Matyáš Lerch

Příspěvky k vlastnostem některých křivek a ploch

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 26 (1917), č. 50, 1–43

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501613

Příspěvky k vlastnostem některých křivek a ploch.

Podává

M. LERCH v Brně.

Se 3 obr. v textu.

(Předloženo dne 8. června 1917.)

1. Projektivní zobecnění astroidy.

V libovolných souřadnicích promětných uvažujme přímku o rovnici s proměnným parametrem φ

$$\frac{x}{a} \sin \varphi + \frac{y}{b} \cos \varphi = \sin \varphi \cos \varphi; \tag{1}$$

její souřadnice

$$u = -\frac{1}{a \cos \varphi}, \qquad v = -\frac{1}{b \sin \varphi} \qquad (u\, x + v\, y + 1 = 0)$$

ukazují, že obalová čára její poloh je třídy čtvrté, majíc rovnici

$$\frac{1}{a^2 u^2} + \frac{1}{b^2 v^2} = 1. \tag{2}$$

Derivuje-li se (1) podle parametru

$$\frac{x}{a} \cos \varphi - \frac{y}{b} \sin \varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, \tag{1'}$$

nacházíme tak jednak rovnici přímky, která seče přímku (1) v dotykovém bodě s obalovou čarou; jednak vychází řešením jako parametrické vyjádření dotykového bodu

$$x = a \cos^3 \varphi, \qquad y = b \sin^3 \varphi; \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{2*}$$

Pro tečny procházející daným bodem $M(x, y)$ mimo čáru potřebujeme pouze v (1) považovati x, y za veličiny stálé. Aby vynikla algebraická povaha problému, zaveďme komplexní parametr

$$z = e^{i\varphi},$$

načež se rovnice (1) přepíše na

$$(1^0) \qquad z^4 - 1 = 2\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)z^3 - 2\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right)z.$$

Porovnáme-li s obecnou rovnicí stupně 4.

$$z^4 - \mathfrak{g}_1 z^3 + \mathfrak{g}_2 z^2 - \mathfrak{g}_3 z + \mathfrak{g}_4 = 0,$$

nacházíme jako podmínku, které musí hověti čtveřina bodů na uvažované čáře, aby jejich tečny sbíhaly ve společný bod, dvě rovnice charakteristické

$$(3) \qquad \mathfrak{g}_4 = -1, \qquad \mathfrak{g}_2 = 0,$$

které ve formě explicitní znějí

$$z_1 z_2 z_3 z_4 = -1, \qquad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = 0.$$

Pro souřadnice průseku pak vychází současně

$$(3^0) \qquad \frac{x}{a} = \frac{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3}{4}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3}{4i}.$$

Abychom vyšetřili charakteristické vlastnosti přímočaré skupiny na naší čáře, přepišme rovnice (2*) na komplexní tvar

$$x = \frac{a(z^2+1)^3}{8z^3}, \qquad y = \frac{ib(z^2-1)^3}{8z^3};$$

vložíme-li tyto hodnoty do rovnice přímky

$$A\frac{x}{a} + B\frac{y}{b} + C = 0,$$

vyjde rovnice 6. stupně pro parametry průseků

$$A(z^2+1)^3 + Bi(z^2-1)^3 + 8Cz^3 = 0.$$

Znamenáme-li základní úkony souměrné její kořenů $z_1 z_2 \ldots z_6$ literami $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_6$, shledáme snadno, že hoví podmínkám

$$(4) \qquad \mathfrak{f}_1 = 0, \quad \mathfrak{f}_5 = 0, \quad \mathfrak{f}_4 = 3, \quad \mathfrak{f}_2 = 3\,\mathfrak{f}_6,$$

které charakterisují přímočaré skupiny naší čáry obalové.

