^2$ ist, so hat die Function $f(x)$, in welcher

$$c_\nu = \frac{r^\nu}{a_\nu^2},$$

an keiner Stelle einen endlichen Differentialquotienten. Die Convergenzbedingung für die betrachtete Reihe stellt wohl für die Grösse r eine obere Grenze auf.

So wird z. B. die *Weierstrass*sche Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos a^\nu \pi x,$$

in der $b<1$, a eine ungerade ganze Zahl ist, an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten haben können, wenn die zwei Bedingungen

$$ab \geqq 1, \quad a^2 b > 1+\pi^2$$

erfüllt sind. Dieses Criterium ist aber umfassender als das von Herrn *Weierstrass* aufgestellte, nämlich die Erfüllung der Ungleichheit:

$$ab > 1+\tfrac{3}{2}\pi.$$

Um ein specielles Werthsystem der c_ν auch bei irgend welchen p_ν zu erhalten, wollen wir dies durch den Ansatz

$$a_\nu c_\nu = r^\nu$$

zu bewerkstelligen versuchen.

Da vermöge der Bedeutung der a_ν die Ungleichheit

$$a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu > a_m c_m - \frac{\pi^2}{p_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu c_\nu$$

stattfindet, so erhält man für die Nichtdifferentiirbarkeit von $f(x)$ eine hinreichende Bedingung, wenn man r so bestimmt, dass die Grösse

$$(\delta.) \qquad r^m - \frac{\pi^2}{p_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} r^\nu = r^m\left(1-\frac{\pi^2}{p_m(r-1)}\right)+\frac{\pi^2}{p_m(r-1)}$$

positiv ist und für $m=\infty$ nicht verschwindet.

In dem allgemeinen Falle, wo die p_ν nicht unter einer festen Grenze liegen, wird diese Bedingung dadurch erfüllt, dass man $r > 1$ voraussetzt. Also haben wir den Satz:

„*Sind*

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots$$

ungerade ganze Zahlen, die nicht unter einer festen Grenze liegen, und ist $r > 1$ *eine positive Grösse, so wird die absolut convergent vorausgesetzte Reihe*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r^\nu}{a_\nu} \cos a_\nu \pi x, \quad a_\nu = p_0 p_1 p_2 \ldots p_\nu$$

eine Function darstellen, die an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten besitzt.“ —

Schliesslich betrachten wir den Fall, wo die p_ν so gewählt werden, dass für alle ν:

$$a_\nu \geqq a_{\nu-1}^2$$

ist. Dann gilt die Ungleichung

$$a_m c_m - \frac{\pi^2}{a_m} \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu^2 c_\nu > a_m c_m - \pi^2 \sum_{\nu=0}^{m-1} c_\nu;$$

wir setzen $a_m c_m = d_m$ und bekommen folgendes Resultat:

„*Giebt es unter den positiven Grössen*

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \quad \ldots \quad d_m, \quad \ldots$$

unendlich viele, die oberhalb einer festen Grenze ϱ *liegen, und convergirt die Reihe*

$$(\varepsilon.) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{a_\nu},$$

so wird die Function

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_\nu}{a_\nu} \cos a_\nu \pi x,$$

falls jedes a_ν *durch* $a_{\nu-1}$ *theilbar ist und unter* $a_{\nu-1}^2$ *nicht herabsinkt, für keinen Werth von* x *einen bestimmten Differentialquotienten haben können.*“

Denn der vorausgesetzten Convergenz der Reihe $(\varepsilon.)$ nach kann man eine ganze Zahl n so wählen, dass für $\frac{d_\nu}{a_\nu} = c_\nu$

$$\pi^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu < \tfrac{1}{2}\varrho.$$

Ausserdem wird man der vorausgesetzten Beschaffenheit der Grössen d gemäss unendlich viele ganze Zahlen m so angeben können, dass die Ungleichung

$$a_{n+m}c_{n+m} = d_{n+m} > \varrho$$

stattfindet; es wird hier also für unendlich viele Werthe von m

$$a_{n+m}c_{n+m} - \pi^2 \sum_{\nu=n}^{n+m-1} c_\nu > \tfrac{1}{2}\varrho$$

sein, und also für unser specielles Werthsystem der a_ν um so mehr

$$a_{n+m}c_{n+m} - \frac{\pi^2}{a_{n+m}} \sum_{\nu=n}^{n+m-1} a_\nu^2 c_\nu > \tfrac{1}{2}\varrho,$$

woraus folgt, dass die Reihe

$$(\vartheta.) \qquad \sum_{\nu=n}^{\infty} c_\nu \cos a_\nu \pi x$$

an keiner Stelle einen bestimmten endlichen Differentialquotienten haben kann. Dasselbe muss aber bei der zuletzt betrachteten Reihe $f(x)$ der Fall sein, da sie sich von der Reihe $(\vartheta.)$ nur um eine differentiirbare Function unterscheidet.

