

Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Un théorème de la théorie des séries

Acta math. 10 (1887), 87–88

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/501636>

Terms of use:

© Royal Swedish Academy of Sciences, 1887

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

M. LERCH

à VINOHRADY.

Soit donnée une série de nombres entiers positifs

$$m_0, m_1, m_2, \dots$$

dont chaque terme est un diviseur de tous les suivants, et soient

$$c_0, c_1, c_2, \dots$$

des quantités complexes dont les parties réelles sont respectivement

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$$

et qui sont supposées positives et telles que la série $\sum \gamma_n$ soit divergente. Alors, dans tous les cas où la série

$$\mathfrak{B}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{m_{\nu}}$$

sera convergente pour chaque valeur de x moindre en valeur absolue que l'unité, elle définira une fonction de la variable x n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental $|x| \leq 1$.

Car en posant

$$x = e^{\frac{2a}{m_s} + ai}$$

où a est un nombre entier et α une quantité réelle et positive on aura

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} c_{\nu} e^{\frac{2a m_{\nu}}{m_s} \pi i - a \pi m_{\nu}} + \sum_{\nu=s}^{\infty} c_{\nu} e^{-a \pi m_{\nu}}.$$

Or la série $\sum r_{\nu}$ étant divergente et se composant de termes positifs il est aisé de voir que

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} r_{\nu} e^{-a \pi m_{\nu}} = + \infty$$

d'où l'on a aussi

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} c_{\nu} e^{-a \pi m_{\nu}} = \infty$$

et par conséquent

$$\lim_{\alpha=0} \mathfrak{P}\left(e^{\pi i \left(\frac{2a}{m_s} + ai\right)}\right) = \infty.$$

Donc la fonction $\mathfrak{P}(x)$ croit indéfiniment quand x s'approche d'une certaine manière des quantités de la forme $e^{\frac{2a}{m_s} \pi i}$ qui se présentent dans chaque partie de la circonférence $|x| = 1$. Par conséquent, cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction $\mathfrak{P}(x)$.