Tyto čáry mají určitou řadu čtveřin přímočarých, pro jejichž prvky se tečny protínají ve společném bodě. Abychom to ukázali, rozložme obecnou přímočarou skupinu ($\mathfrak{f}$) ve čtyřčlennou ($\mathfrak{g}$) a dvojčlennou z', z'', jejíž souměrné úkony znamenejme $\sigma_1 = z' + z''$, $\sigma_2 = z' z''$. Tu se pak rovnice (4) přepíší na

$$\mathfrak{g}_1 + \sigma_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 \sigma_1 + \mathfrak{g}_3 \sigma_2 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_3 \sigma_1 + \mathfrak{g}_2 \sigma_2 = 3,$$
$$\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 \sigma_1 + \sigma_2 = 3\, \mathfrak{g}_4 \sigma_2,$$

a ukáže se, že všechny čtyři tyto rovnice jsou splnitelny hodnotami $\mathfrak{g}_2 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = -1$. Po jejich dosazení vychází skutečně

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{g}_1 + \sigma_1 = 0, \quad \sigma_1 = \mathfrak{g}_3 \sigma_2, \quad \mathfrak{g}_3 \sigma_1 = 4, \quad \mathfrak{g}_1 \sigma_1 + 4\, \sigma_2 = 0;$$

po vyloučení $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_3$ vychází soustava rovnomocná dvou rovnic, jež splývají:

$$\sigma_1^2 = 4\, \sigma_2.$$

Rovnice tato vzhledem k významu liter σ_1, σ_2 zní

$$(z' - z'')^2 = 0,$$

t. j. vyžaduje $z' = z''$. Uvažované skupiny jsou na čáře vyťaty její tečnami; body z', z'' splývají s bodem dotykovým z a zbývající tvoří čtveřinu $(\mathfrak{g})$ $\mathfrak{g}_2 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = -1$, jejíž tečny se nacházejí ve svazku.

Z rovnic (α) máme dále $(\sigma_1 = 2z,\ \sigma_2 = z^2)$

$$\mathfrak{g}_1 = -2z, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{2}{z},$$

tedy pro $z = e^{i\varphi}$

$$\frac{\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3}{4} = -\cos\varphi, \qquad \frac{\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3}{4i} = -\sin\varphi,$$

načež rovnice (3⁰) ukazují, že

„průsek tečen ve čtyřech bodech, v nichž čáru seče tečna bodu φ, má souřadnice

$$x = -a\cos\varphi, \quad y = -b\sin\varphi,$$

takže při pohybu tečny tento bod opisuje kuželosečku."

* * *

Jako příklady uvažujeme

a) ***Astroidu.*** Ta vzniká jako obalová čára stálé délky, jež se svými konci šine po dvou osách (Ox, Oy) na sobě kolmých.

Konce délky znamenejme P (na Ox) a Q (na Oy), úhel sevřený přímkou a zápornou osou Ox znamenejme φ; úseky přímky na osách jsou pak — značí-li $2m$ délku PQ —

$$2m\cos\varphi, \quad 2m\sin\varphi,$$

takže rovnice přímky bude

$$(p) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi = 2m\sin\varphi\cos\varphi.$$

Mimo to nezapomeňme vytknouti na kruhu $(O, 2\,m)$ bod N o souřadnicích [příční bod tečny astroidy]

$$(N) \qquad x = 2\,m \cos\varphi, \qquad y = 2\,m \sin\varphi,$$

který slouží k obecnému přesnému určení úhlu φ, a tvoří s body $O\,P\,Q$ obdélník. Bodem tím prochází normála čáry v bodě φ, a ten jest jeho orthogonální průmět do přímky $P\,Q$.

Rovnice hořejší v tomto případě znějí

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 4\,m^2; \quad x = 2\,m \cos^3\varphi, \quad y = 2\,m \sin^3\varphi,$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2\,m)^{\frac{2}{3}}.$$

Zde čtveřina průseků s tečnou má vždy dva prvky pomyslné; jako výsledek zajímavý zbývá pouze fakt, že

tečna protíná astroidu ještě ve dvou bodech a jich tečny se protínají na kruhu opsaném $(O, 2\,m)$ v bodě N', který je diametrálně protějším s bodem N na normále.

