Matyáš Lerch

Počtářské odvození základního vzorce pro lineárnou transformaci elliptické transcendenty $\theta_1(u|\tau)$

Věstník Král. čes. spol. nauk 1887, 426–432

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501631

Note. Dans une lettre du 10 Février 1887, Mr. *Henri Vogt*, professeur au lycée de Rennes, m'a donné un extrait des leçons professées par *Bouquet* à la Sorbonne en 1882, qui se rapportaient aux séries de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos a_\nu x}{a_\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin a_\nu x}{a_\nu},$$

les a_ν désignant des quantités réelles et positives quelconques assujeties à la condition

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n=1} a_\nu}{a_n}=0,$$

séries qui n'ont pas de dérivée quelle que soit la valeur de x. D'après ce théorème la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n!\,x}{n!}$$

considérée dans mon mémoire cité n'a pas de dérivée quelle que soit la valeur de x. C'est en ne conaissant pas ce beau résultat de l'éminent géomètre français que j'ai publié ma recherche qui maintenant est devenue superflue.

22.

Počtářské odvození základního vzorce pro linearnou transformaci elliptické transcendenty $\vartheta_1\,(u\,|\,\tau)$.

Napsal M. Lerch.

(Předložil prof. dr. Edv. Weyr ve schůzi dne 6. května 1887.)

R. 1817. uveřejnil *Cauchy* v Bulletin de la Société Philomatique větu vyjadřující vztah mezi funkcemi $\vartheta_3(o\,|\,\tau)$, $\vartheta_3\left(o\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ *), kterýžto

*) Soudím tak pouze z citátu *Cauchyho* obsaženém v pojednání jeho z r. 1840. v V. svazku žurnálu *Liouville-ova*, any pražské knihovny neobsahují řečeného Bulletinu.

výsledek později r. 1823. v Journal de l'École Polytechnique, cah. 19. *Poissonem* znovu byl nalezen. Jelikož methoda *Poissonova* připouští zobecnění na případ funkce $\vartheta_3(u\,|\,\tau)$, a jest pouhým zvláštním případem obecné Poissonovy transformace řad, která poskytne na př. linearnou transformaci všech funkcí elliptických po cestě ovšem poněkud namahavé, citoval jsem v některých dosud netištěných pracích vzorec pro linearnou transformaci funkce $\vartheta_3(u\,|\,\tau)$ jakožto *Poissonův*, což nadále opraviti hodlám v ten smysl, že naznačím vztahy funkcí $\vartheta_\alpha(u\,|\,\tau)$ a $\vartheta_{\alpha'}\left(\frac{u}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ jakožto vzorce *Cauchy-Poissonovské*, třeba tyto nebyly řečenými geometry zřejmě vytknuty; což tím jest odůvodněno, že ze vzorce výše uvedeného dají se ostatní obecné snadno odvoditi.

V pozůstalosti *Gaussově* nalezá se několik důkazů těchto vzorců ve tvaru obecném, z nichž aspoň některé spadají bezpochyby v dobu před r. 1820. Na straně 442. sebraných jeho spisů v třetím dílu nachází se skizza, začínající slovy „Zum Beweise der schönen Lehrsätze der Reciprocität wird folgendes dienen." „*Krásné věty reciprocity*" značí tu bezpochyby nejen poučky z theorie kvadratických zbytkův (zákon *Legendreův*), ale též vzorce Cauchy-Poissonovské, z nichž se dají tyto věty odvoditi. V této črtě *Gauss* pokusil se o důkaz řečených vzorců založený na dvojnásobném součinu, kterým lze vyjádřiti funkci $\vartheta_3(u\,|\,\tau)$. Leč nedošel cíle, a sám pak ke konci nespolehlivosť výsledku vytknul; leč i kdyby byl se nedopustil nedopatření, nebyl by ještě důkaz býval ukončen, poněvadž by zbývalo ještě ustanoviti jistou konstantu závislou na parametru τ. Ve drobných zprávách, které přinášívá *Časopis pro pěstování math. a fys.*, hodlám vysvětliti původ *Gaussova* nedopatření, na tomto pak místě ukáži, jak lze skutečně užiti základní myšlénky *Gaussovy* k důkazu věty Cauchy-Poissonovské, při čemž zvolím za východisko *Weierstrassovu* funkci $\sigma(u\,|\,\omega,\,\omega')$.

Funkce tato dána jest součinem

$$(1)\qquad \sigma(u\,|\,\omega,\,\omega') = u\prod_{w}'\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},$$

v němž w má obdržeti všecky hodnoty tvaru

$$w = 2\mu\omega + 2\nu\omega',$$

kde μ, ν jsou kladná neb záporná čísla celistvá s vyloučením kombinace $\mu = \nu = 0$.