3. Schliesslich mag hier kurz eine Reihe erwähnt werden, welche Ableitungen aller Ordnungen besitzt, und doch nie nach ganzen positiven Potenzen von $(x-x_0)$ entwickelt werden kann, was auch x_0 sei.

Solche Reihen sind zum ersten Male von Herrn ***P. du Bois-Reymond*** im 22. Bande der ***Math. Annalen*** aufgestellt worden; da sich aber die von uns hier zu behandelnde Reihe durch eine einfache Gestalt auszeichnet, so dürfte sie wohl einige Leser interessiren.

Es ist dies die Reihe

$$(1.) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!},$$

unter a eine ungerade ganze Zahl verstanden. Sie convergirt offenbar ebenso wie alle ihre Ableitungen*) gleichmässig, und deshalb ist sie nach einem bekannten Satze gliedweise differentiirbar. Bedeutet b eine ungerade ganze Zahl, und schreibt man $x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$, so bekommt man für die Ableitungen von $f(x)$ an der Stelle x_0 die Formeln:

*) Unter „Ableitung" ist die durch gliedweise Differentiation entstandene Reihe verstanden.

$$(-1)^k f^{(2k)}(x_0) = \varphi(a^{2k}) - e^{a^{2k}},$$
$$(-1)^{k+1} f^{(2k+1)}(x_0) = \psi(a^{2k+1}),$$

wo der Kürze halber

$$\varphi(a^{2k}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{2kn}}{n!}(\cos a^{n-m} b\pi - 1),$$
$$\psi(a^{2k+1}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^{(2k+1)n}}{n!} \sin a^{n-m} b\pi$$

gesetzt worden ist.

Die *Taylor*sche Reihe für die Function $f(x)$ setzt sich nun aus folgenden drei Reihen zusammen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varphi(a^{2k}) \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \psi(a^{2k+1}) \frac{(x-x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{a^{2k}} \frac{(x-x_0)^{2k}}{(2k)!}.$$

Die beiden ersten dieser drei Reihen sind absolut convergent, wie man unmittelbar sieht, und von der dritten soll gezeigt werden, dass sie divergirt, wie klein auch $(x-x_0)$ sein mag. Setzen wir zu diesem Zwecke

$$|x-x_0| = \frac{1}{y}$$

und nehmen $y > 1$ an, so ist der Ausdruck

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!} > \frac{e^{a^\nu}}{(y\nu)^\nu} = u_\nu$$

für unendlich grosse ν zu untersuchen. Nun ist aber für hinlänglich grosse Werthe von ν:

$$u_\nu = e^{a^\nu - \nu \log \nu y} > e^{a^\nu - \nu^2},$$

und da die letztere Grösse schliesslich jede Grenze übertrifft, so gilt dies um so mehr von der Grösse

$$\frac{e^{a^\nu}}{y^\nu \nu!},$$

also auch von den Gliedern der dritten Reihe, welche deshalb divergirt, woraus sich die Folgerung ergiebt, dass die Function $f(x)$ an keiner Stelle von der Form

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$$

(b ungerade) eine Potenzentwickelung zulässt. Da aber die eben erwähnten Stellen in jedem noch so kleinen Intervalle vorkommen, so wird $f(x)$ überhaupt nie durch eine Potenzreihe dargestellt werden können, da sie sich dann auf gewissen Stellen von der Form

$$x_0 = \frac{b\pi}{a^m}$$

analytisch regulär verhalten würde, was unserem letzteren Ergebnisse widerspricht. Hieraus kann man aber nicht schliessen, dass die *Taylor*sche Reihe für $f(x)$ auch für diejenigen x_0, die nicht von der Form $\frac{b\pi}{a^m}$ sind, divergiren müsste, sondern es folgt hieraus nur, dass der Rest der *Taylor*schen Reihenentwickelung nicht unendlich klein wird, ebenso wie dies bei der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ an der Stelle $x_0 = 0$ der Fall ist.

Weinberge in Böhmen, Dezember 1886.