Matyáš Lerch

Sur une formule d'Arithmétique

Bull. Sci. Math., II. Sér. 12 (1888), 100–108

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501646

ception, l'équation se ramène algébriquement à une équation dont les intégrales sont les cubes des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre, appartenant à la classe de Fuchs.

D'ailleurs, toutes les fois que la variété définie dans la variété $\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \frac{y_4}{y_1}\right)$ par les relations entre les intégrales est simplement infinie, sauf le cas d'exception qui vient d'être signalé, l'équation est toujours algébriquement intégrable. Toutefois, avant d'arriver à ce résultat, l'auteur est obligé d'approfondir la nature des équations du quatrième ordre dont les intégrales vérifient une relation algébrique homogène

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0,$$

telle que la fonction φ se reproduise, à un facteur constant près, par les substitutions du groupe de l'équation. Il retrouve en passant le résultat signalé par M. Goursat concernant les équations dont les intégrales annulent identiquement une forme quadratique à discriminant non nul, équations qui se ramènent à des équations linéaires dont les intégrales sont les produits des intégrales de deux équations différentielles linéaires du second ordre. Enfin, la dernière partie de son travail contient quelques indications sur le cas où les intégrales ne vérifient qu'une seule relation algébrique homogène; M. Schlesinger promet d'ailleurs de revenir ultérieurement sur ce sujet.

J. T.

MÉLANGES.

SUR UNE FORMULE D'ARITHMÉTIQUE [1];

PAR M. LERCH.

Nous allons développer une identité relative à la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{k\nu}}{(1-x^{\nu})(1-x^{a+\nu})}, \tag{1}$$

[1] Le résultat de cette Note a été présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 16 janvier 1888.

et nous en conclurons une formule arithmétique dans laquelle figurent les fonctions numériques $\psi(p, q)$, $\chi(p, q)$ dont la première représente le nombre des diviseurs de p supérieurs à q et la seconde le nombre de ceux qui sont inférieurs ou égaux à q, de sorte que $\psi(p, q) + \chi(p, q)$ représente le nombre total des diviseurs de p. Après avoir signalé quelques conséquences de cette formule, nous nous bornerons à établir arithmétiquement l'une d'elles et puis nous parviendrons par une analyse directe de la formule générale à sa forme la plus simple, dont nous donnerons en même temps la démonstration arithmétique.

1. Supposons que, dans la série (1), k, a sont des nombres entiers positifs dont le premier soit supérieur à l'unité. En nous servant de l'identité

$$\frac{z^k}{1-z} = \frac{z}{1-z} - \sum_{\lambda=1}^{k-1} z^\lambda,$$

nous obtiendrons la formule

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \sum_{\lambda=1}^{k-1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}}, \tag{2}$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^\nu}{(1-x^\nu)(1-x^{a+\nu})} = \sum_{\nu=1}^{a} \frac{x^\nu}{(1-x^a)(1-x^\nu)}. \tag{3}$$

En posant

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x^{\lambda\nu}}{1-x^{a+\nu}} = \sum_{n=\lambda(a+1)}^{\infty} c_{\lambda,n} x^{n-\lambda a}, \tag{4}$$

on voit aisément que $c_{\lambda,n}$ représente le nombre des solutions de l'équation

$$(a+\nu)(\lambda+\mu) = n, \qquad (\nu,\ \mu+1 = 1, 2, 3, \ldots). \tag{α}$$

Décomposons n en facteurs dd', de sorte que $n = dd'$. Puisque n est supérieur à λa, on aura nécessairement $d' > \lambda$ toutes les fois que $d \leqq a$; appelons (δ) une telle décomposition $n = dd'$, où $d \leqq a$, de sorte que le nombre des décompositions (δ) sera $\chi(n, a)$, en représentant par $\chi(n, a)$ le nombre des diviseurs de n non supérieurs à a.

