Matyáš Lerch

Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires

Věstník Král. čes. spol. nauk 1887, 673–682

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501632

Lathyrus montanus Bernh. Chotěboř: v Obolcích (Dvořák)! und bei Habry in Wäldern (J.)! Mönchsbusch bei Bilin (Č)!
Lathyrus niger L. Berge um Aussig, Bilin (Č). Ledce, Kostelec a. d. Sáz. (V)!
Lathyrus albus Kittel. Mönchsbusch bei Bilin (Č)!

43.

Sur une démonstration du théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires.

Par M. Lerch, docent à l'école polytechnique tchèque de Prague.

(Présenté par M. Ed. Weyr, dans la séance du 9 Décembre 1887)

Les formules développées par *Cauchy* dans son „Mémoire sur les intégrales définies" *) ne sont que des conséquences du célèbre théorème de l'immortel géomètre et bien qu'elles n'en sont que des cas particuliers, elles nous donneront néanmoins la démonstration de ce théorème dans le cas général. La formule qui nous fournira cette démonstration a valu à M. *A. Enneper***) deux évaluations d'une intégrale Eulérienne de première espèce. Le théorème de Cauchy, combiné avec les principes de la théorie des fonctions imaginaires, lui aurait pu suggérer une démonstration plus simple, qui ne repose pas sur la considération des intégrales doubles et n'exige aucun calcul.

1. Etant donnée une quantité imaginaire $a+bi$, on peut mettre chaque quantité imaginaire z, affixe d'un point appartenant à l'aire du triangle $(o,\ a,\ a+bi)$ dans le plan***) (z), d'une manière univoque sous la forme

$$z = x(a+ti),$$

où t, x sont des variables réelles, la première entre les limites $(o \ldots b)$, la seconde entre $(o \ldots 1)$. Une fonction $f(z)$ s'appelle une *fonction*

---

*) Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France, T. I, 1827. Le mémoire en question à été lu à l'Institut le 22 août 1814.

**) Nachrichten von der Kön. Gesellschaft d. Wiss. und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. 23. März 1885.

***) Je représente par (z) le plan représentant la variabilité de z.

synectique dans une région du plan (z), si elle est une fonction finie et uniformément continue des deux coordonnées du point z dans cette région, et si elle y possède une dérivée finie et determinée $f'(z)$ qui est une fonction uniformément continue des dites coordonnées correspondant aux points z dans la région considérée.

La fonction $f(z)$ étant supposée synectique dans l'interieur et sur les limites du triangle $(o, a, a+bi)$ nous aurons

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

La valeur commune des deux membres de cette équation est une fonction finie et uniformément continne des coordonnées du point z, fonction que je représente par $\varphi(x, t)$; donc il subsiste l'équation

$$\int_0^1 dx \int_0^b \varphi(x, t)dt = \int_0^b dt \int_0^1 \varphi(x, t)dx.$$

En y remplaçant $\varphi(x, t)$ successivement par les deux expressions (1) il vient en posant, pour abréger, $c = a + bi$,

$$(2) \qquad \int_0^1 f(cx)cdx - \int_0^1 f(ax)adx = \int_0^b f(a+it)idt.$$

Or on a, par définition,

$$\int_0^1 f(cx)cdx = \int_0^{a+bi} f(z)dz,$$

$$\int_0^1 f(ax)adx = \int_0^a f(z)dz,$$

$$\int_0^b f(a+it)idt = \int_a^{a+bi} f(z)dz,$$

les intégrales des seconds membres se rapportant aux chemins rectilignes. Donc l'équation (2) devient

$$(3) \qquad \int_0^{a+bi} f(z)dz = \int_0^a f(z)dz + \int_a^{a+bi} f(z)dz$$

et elle exprime que l'intégrale

$$\int\limits_{(o,\,a,\,a+bi)} f(z)dz$$

prise le long du contour du triangle rectangle particulier $(o, a, a+bi)$ est égale à zéro.

2. En posant, dans la formule (3), $z = a + bi - z'$ et écrivant $f(z')$ au lieu de $f(a + bi - z')$ il vient

$$\int_0^{a+bi} f(z)dz = \int_0^{bi} f(z)dz + \int_{bi}^{a+bi} f(z)dz, \tag{3bis}$$

les intégrales se rapportant à des chemins rectilignes; cette formule peut s'exprimer comme il suit

$$\int\limits_{(o,\,bi,\,a+bi)} f(z)dz = 0.$$

On déduit par un changement de variable de la formule (3) la suivante

$$\int\limits_{(a_0,\,a,\,a+bi)} f(z)dz,$$

l'intégrale étant prise le long du contour du triangle $(a_0, a, a+bi)$ dont le côté $(a_0 \ldots a)$ se trouve sur l'axe réel.