Předpokládejme, že imaginarní část veličiny $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$ je kladná, a znamenejme $u = 2\omega \, . \, v$. Pak bude

$$\sigma(u) = 2\omega \, . \left[v \mathop{\Pi'}_{\mu=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{v}{\mu}\right) e^{\frac{v}{\mu}} \right] e^{\frac{1}{2} v^2 \Sigma' \frac{1}{\mu^2}} \mathop{\Pi}_{\nu} \mathop{\Pi}_{\mu} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{w}\right)^2},$$

kde v součinu Π' a v součtu Σ' má se vynechati člen $\mu = 0$, a kde poslední dvojnásobný součin vztahuje se k hodnotám

$$(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Tu jest pak dle známé věty

$$v \mathop{\Pi'}_{\mu} \left(1 - \frac{v}{\mu}\right) e^{\frac{v}{\mu}} = \frac{\sin \pi v}{\pi},$$

$$\mathop{\Pi}_{\mu} \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}} = \mathop{\Pi}_{\mu} \frac{2\mu\omega + 2\nu\omega' - u}{2\mu\omega + 2\nu\omega'} e^{\frac{u}{2\mu\omega + 2\nu\omega'}}$$

$$= \frac{\nu\tau - v}{\nu\tau} e^{\frac{v}{\nu\tau}} \mathop{\Pi'}_{\mu} \frac{\left(1 - \frac{v - \nu\tau}{\mu}\right) e^{\frac{v - \nu\tau}{\mu}}}{\left(1 + \frac{\nu\tau}{\mu}\right) e^{-\frac{\nu\tau}{\mu}}} e^{\frac{v}{\nu\tau + \mu} - \frac{v}{\mu}}$$

$$= -\frac{\sin(v - \nu\tau)\pi}{\sin \nu\tau\pi} e^{v\pi \cot \nu\tau\pi},$$

takže obdržíme

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2} u^2 \Sigma^* \frac{1}{w^2}} \sin \pi v \mathop{\Pi}_{\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots} \frac{\sin(\nu\tau - v)\pi}{\sin \nu\tau\pi} e^{v\pi \cot \nu\tau\pi}.$$

Spojíme-li v součinu posledním vždy dva činitele odpovídající protivným hodnotám ν, obdrží tento tvar

$$\mathop{\Pi}_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\tau + v)\pi \, . \, \sin(n\tau - v)\pi}{\sin^2 n\tau\pi};$$

klademe-li pak, jak zvykem,

$$q = e^{\tau\pi i}, \ \xi = e^{v\pi i},$$

a uvážíme-li známé vzorce

$$\begin{aligned} -2i \sin(n\tau + v)\pi &= q^{-n}\xi^{-1}(1 - q^{2n}\xi^2), \\ -2i \sin(n\tau - v)\pi &= q^{-n}\xi(1 - q^{2n}\xi^{-2}), \\ -2i \sin n\tau\pi &= q^{-n}(1 - q^{2n}), \end{aligned}$$

obdržíme

$$(2) \quad \sigma(u \mid \omega, \omega') = \frac{2\omega}{\pi} e^{\eta \frac{u^2}{2\omega}} \sin \frac{\pi u}{2\omega} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n}\xi^2)(1 - q^{2n}\xi^{-2})}{(1 - q^{2n})^2},$$

kde jsme položili

$$\eta = \omega \sum{}^{*} \frac{1}{w^2} = \omega \sum_{\nu, \mu}{}^{*} \frac{1}{(2\mu\omega + 2\nu\omega')^2},$$

užívajíce hvězdičky u znamení součtu Σ^* k naznačení, že se má týž předem určiti vůči μ a po té vůči v, takže bude

$$(2^a) \quad \eta = \frac{\omega}{4} \lim_{\beta=\infty} \lim_{\alpha=\infty} \sum_{\mu, \nu}' \frac{1}{(\mu\omega + \nu\omega')^2}, \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \alpha \\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm \beta \end{pmatrix}$$

Užijeme-li pak označení ustáleného

$$(3) \quad \vartheta_1(v \mid \tau) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi v \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})(1 - q^{2n}\xi^2)(1 - q^{2n}\xi^{-2}),$$

přejde vztah (2) na tvar

$$(4) \quad \sigma(u \mid \omega, \omega') = 2\omega e^{\eta \frac{u^2}{2\omega}} \frac{\vartheta \left(\frac{u}{2\omega} \middle| \frac{\omega'}{\omega} \right)}{\vartheta'_1 \left(o \middle| -\frac{\omega'}{\omega} \right)},$$

při čemž dlužno opakovati, že pomyslná část veličiny $\frac{\omega'}{\omega}$ je kladná, takže $|q| < 1$. Za této podmínky bude též pomyslná část veličiny $-\frac{\omega}{\omega'}$ kladnou, i obdržíme podobnými úvahami jako předešle

$$(4') \quad \sigma(u \mid \omega, \omega') = 2\omega' e^{\eta' \frac{u^2}{2\omega'}} \frac{\vartheta_1 \left(\frac{u}{2\omega'} \middle| -\frac{\omega}{\omega'} \right)}{\vartheta'_1 \left(o \middle| -\frac{\omega}{\omega'} \right)},$$

kde

$$(2^b)\quad \eta' = \frac{\omega'}{4} \lim_{\alpha=\infty} \lim_{\beta=\alpha} \sum_{\mu,\nu}{}^{'} \frac{1}{(\mu\omega+\nu\omega')^2}, \quad \binom{\mu=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm\alpha}{\nu=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm\beta}$$