Ensuite, en représentant par $\psi(n, \lambda - 1)$ le nombre des diviseurs de n supérieurs à $\lambda - 1$, ce nombre sera égal au nombre des décompositions (d), telles que $n = dd'$ où $d' > \lambda - 1$. Posant enfin $a + \nu = \Delta$, $\lambda + \mu = \Delta'$, on voit que chacune des décompositions (d) est ou une décomposition (δ) ou une décomposition (Δ), et par conséquent le nombre des décompositions (Δ), c'est-à-dire $c_{\lambda,n}$, est égal à la différence entre celui des décompositions (d) et (δ), savoir

$$c_{\lambda,n} = \psi(n, \lambda - 1) - \chi(n, a). \tag{5}$$

D'ailleurs le coefficient de x^m dans le développement de la fonction $\varphi(x)$ est égal au nombre des solutions de l'équation

$$(\beta) \qquad \beta\nu + \gamma a = m, \qquad (\beta, \gamma + 1 = 1, 2, 3, \ldots; \nu = 1, 2, \ldots, a),$$

et sera donc représenté par la somme

$$\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m - \gamma a, a), \qquad \left[\frac{m-1}{a}\right] = \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right).$$

Alors, d'après les formules développées et d'après cette dernière remarque, le coefficient de x^m dans le développement de la fonction $\Phi(x)$ sera donné par la somme

$$\sum_{\gamma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \chi(m - \gamma a, a) - \sum_{\lambda=1}^{\lambda-1} [\psi(m + \lambda a, \lambda - 1) - \chi(m + \lambda a, a)]. \tag{6}$$

Or, d'après la définition de la fonction $\Phi(x)$, le même coefficient sera égal au nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$k\nu + \rho\nu + \sigma(a + \nu) = m, \qquad (\nu, \rho + 1, \sigma + 1 = 1, 2, 3, \ldots),$$

ou, ce qui est la même chose, de l'équation

$$(\gamma) \qquad \nu(k + \rho + \sigma) = m - \sigma a,$$

d'où l'on voit qu'il s'exprime par la somme

$$(7)\qquad \sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} \psi(m-\sigma a, k+\sigma-1).$$

En égalant les expressions (6) et (7), on obtient la relation remarquable

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]} [\psi(m-\sigma a, k+\sigma-1)-\chi(m-\sigma a, a)]\\ &+\sum_{\lambda=1}^{k-1} [\psi(m+\lambda a, \lambda-1)-\chi(m+\lambda a, a)] = 0,\end{aligned}\right.$$

qui est l'objet de cette Note. On y suppose seulement que a, m sont des nombres positifs et que le nombre k est supérieur à l'unité.

En y posant $a=1$ et observant que $\chi(p, 1)=1$, on trouve la formule

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{\sigma=0}^{m-1}\psi(m-\sigma, k+\sigma-1)+\sum_{\lambda=1}^{k-1}\psi(m+\lambda, \lambda-1)=k+m-1.$$

Posant, dans cette formule, $k=2$ et changeant m en $m-1$, il s'ensuit la suivante :

$$(\mathrm{III})\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1}\psi(m-\alpha, \alpha)=m.$$

Cette formule est au fond équivalente au théorème suivant énoncé par M. *Catalan* (¹) :

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$\begin{gathered} x+2y=n-1,\\ 2x+3y=n-2,\\ 3x+4y=n-3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ nx+(n+1)y=0, \end{gathered}$$

est égal à n.

(¹) *Voir* une Note de M. Cesàro dans les *Mémoires de la Société des Sciences de Liège*, 2ᵉ série, t. X, p. 263.

Posant enfin, dans l'équation (II), $k = m + 2$ après y avoir changé m en $m - 1$, on obtient la formule

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\alpha=0}^{n} \psi(n+\alpha, \alpha) = 2n,$$

que nous avons déduite de la précédente ([1]) par des considérations purement arithmétiques, qui d'ailleurs peuvent être remplacées par une démonstration directe et simple de cette formule.