Étant donné un triangle $(0, 1, c)$, où la partie réelle γ de c est entre les limites $(0 \ldots 1)$, on voit que

$$\int\limits_{(0,\,1,\,c)} f(z)dz = \int\limits_{(0,\,\gamma,\,c)} f(z)dz + \int\limits_{(\gamma,\,1,\,c)} f(z)dz = 0,$$

la fonction $f(z)$ étant supposée synectique à l'intérieur et sur la périphérie de ce triangle.

3. Soit enfin (c_1, c_2, c_3) un triangle rectiligne quelconque et $f(z)$ une fonction synectique à son intérieur et à sa périphérie. Soit c_3 un sommet dont la projection sur le côté opposé se trouve sur ce côté. Posons

$$z = (c_2 - c_1)u + c_1,$$

de sorte que

$$u = \frac{z - c_1}{c_2 - c_1}.$$

Si le point z parcourt les côtés du triangle (c_1, c_2, c_3), le point u décrit les côtés du suivant $(0, 1, c)$, où $c = \frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1}$, et si z appartient à l'intérieur du triangle (c_1, c_2, c_3), la même chose aura lieu pour u par rapport au triangle $(0, 1, c)$, et nous aurons, par définition,

$$\int_{(c_1, c_2, c_3)} f(z)dz = \int_{(0, 1, c)} f_0(u)du,$$

où nous avons posé

$$f_0(u) = (c_2 - c_1)f[c_1 + (c_2 - c_1)u].$$

La fonction $f_0(u)$ étant évidemment synectique dans le triangle $(0, 1, c)$ et la partie réelle de c étant évidemment entre les limites $(0 \ldots 1)$, il vient

$$\int_{(c_1, c_2, c_3)} f(z)dz = 0.$$

D'ailleurs chaque polygône rectiligne simple pouvant se décomposer en triangles, on voit facilement que le théorème suivant a lieu:

„*La fonction $f(z)$ étant supposée synectique à l'intérieur et sur la périphérie d'un polygône rectiligne simple (et à distance finie), l'intégrale*

$$\int f(z)dz$$

prise le lonc du contour de ce polygône est égale à zero."

Ce théorème particulier suffit pour déduire toutes les propriétés fondamentales des fonctions d'une variable imaginaire, de sorte qu'on n'a pas besoin d'introduire les intégrales curvilignes dans les éléments de la théorie des fonctions.

4. Pour établir le théorème de *Cauchy* sous sa forme la plus générale nous aurons besoin du lemme suivant:

„La fonction $f(z)$ étant synectique dans une aire $\mathfrak{A}'$, et $\mathfrak{A}$ représentant une région située toute entière à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$, la quantité

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)$$

sera moindre en valeur absolue qu'une quantité donnée d'avance, si la quantité $|h|$ sera inférieure à une certaine limite couvenablement choisie, et cela pour tontes les valeurs de z appartenant à l'aire $\mathfrak{A}$."
Cette propriété s'exprime en disant, que la fonction $f(z)$ est *uniformément différentiable* dans la région $\mathfrak{A}$.

Ce lemme se conclut facilement du théorème de Taylor que nous allons prouver sans faire usage des intégrales curvilignes.

5. La fonction $\frac{1}{z}$ n'étant pas synectique dans une région contenant l'origine $z=0$ dans son intérieur, le théorème démontré dans le numéro 3 ne lui est pas applicable. Or il est aisé de voir que l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z}$$

prise le long d'un polygône rectiligne contenant l'origine à son interieur ne dépend point de la forme particulière de ce polygône. Donc pour obtenir sa valeur pour un polygône quelconque il suffit de l'évaluer pour le carré $(-1-i,\ 1-i,\ 1+i,\ -1+i)$. On tronve de cette manière

$$\int \frac{dz}{z} = 2\int_{-1}^{1} \frac{idy}{1+yi} - 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+i}$$

$$= 2i\int_{-1}^{1} \frac{dy}{1+y^2} + \int_{-1}^{1} \frac{2y\,dy}{1+y^2} - \int_{-1}^{1} \frac{2x\,dx}{1+x^2} + 2i\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 4i\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int \frac{f(z)dz}{z-x} \tag{1}$$

prise le long du contour d'un polygône rectiligne contenant le point x dans son intérieur, la fonction $f(z)$ étant supposée synectique dans ce polygône. Il est aisé de voir que cette intégrale ne change pas quand on substitue à ce polygône un autre qui lui est intérieur et contient aussi le point x dans son aire. Remplaçons le par un carré ayant sont centre à x, et supposons que la moitié de son hypothénuse soit moindre que la quantité ε telle qu'on ait, pour chaque valeur de h dont le module est inférieur à ε, l'inégalité