Na přímce $P\,Q$ uvažujme bod E, jehož vzdálenosti od konců buďte

$$P\,E = b, \quad E\,Q = a \quad (a + b = 2\,m).$$

Promítnutím délek $P\,E$, $E\,Q$ do os $O\,y$ a $O\,x$ obdržíme

$$(E) \qquad x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi,$$

tedy známé kinematické vytvoření ellipsy; nyní uvažujme jako druhý příklad

b) *Evolutu ellipsy* právě řečené. Její normála má rovnici uvažovaného typu

$$a\,x \sin\varphi - b\,y \cos\varphi = c^2 \sin\varphi \cos\varphi, \quad c^2 = a^2 - b^2,$$

takže vychází jako zvláštní případ

„Komplexní parametry $z = e^{i\varphi}$ čtyř bodů na ellipse (E), jichž normály mají společný průsek, hoví charakteristickým rovnicím

$$\mathfrak{g}_2 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 = -1.$$

„Procházejí-li čtyři tečny astroidy společným bodem, procházejí také společným bodem příslušné jim čtyři normály ellipsy (jichž paty totiž jsou polohy bodu E na tečnách astroidy).

„Normála ellipsy v bodě φ seče evolutu její ještě ve čtyřech bodech; tečny evoluty v těchto bodech vedené (jsou jen dvě realné) se protínají v bodě

$$x = -\frac{c^2}{a}\cos\varphi, \qquad y = \frac{c^2}{b}\sin\varphi.$$

L.

Uvažujme čtveřinu parametrů hovící podmínkám $\mathfrak{g}_2 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = -1$; tato čtveřina stanoví na astroidě čtyři tečny a rovněž na evolutě ellipsy, a každá z těchto čtveřin přímkových má společný průsek (x, y) u astroidy a (X, Y) u evoluty ellipsy. Pak platí rovnice

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = (a + b) \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$a X \sin \varphi - b Y \cos \varphi = c^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

současně pro čtvero hodnot φ; pro tyto hodnoty bude tedy

$$\left(x - \frac{a X}{a - b}\right) \sin \varphi + \left(y + \frac{b Y}{a - b}\right) \cos \varphi = 0,$$

z čehož vychází

$$X = \frac{a - b}{a} x, \qquad Y = -\frac{a - b}{b} y, \tag{5}$$

t. j. affinita mezi průsekem tečen astroidy (x, y) a příslušných jim normál ellipsy (X, Y).

Rovnice $\mathfrak{g}_2 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = -1$ určují plně čtveřinu, známe-li její dva prvky, a ty lze voliti dle libosti. Tedy affinita (5) váže průsek (x, y) dvou tečen astroidy s průsekem (X, Y) normál ellipsy.

Dejme splynouti oběma tečnám astroidy; jich průsek přejde v bod astroidy M a průsek normál přejde ve střed křivosti ellipsy pro bod E na přímce $P\,Q\,M$. První z rovnic (5) dává následující konstrukci středu křivosti S ellipsy v její bodě E.

Úhlopříčnu opsaného obdélníka, která spojuje bod (a, b) se středem O, protněme pořadnicí bodu M na astroidě v bodě K; pořadnici bodu K pak odečteme od úsečky bodu M

$$\left(x - \frac{b}{a} x\right),$$

čímž vyjde úsečka X středu křivosti ellipsy.

Nahradíme-li v šestičlenném výrazu $\mathfrak{g}_2$ veličinu z_4 hodnotou

$$\frac{\mathfrak{g}_4}{z_1 z_2 z_3} = -\frac{1}{z_1 z_2 z_3},$$

obdržíme vztah

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_3) + \sin(\varphi_2 + \varphi_3) = 0, \tag{6}$$

jenž vyjadřuje podmínku, aby tři tečny čáry (1) sbíhaly ve společný bod. Rovnici tu lze rozmanitým způsobem interpretovati; tak jde-li o normály ellipsy, máme pro body na ellipse $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$; souřadnice bodů φ_1 a φ_2 znamenejme $x_1 y_1$ a $x_2 y_2$, bod φ_3 značme φ, rovnice (6) pak se přepíše na

$$(y_1 + y_2)\, x + (x_1 + x_2)\, y + (x_1 y_2 + x_2 y_1) = 0. \tag{6*}$$

L.

Je to rovnice přímky, která na ellipse vytíná paty φ_3, φ_4 dalších dvou normál jdoucích průsekem normál φ_1, φ_2.