2. Bornons-nous maintenant à établir la formule (II) directement. On a évidemment

$$\psi(m-\sigma, k+\sigma-1) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma+\mu}\right)\right],$$

et il s'ensuit

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma-1) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\sigma+\mu}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma+\mu}\right)\right]. \end{aligned}$$

En isolant dans la partie négative du second membre le terme où $\mu = 0$, il vient

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m-1}\left[E\left(\frac{m-\sigma}{k+\mu+\sigma}\right) - E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\mu+\sigma+1}\right)\right] - \sum_{\sigma=0}^{m-1} E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma}\right) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} E\left(\frac{m}{k+\mu}\right) - \sum_{\sigma=0}^{m-1} E\left(\frac{m-\sigma-1}{k-\sigma}\right); \end{aligned}$$

ensuite on a

$$E\left(\frac{m-\sigma-1}{k+\sigma}\right) = E\left(\frac{m+k-1}{k+\sigma}\right) - 1,$$

et l'on en déduit aisément la valeur de la somme A, savoir

$$(8) \qquad \sum_{\sigma=0}^{m-1} \psi(m-\sigma, k+\sigma-1) = m - \sum_{\alpha=k}^{\infty}\left[E\left(\frac{m+k-1}{\alpha}\right) - E\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right].$$

([1]) *Bulletin de la Société des Sciences de Bohême*, 1887.

On trouve d'une manière analogue

$$(9)\qquad \sum_{\lambda=1}^{k-1}\psi(m+\lambda,\lambda-1)=k-1+\sum_{\alpha=k}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m+k-1}{\alpha}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m}{\alpha}\right)\right],$$

et, en faisant la somme des membres correspondants des équations (8) et (9), on retombe sur la formule (II) qui par là est démontrée arithmétiquement.

3. Revenons maintenant à la formule (I). En la retranchant, membre à membre, de celle qui résulte en y changeant k en $k+1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\psi(m+ka,k-1)-\chi(m+ka,a)\\ &\quad=\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]}[\psi(m-\sigma a,k+\sigma-1)-\psi(m-\sigma a,k+\sigma)];\end{aligned}$$

la différence entre crochets étant ou l'unité ou zéro, selon que le nombre $m-\sigma a$ est un multiple de $k+\sigma$ ou non, on la pourra remplacer par celle-ci

$$\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{k+\sigma a}\right),$$

de sorte que nous aurons

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&\psi(m+ka,k-1)-\chi(m+ka,a)\\ &\quad=\sum_{\sigma=0}^{\left[\frac{m-1}{a}\right]}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{k+\sigma}\right)\right];\end{aligned}\right.$$

prenant successivement, dans cette équation, $m=1, 2, 3, \ldots, n$ et faisant la somme des résultats, il s'ensuit la formule

$$(11)\qquad \sum_{m=1}^{n}[\psi(m+ka,k-1)-\chi(m+ka,a)]=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right),$$

que l'on peut considérer comme équivalente à la formule (10) et par conséquent même à la formule (I).

La formule (10) a été obtenue sous la condition $k\geqq 2$; nous allons montrer qu'elle subsiste encore pour $k=1$.

Rappelons-nous à cet effet l'identité

$$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{k+\sigma}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) + \sum_{\rho=0}^{\infty} \mathrm{E}\left(\frac{m-\rho k}{a+\rho}\right),$$

qu'on obtient en exprimant de deux manières le nombre des points à coordonnées entières dans l'aire limitée par les axes des coordonnées et par l'hyperbole

$$y = \frac{m-ax}{k+x}.$$

D'après cette identité, la formule (10) se transforme en la suivante

$$(10\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi(m+ka,\ k-1) - \chi(m+ka,\ a) \\ &\quad = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{k}\right) - \left[\mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right)\right] \\ &\qquad + \sum_{\rho=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\rho k}{a+\rho}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\rho k}{a+\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