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\delta,$$

δ étant une quantité donnée d'avance.

Grâce à cette hypothèse, on aura, dans l'intégrale (1),

$$f(z)=f(x)+(z-x)f'(x)+(z-x)\eta_z,\ |\eta_z|<\delta,$$

et, par conséquent,

$$\int\frac{f(z)\,dz}{z-x}=f(x)\int\frac{dz}{z-x}+f'(x)\int dz+\int\eta_z dz.$$

Or on a, d'après l'inégalité $|\eta_z|<\delta$,. et d'après le théorème que nous venons de prouver,

$$\int dz=0,\ \left|\int\eta_z\,dz\right|<8\varepsilon\delta$$

et l'intégrale

$$\int\frac{dz}{z-x}$$

étant, d'après ce qui précède, égale à $2\pi i$, nous aurons

$$\left|\int\frac{f(z)dz}{z-x}-2\pi i\,.f(x)\right|<8\delta\varepsilon,$$

et comme on peut supposer $\varepsilon<1$, le premier membre étant indépendant de δ, il devra nécessairement s'annuller, de sorte qu'il vient

$$\int\frac{f(z)dz}{z-x}=2\pi if(x).$$

Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ soit synectique dans une aire finie $\mathfrak{A}$, et considérons un point x_0 à l'intérieur de cette aire. Soit C un cercle du centre x_0 et qui se trouve à l'intérieur de l'aire $\mathfrak{A}$. Étant donné un point x à l'intérieur de C, on peut déterminer un cercle C' intérieur à C contenant le point x à son intérieur. Il est toujours possible de construire un polygône rectiligne Γ circonscrit à C' et placé à l'intérieur de C. Nous aurons évidemment d'après ce qui précède,

$$\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-x} = 2\pi i f(x),$$

et d'autre part

$$(2) \quad \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-x} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (x-x_0)^\nu \int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-x_0)^{\nu+1}} + \int_\Gamma \left(\frac{x-x_0}{z-x_0}\right)^n \frac{f(z)dz}{z-x}$$

Comme on a, sur le contour du polygône Γ,

$$\left|\frac{x-x_0}{z-x_0}\right| < 1,$$

il est aisé de voir qu'il s'ensuit

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma \left(\frac{x-x_0}{z-x_0}\right)^n \frac{f(z)dz}{z-x} = 0,$$

d'où il vient

$$(2\text{bis}) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (x-x_0)^\nu, \quad A_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-x_0)^{\nu+1}},$$

pour chaque point x à l'interieur du cercle C.

C'est de la formule (2) ou (2bis) qu'on peut conclure le lemme en question.

Nous avons en effet, d'après (2), la formule

$$(3) \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = h\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-x)^2(z-x-h)},$$

Γ étant un polygône rectiligne contenant à son intérieur les quantités x, $x+h$ et la fonction $f(z)$ y étant supposée synectique.

On peut toujours construire un polygône rectiligne simple Γ placé à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$ et tel que la région $\mathfrak{A}$ lui soit intérieure, en supposant ces deux régions limitées par des courbes simples. La fonction $f(z)$ étant synectique à l'intérieur de $\mathfrak{A}'$ et chaque point x, $x+h$ étant supposé à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, on voit que l'équation (3) subsiste pour toutes ces valeurs de x et h. Or en représentant par λ la plus courte distance du contour de Γ du celui de $\mathfrak{A}$, par M le module maximum de $f(z)$ le long de Γ, par L le périmètre de Γ, il est aisé de voir qu'on a

$$\left|\int_\Gamma \frac{f(z)dz}{(z-x)^2(z-x-h)}\right| < \frac{M.L}{\lambda^3},$$

de sort que l'équation (3) nous donnera

$$\left|\frac{f(x)+h-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \frac{M.L}{\lambda^3}|h|,$$

ce qui montre la différentiabilité uniforme des fonctions synectiques.