Z rovnice (3) snadno se obdrží

$$(5)\qquad \begin{cases} \vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v) \\ \vartheta_1(v+\tau) = -\vartheta_1(v)\, e^{-\pi i(2v+\tau)} \end{cases}$$

Prvá z těchto rovnic poskytne ve spojení s (4′)

$$(6)\qquad \sigma(u+2\omega' \,|\, \omega, \omega') = -\sigma(u \,|\, \omega, \omega') e^{2\eta'(u+\omega')}$$

Kombinujeme-li druhou z rovnic (5) s rovnicí (4), a porovnáme-li výsledek s rovnicí (6), obdržíme vztah

$$(7)\qquad \eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}.$$

Porovnejme nyní vzorce (4), (4′), kladouce opět $u = 2\omega v$, i obdržíme

$$(8)\qquad \vartheta_1(v\,|\,\tau) = \tau \frac{\vartheta_1'(o\,|\,\tau)}{\vartheta_1'\left(o \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right)} e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau} \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right).$$

Abychom určili veličinu

$$(8^a)\qquad \frac{\vartheta_1'(o\,|\,\tau)}{\vartheta_1'\left(o \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right)} = \varphi(\tau),$$

vyjadřme čitatele i jmenovatele levé strany nekonečným součinem, a utvořme jeho logarithmickou derivaci. Jelikož tu

$$\vartheta_1'(o\,|\,\tau) = 2\pi q^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3, \quad q = e^{\tau\pi i},$$

$$\vartheta_1'\left(o \,\middle|\, -\frac{1}{\tau}\right) = 2\pi \mathfrak{q}^{\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-\mathfrak{q}^{2n})^3, \quad \mathfrak{q} = e^{-\frac{1}{\tau}\pi i},$$

obdržíme

$$\frac{dlg\vartheta_1'(o\,|\,\tau)}{d\tau}=\frac{\pi i}{4}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right)$$

$$=\frac{\pi i}{4}\left(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}nq^{2mn}\right)=\frac{\pi i}{4}\left(1-24\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{(1-q^{2m})^2}\right)$$

Nahradíme-li zde q hodnotou $e^{\tau\pi i}$, bude tedy

$$\frac{d}{d\tau}lg\vartheta_1'(o\,|\,\tau)=\frac{\pi i}{4}\left(1+6\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{sin^2m\tau\pi}\right)$$

a poněvadž

$$\frac{\pi^2}{sin^2m\pi\tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+m\tau)^2},$$

obdržíme

$$\frac{d}{d\tau}lg\vartheta_1'(o\,|\,\tau)=\frac{\pi i}{4}+\frac{3i}{4\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+m\tau)^2}$$

Avšak

$$\frac{\pi^2}{3}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{n^2},$$

a tedy bude

$$\frac{d}{d\tau}lg\vartheta_1'(o\,|\,\tau)=\frac{3i}{4\pi}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+m\tau)^2}\right].$$

Dle vzorce (2^a) rovná se výraz v závorce hodnotě $4\omega\eta$ a tedy máme

$$\frac{d}{d\tau}lg\vartheta_1'(o\,|\,\tau)=\frac{3i}{\pi}\eta\omega'\,.\,\frac{\omega}{\omega'},$$

a podobně nalezneme

$$\frac{d}{d\tau}lg\vartheta_1'\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{3i}{\pi}\eta'\omega'\,.\,\frac{1}{\tau^2}=\frac{3i}{\pi}\eta'\omega\,.\,\frac{\omega}{\omega'}$$

takže bude dle (8^a)

$$\frac{dlg\varphi(\tau)}{d\tau}=\frac{3i}{\pi}\,.\,\frac{\omega}{\omega'}(\eta\omega'-\eta'\omega)$$

a dle (7)

$$\frac{d\lg\varphi(\tau)}{d\tau} = -\frac{3}{2\tau}$$

z čehož se obdrží

$$\tau\varphi(\tau) = \sqrt{\frac{a}{\tau}},$$

kde a je numerická stálá. Tato se ustanoví, volíme-li $\tau = i$; pak bude totiž $\varphi(i) = 1$, a tedy $\sqrt{\frac{a}{i}} = i$, takže bude

$$\tau\varphi(\tau) = i\sqrt{\frac{i}{\tau}}.$$

Levá strana jest dána jednoznačně a sice pouze pro hodnoty τ, jichž pomyslná část je kladná; odmocnina $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ má pro $\tau = i$ míti hodnotu $+1$ a nikoli -1; jelikož existuje pouze jedna hodnota dvojznačné funkce $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$, která odpovídá *řezu* podél osy realné a má hodnotu 1 pro $\tau = i$, hodnota to, *jejíž realná část jest kladnou*, a již znamenáme $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ po příkladu *Kroneckera*, bude

$$\tau\varphi(\tau) = i\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right),$$

a tedy dle (8)

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau) = i\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{v^2\pi i}{\tau}} \vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

což jest vzorec, který jsme chtěli počtem vyvinouti.