Ve zvláštním případě $\varphi_1 = \varphi_2$ vychází tak výsledek Joachimsthalův, že středem křivosti ellipsy v bodě φ_1 procházejí další dvě normály její, které mají své paty na přímce stanovící na osách úseky $-x_1$, $-y_1$.

Úseky přímky (6^a) na osách jsou $-\xi$ a $-\eta$, kde délky

$$\xi = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_2 + y_1}, \qquad \eta = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_1 + x_2}$$

stanoví se na základě barycentrickém takto: Paty normál na ellipse buďte E_1, E_2, buď pak E_1' bod symetrický s E_1 vůči Oy; přímka $E_1' E_2$ seče Oy v bodě $x = 0$, $y = \eta$. Dále buď E_1'' bod symetrický s E_1 vůči Ox; přímka $E_1'' E_2$ seče Ox v bodě $x = \xi$, $y = 0$. —

Rovnice (6^a) zůstává též platnou, značí-li $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ souřadnice stop normál N_1, N_2 na kruhu $(a + b)$; průseky přímky (6^a) s tímto kruhem jsou stopy dalších dvou normál $N_3 N_4$; konstrukce přímky je táž jako předešle, při čemž na místo bodů E nastoupí body N.

Přistupme nyní k astroidě, abychom určili další dvě tečny procházející průsekem daných dvou tečen φ_1 a φ_2. Tečna astroidy v bodě φ obsahuje bod φ na kruhu poloměru m ($x = m \cos \varphi$, $y = m \sin \varphi$), který jest středem pošinované délky PQ; znamenejme jej K. Máme pak rovnici (6^a), ve které $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$ značí souřadnice bodů K_1, K_2 na tečnách φ_1, φ_2 a přímka rovnicí (6^a) určená pak seče střední kruh (K) ve dvou bodech K_3, K_4 kterými procházejí zbývající dvě tečny astroidy. Konstrukce přímky je táž jako předešle.

Zejména vidíme, že daným bodem M na astroidě procházejí další dvě reálné její tečny. Znamenejme x, y souřadnice středu K na tečně bodu M; přímka mající úseky na osách $-x$ a $-y$ protne kruh střední (K) ve dvou realných bodech; ty jsou středy tečen hledaných. Je zřejmo, že přímka tato obaluje astroidu polovičních rozměrů. —

Provádí-li se konstrukce na kruhu opsaném ($2\,m$), dochází se k výsledku: Zbývající dvě tečny astroidy vycházející z libovolného jejího bodu mají své *příční body* N_1, N_2 na tečně bodu diametrálně protějšího.

Konečně uvažujme jako příklad

c) oskulační tětivy ellipsy.

Tak sluje přímka, která spojuje bod φ ellipsy s bodem, ve kterém kruh oskulační seče ellipsu. Její rovnice

$$\frac{x \cos \varphi}{a} - \frac{y \sin \varphi}{b} = \cos 2\,\varphi$$

není uvažovaného typu; proto položíme $\varphi = \frac{\pi}{4} - \psi$ a u výsledku

$$b\,x\,(\cos \psi + \sin \psi) - a\,y\,(\cos \psi - \sin \psi) = a\,b\,\sqrt{2} \sin 2\,\psi$$

L.

provedeme transformaci souřadnic pravoúhlých v kosoúhlé

$$b\,x + a\,y = m\,\xi, \qquad b\,x - a\,y = n\,\eta;$$

v nich přímka má rovnici typu (1)

$$m\,\xi \sin\psi + n\,\eta \cos\psi = a\,b\,\sqrt{2}\sin 2\,\psi.$$

Oskulační tětiva ψ seče obalovou čáru ve čtyřech bodech, jichž tečny sbíhají ve společný bod

$$\xi = -\frac{2\,a\,b\,\sqrt{2}}{m}\cos\psi, \qquad \eta = -\frac{2\,a\,b\,\sqrt{2}}{n}\sin\psi;$$

pro zpětnou transformaci máme

$$x = \frac{m\,\xi + n\,\eta}{2\,b} = -a\,\sqrt{2}\,(\cos\psi + \sin\psi),$$

$$y = \frac{m\,\xi - n\,\eta}{2\,a} = -b\,\sqrt{2}\,(\cos\psi - \sin\psi),$$

t. j.

$$x = -2\,a\cos\varphi, \qquad y = -2\,b\sin\varphi.$$

Bod ten leží na ellipse dvojnásobných rozměrů a přísluší mu anomalie $\varphi + \pi$.