6. Soit $f(z)$ une fonction synectique à l'intérieur d'une aire simple $\mathfrak{A}$ et considérons un ligne courbe fermée et simple C placée à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ et ayant une longueur finie. On démontre aisément*) qu'on peut déterminer un nombre positif ε telqu'on ait, pour chaque polygône $(z_0, z, z_2 \ldots z_{n-1})$ inscrit à C ayant ses côtés inférieurs à ε,

$$\left|\int_C f(z)dz - \sum_{\nu=0}^{n-1}(z_{\nu+1}-z_\nu)f(z_\nu)\right| < \frac{\delta}{2},$$

δ étant une quantité positive donnée d'avance.

On aura de plus

$$f(z) = f(z_\nu) + (z-z_\nu)f'(z_\nu) + (z-z_\nu)\eta_\nu(z)$$

et on peut supposer ε assez petit pour que l'on ait, pour $|z-z_\nu| < \varepsilon$, l'inégalité

$$|\eta_\nu(z)| < \delta',$$

δ' étant une quantité donnée d'avance.

Donc il vient

*) Voir p. ex. le Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique de M. Camille Jordan.

$$\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)dz = (z_{\nu+1}-z_\nu)f(z_\nu) + \tfrac{1}{2}(z_{\nu+1}-z_\nu)^2 f'(z_\nu)$$

$$+\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} (z-z_\nu)\eta_\nu(z)dz,$$

d'où il suit

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)dz - \sum_{\nu=0}^{n-1}(z_{\nu+1}-z_\nu)f(z_\nu)$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}(z_{\nu+1}-z_\nu)^2 f'(z_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}(z-z_\nu)\eta_\nu(z)dz.$$

Or on a, en représentant par M' le module maximum de $f'(z)$, et par L' une quantité qui est supérieure aux périmètres de tous les polygônes inscrits à C, les inégalités suivantes

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}(z_{\nu+1}-z_\nu)^2 f'(z_\nu)\right| < \varepsilon L'M',$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}}(z-z_\nu)\eta_\nu(z)dz\right| < \varepsilon L'\delta'.$$

De plus le polygône $(z_0, z_1, z_2 \ldots z_{n-1})$ se trouvant à l'intérieur d'une aire où la fonction $f(z)$ est synectique, nous aurons d'après le théorème démontré plus haut

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\int_{z_\nu}^{z_{\nu+1}} f(z)dz = 0,$$

de sort qu'il vient

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n-1}(z_{\nu+1}-z_\nu)f(z_\nu)\right| < \varepsilon(M'+\delta')L';$$

en prenant donc ε tel que

$$\varepsilon(M' + \delta')L' \leqq \frac{\delta}{2},$$

nous aurons

$$\int_C f(z)dz < \delta,$$

d'où il est aisé de voir qu'on a

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

ce qui est le théorème à démontrer.

Remarque. On voit que l'emploi du lemme sur la différentiabilité uniforme des fonctions synectiques n'est pas indispensable pour la démonstration du théorème. Il suffit de faire voir que le quotient

$$\frac{f(z) - f(z_\nu)}{z - z_\nu}, \quad |z - z_\nu| < \varepsilon$$

a une limite supérieure finie de son module, quelle que soit la quantité z_ν supposée sur la courbe C. Cette propriété est verifiée par un théorème dû à M. *Mansion,* *) savoir

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lambda f'(z + \Theta h),$$

où λ est une quantité d'un module non superieur à $\sqrt{2}$, et où Θ est une quantité réelle entre les limites $(0 \ldots 1)$. Ce théorème étant démontré d'une manière élémentaire, on peut le substituer aux considérations que nous avons développées dans les n^os^ 4 et 5.

Deuxième remarque. Une autre démonstration, la plus remarquable parmi celles qu'on a données jusqu'à présent du célèbre théorème de Cauchy a été signalée par M. *Kronecker* dans les Sitzungsberichte der kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 30. Juli 1885.

*) Voir à ce sujet un mémoire de M. *F. Gomes Teixeira* dans son Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas, t. VIII., p. 20, ou le *Curso de analyse infinitesimal* du même auteur, p. 298. Le théorème de M. *Mansion* est analogue à un théorème de M. *Darboux;* or celui-là a été établi d'une manière plus simple de sorte qu'il est applicable dans les éléments de la théorie.