En y posant $a=1$ et écrivant a au lieu de k, il en résulte

$$\begin{aligned} &\psi(m+a,\ a-1) \\ &\quad = \mathrm{E}\left(\frac{m}{k}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{k}\right) + \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+1}\right)\right]; \end{aligned}$$

on a ensuite évidemment

$$\psi(m+a,\ a-1) = \mathrm{E}\left(\frac{m}{a}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1}{a}\right) + \psi(m+a,\ a),$$

de sorte que l'équation précédente deviendra

$$\psi(m+a,\ a) = \sum_{\sigma=0}^{\infty}\left[\mathrm{E}\left(\frac{m-\sigma a}{\sigma+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{m-1-\sigma a}{\sigma+1}\right)\right].$$

Le second membre de cette équation coïncide avec celui de l'équation (10) en y supposant $k=1$; on voit aussi aisément qu'il en est de même des premiers membres de ces équations, puisque

$$\psi(m+a,\ 0) - \chi(m+a,\ a) = \psi(m+a,\ a),$$

et il s'ensuit que l'équation (10) est exacte encore pour $k=1$. La même chose devra avoir lieu de l'équation (11).

En comparant la formule

$$\sum_{m=1}^{n}[\psi(m+ka, k-1)-\chi(m+ka, a)]$$
$$=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\sigma}\right)\quad\left[\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)\right],$$

avec l'équation (11) on obtient

$$(11\ bis)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\sigma}\right)\\&\quad=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right)+\sum_{\sigma=0}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{k+\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right),\end{aligned}\right.$$

formule qu'on peut considérer comme équivalente à l'équation (I). Or on a, pour $\sigma\leqq\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)$,

$$\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{k+\sigma}\right)=\mathrm{E}\left(\frac{n-\sigma a}{k+\sigma}\right)+a,$$

et l'équation (11) deviendra, par conséquent, en posant pour abréger $r=n+ka$, $\rho=\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)+k+1$,

$$\sum_{\sigma=\rho}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)+a+a\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)=\sum_{\sigma=k}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)-\sum_{\sigma=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right),$$

et en faisant usage des équations

$$\sum_{\sigma=\rho}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\sigma}\right)=\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{r}{\rho}\right]}\mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right)-(\rho-1)\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right),$$
$$\sum_{\sigma=k}^{\infty}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\sigma}\right)=\sum_{\nu=1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{ka}{\nu}\right)-(k-1)a,$$

que l'on obtient par une considération géométrique, cette équation s'écrira comme il suit

$$(12)\qquad\sum_{\nu=\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}^{a}\mathrm{E}\left(\frac{n+ka}{\nu}\right)=\left[k+\mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right)\right]\left[a-\mathrm{E}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right],$$

où l'on a posé

$$r = n + \lambda a, \qquad \rho = \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) + k + 1.$$

Cette formule remplace entièrement l'équation (11) et, si l'on en connaissait une démonstration arithmétique, ce serait en même temps une démonstration de la formule (I). Or c'est ce qu'on trouve sans aucune difficulté.

En effet, nous aurons

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) > \mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right) > \mathrm{E}\left(\frac{n+\lambda a}{a}\right),$$

pour ν entre les limites

$$\left(\left[\frac{r}{\rho}\right]+1, \ldots, a\right).$$

Cela étant, l'inégalité

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{n+\lambda a}{a}\right) < \frac{r}{\frac{r}{\rho}} - \lambda - \mathrm{E}\left(\frac{n}{a}\right) = 1$$

fait voir que l'on a

$$\mathrm{E}\left(\frac{r}{\left[\frac{r}{\rho}\right]+1}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{r}{\nu}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{r}{a}\right) = \lambda + \left[\frac{n}{a}\right],$$

et il s'ensuit que la formule (12) est vérifiée.