Matyáš Lerch

Théorèmes d'Arithmétique

Bull. Sci. Math., II. Sér. 12 (1888), 121–126

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501652

tique par rapport à tous les points de plusieurs droites; car alors la surface de révolution transformée pourra être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères S coupant orthogonalement toutes les sphères T qui ont même plan radical. Il se peut que ces dernières soient concentriques, et alors la surface de révolution sera un cône. Sinon cette surface sera anallagmatique par rapport à tous leurs centres, qui devront par suite être situés sur l'axe; ce sera donc un tore. Dans les deux cas la surface primitive sera la cyclide de Dupin, laquelle est en effet anallagmatique par rapport à tous les points de deux droites rectangulaires, ainsi que le montre M. Fouret dans un article inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Enfin des considérations analogues aux précédentes permettent de voir que la proposition de M. Fouret relative aux courbes planes (à savoir qu'elles ne peuvent pas admettre pour pôles d'inversion les points d'une ligne) s'étend aux courbes de l'espace.

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. MATHIAS LERCH.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.)

En partant de votre formule, $\sum_{\alpha=0}^{n-1} \mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{n}\right)=\mathrm{E}(nx)$, et prenant $x=\frac{m}{n}$, où m est entier, j'en déduis l'équation

$$\sum_{n=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{n-1}\mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right)=ma, \tag{1}$$

dont je vais transformer le premier membre. Celui-ci étant égal à la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1}\sum_{n=\alpha+1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right),$$

et la somme $\sum\limits_{n=\alpha+1}^{a} \mathrm{E}\left(\frac{m+\alpha}{n}\right)$ pouvant s'exprimer par la suivante

$$\sum_{k=1}^{m} [\psi(k+\alpha, \alpha) - \psi(k+\alpha, a)],$$

dans laquelle $\psi(p, q)$ représente comme dans ma Note antérieure le nombre des diviseurs de p supérieurs à q, l'équation (1) deviendra

$$\sum_{\alpha=0}^{a-1} \sum_{k=1}^{m} [\psi(k+\alpha, \alpha) - \psi(k+\alpha, a)] = ma,$$

et l'on en déduit la suivante

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha, \alpha) - \psi(m+\alpha, a)] = a,$$

qui exprime une nouvelle propriété de la fonction numérique $\psi(p, q)$.

Je vais généraliser cette formule en cherchant la valeur de la somme

$$\mathrm{S}_m = \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m+\alpha n, \alpha) - \psi(m+\alpha n, a)].$$

Je remarque d'abord que la somme

$$\mathrm{S}'_m = \sum_{\alpha=0}^{a-1} \psi(m+\alpha n, \alpha)$$

représente le nombre des solutions de l'équation

$$m + \alpha n = (\alpha+\sigma)\rho, \qquad \left(\begin{array}{c} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, a-1 \\ \sigma, \rho = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{array}\right)$$

et qu'elle est donc égale au coefficient de x^m dans le développement de la fonction

$$f(x) = \sum_{\alpha, \rho, \sigma} x^{(\alpha+\sigma)\rho - \alpha n} = \sum_{\alpha, \sigma} \frac{x^{\alpha+\sigma-\alpha n}}{1 - x^{\alpha+\sigma}},$$

qui peut se mettre sous la forme

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\frac{x^{\nu\ \alpha n}}{1-x^\nu}+\sum_{\nu=a+1}^{\infty}\ \sum_{\alpha=0}^{a-1}\frac{x^{\nu-\alpha n}}{1-x^\nu}.$$

Ensuite, la somme

$$S''_m=\sum_{\alpha=0}^{a-1}\psi(m+\alpha n, a)$$

s'obtient comme le coefficient de x^m dans le développement de la fonction

$$g(x)=\sum_{\alpha,\sigma}\frac{x^{\alpha+\sigma-\alpha n}}{1-x^{\alpha+\sigma}},\qquad \begin{pmatrix}\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ a-1\\ \sigma=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \infty\end{pmatrix}$$

d'où il est facile d'observer que la somme $S_m=S'_m-S''_m$ équivaut au coefficient de x^m dans le développement de la fonction rationnelle

$$h(x)=f(x)-g(x)=\sum_{\nu=1}^{a}\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\frac{x^{\nu\ \alpha n}}{1-x^\nu},$$

qui s'exprime plus simplement par la somme

$$(3)\qquad h(x)=\sum_{\nu=1}^{a}x^{n+\nu-n\nu}\frac{1-x^{n\nu}}{(1-x^n)(1-x^\nu)}.$$

Cela étant, la somme S_m pourra s'exprimer par l'intégrale définie

$$(4)\qquad S_m=\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}h(x)x^{-m-1}\,dx$$

prise le long d'un petit cercle autour de l'origine. Or, en supposant m positif et en représentant par $\mathfrak{S}$ le plus grand commun diviseur des nombres ν, n, on voit que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(0)}x^{n\ \ m+\nu-n\nu-1}\frac{1-x^{n\nu}}{(1-x^n)(1-x^\nu)}\,dx$$

s'exprime par la somme $\sum_{k=0}^{\omega-1}e^{\frac{2km\pi i}{\omega}}$, de sorte qu'elle est égale à $\mathfrak{S}$

ou à zéro, selon que le nombre m admet ou n'admet pas $\mathfrak{S}$ comme diviseur. Donc, en représentant par $(\nu, n \mid m)$ ou le plus grand commun diviseur des nombres ν, n ou zéro, selon que ce plus grand commun diviseur est en même temps un diviseur de m ou non, et en posant, pour abréger,

$$(5^\circ) \qquad \varphi(a, n|m) = \sum_{\nu=1}^{a} (\nu, n|m),$$

j'aurai la formule

$$(5) \qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, a)] = \varphi(a, n|m).$$

Vous avez déjà observé que la fonction numérique $\varphi(a, n \mid m)$ ne change pas quand on y remplace le nombre m par un autre qui lui est congru selon le module n, et qu'en supposant le nombre m premier avec n cette fonction ne dépend point de m, en exprimant le nombre des termes de la série $1, 2, 3, \ldots, a$ qui sont premiers avec n; donc, en désignant par $\varphi(a, n)$ ce nombre et en supposant que m soit premier avec n, j'aurai la formule

$$(6) \qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, a)] = \varphi(a, n)$$

Or, en prenant $a = n$ ou $n - 1$, la fonction $\varphi(a, n)$ se réduit à la fonction numérique $\varphi(n)$ d'Euler et de Gauss, de sorte qu'on aura, m étant toujours supposé premier avec n, les deux formules

$$(7) \qquad \sum_{\alpha=0}^{n-1} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n)] = \varphi(n),$$

$$(7\ bis) \qquad \sum_{\alpha=0}^{n-2} [\psi(m + \alpha n, \alpha) - \psi(m + \alpha n, n - 1)] = \varphi(n).$$

Donc nous y possédons une expression remarquable de la fonction d'Euler par la fonction $\psi(p, q)$ et, d'un autre côté, la formule (4) permet d'en obtenir une expression sous la forme d'une intégrale définie.

Posant d'ailleurs $m = kn$ et représentant par (ν, n) le plus grand commun diviseur des nombres ν, n, l'équation (5) nous donne la formule

$$(8) \qquad \sum_{\alpha=k}^{k+a-1} [\psi(\alpha n, \alpha - k) - \psi(\alpha n, a)] = \sum_{\nu=1}^{a} (\nu, n).$$

Soit enfin $n = p$ un nombre premier qui ne divise pas m; dans ce cas l'équation (6) deviendra

$$(9) \qquad \sum_{\alpha=0}^{a-1} [\psi(m + \alpha p, \alpha) - \psi(m + \alpha p, a)] = a - \mathrm{E}\left(\frac{a}{p}\right).$$

Permettez-moi encore de remarquer que la formule (5°) fait voir que la somme

$$\sum_{n=1}^{b} \varphi(a, n | m)$$

est une fonction symétrique des lettres a, b, de sorte que nous aurons la formule

$$(10) \qquad \sum_{n=1}^{b} \varphi(a, n | m) = \sum_{n=1}^{a} \varphi(b, n | m)$$

dont on a

$$(10\ bis) \qquad \sum_{n=1}^{b} \varphi(a, n) = \sum_{n=1}^{a} \varphi(b, n),$$

formule qui d'ailleurs s'obtient aussi en remarquant que la différence $\varphi(b, n) - \varphi(b - 1, n)$ est égale ou à l'unité ou à zéro selon que b est premier avec n ou ne l'est pas, de sorte qu'il s'ensuit la formule

$$\varphi(a, b) = \sum_{n=1}^{a} [\varphi(b, n) - \varphi(b - 1, n)].$$

Cette formule est d'un petit intérêt. Mais il n'en est pas de même de la formule

$$(11) \quad \sum \psi(m - \alpha n, \alpha) = \sum \chi(m - \alpha n, n), \quad \left[\alpha = 0, 1, \ldots, \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{n}\right)\right],$$

dans laquelle $\chi(p, q)$ a la même signification que dans la Note imprimée dans les *Comptes rendus,* et qui s'obtient par une voie tout à fait analogue à celle qui nous a donné la formule (3).

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES ET LEUR REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE;

PAR M. LELIEUVRE.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une ligne tracée sur une surface soit asymptotique est que la tangente en un point, qui est perpendiculaire à la normale à la surface en ce point, le soit aussi à la normale en un point infiniment voisin de la ligne.

Soient θ_1, θ_2, θ_3 les coordonnées du point de la surface, ρ et ρ_1 les paramètres des lignes asymptotiques. Menons par l'origine une parallèle à la normale à la surface au point θ. Appelons a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point de cette droite. On aura

$$d\theta_1 = \lambda\left(a_2\frac{\partial a_3}{\partial\rho} - a_3\frac{\partial a_2}{\partial\rho}\right)d\rho + \mu\left(a_2\frac{\partial a_3}{\partial\rho_1} - a_3\frac{\partial a_2}{\partial\rho_1}\right)d\rho_1,$$

et, par permutation des indices, $d\theta_2$ et $d\theta_3$.

En écrivant que ces expressions sont des différentielles exactes, on obtient trois équations, d'où l'on tire immédiatement

$$\lambda + \mu = 0.$$

Posons $a_i\sqrt{\lambda} = \nu_i$. Nous aurons

$$d\theta_1 = \left(\nu_2\frac{\partial\nu_3}{\partial\rho} - \nu_3\frac{\partial\nu_2}{\partial\rho}\right)d\rho - \left(\nu_2\frac{\partial\nu_3}{\partial\rho_1} - \nu_3\frac{\partial\nu_2}{\partial\rho_1}\right)d\rho_1,$$

et les conditions d'intégrabilité seront

$$\frac{\dfrac{\partial^2\nu_1}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_1} = \frac{\dfrac{\partial^2\nu_2}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_2} = \frac{\dfrac{\partial^2\nu_3}{\partial\rho\,\partial\rho_1}}{\nu_3}.$$

D'où résulte ce théorème :

Les coordonnées θ d'un point d'une surface rapportée à ses