2. Isoptiky astroidy.

Dvě tečny astroidy svírající stálý úhel γ můžeme předpokládati za příslušné k parametrům φ a $\varphi + \gamma$. Pro jich průsečík nám rovnice

$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = m\sin 2\,\varphi$$

$$x\sin(\varphi + \gamma) + y\cos(\varphi + \gamma) = m\sin(2\,\varphi + 2\,\gamma)$$

podávají sečtením a odečtením

$$x\sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right) + y\cos\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\,m}{\sin\gamma}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\gamma\sin(2\,\varphi + \gamma),$$

$$x\cos\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right) - y\sin\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\,m}{\sin\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\gamma\cos(2\,\varphi + \gamma).$$

Z posledních rovnic pak máme dále

$$(x + i\,y)\,e^{i\left(\varphi + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{m}{\sin\gamma}\left(e^{i(2\varphi + \gamma)}\sin\frac{3\,\gamma}{2} + e^{-i(2\varphi + \gamma)}\sin\frac{\gamma}{2}\right),$$

a píšeme-li pro stručnost

$$\varphi + \frac{\gamma}{2} = \omega,$$

vychází pro geometrické místo průseků tečen astroidy svírajících úhel γ

(7) $$x + i y = \frac{m}{\sin \gamma}\left(\sin \frac{3\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} e^{-4i\omega}\right) e^{i\omega}.$$

Předpokládejme $0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}$, takže součinitelé budou veličiny kladné; čára ta jest hypocykloida, kterou opíše bod hybného kruhu poloměru r, vzdálený od jeho středu o délku $g = \frac{m}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$, při jeho kotálení po kruhu čtyřnásobného poloměru:

$$3r = \frac{m \sin \frac{3\gamma}{2}}{\sin \gamma}.$$

Tak na př. je geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož ramena se dotýkají astroidy, prodloužená kotálnice, jejíž pevný kruh má poloměr $4r$, hybný kruh poloměr r, a rámě opisujícího bodu

$$g = 3r = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

V případě $\gamma > \frac{2\pi}{3}$, kdy $\sin \frac{3\gamma}{2}$ je záporný, zaměníme ω za $\omega + \pi$, výsledek zůstane až na to, že rámě opisujícího bodu změní znamení, t. j. bod opisující bude na opačné straně středu hybného kruhu než bod, který se při počátku kotálení nacházel na pevném kruhu.

Případ $\gamma = 120^0$ podává střední kruh

$$x + i y = m\, e^{i(\pi - 3\varphi)};$$

jest ostatně na rovnici hybné přímky

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = m \sin 2\varphi$$

viditelno, že obsahuje bod $\pi - 3\varphi$

(K') $$x = -m \cos 3\varphi, \qquad y = m \sin 3\varphi,$$

který tedy s bodem K ($m \cos \varphi$, $m \sin \varphi$) tvoří průseky přímky a kruhu středního. Bod K' patrně leží na přímkách φ, $\varphi + \frac{2\pi}{3}$, $\varphi + \frac{4\pi}{3}$, kterým na ellipse odpovídají vrcholy Steinerových trojúhelníků — trojúhelníky ty jeví se jako průměty pravidelných trojúhelníků do kruhu vepsaných, a jsou tedy maximálního obsahu:

„Tečny astroidy, kterým na ellipse příslušejí vrcholy Steinerova trojúhelníku, protínají se na středním kruhu (m) v bodě $\omega = \pi - 3\varphi$.

L.

Na tom spočívá řešení trisekčního problému, které v podstatě se kryje s řešením Nikomédovým: Aby se daný úhel $B\,O\,C$ rozdělil ve tři stejné díly, prodloužíme rameno $B\,O$ na opačnou stranu do $O\,x$, a postavíme kolmici $O\,y$ na $O\,x$; zvolivše na druhém rameni libovolně bod C, sestrojíme Nikomédovu konchoidu s pólem C a řídící přímkou $O\,y$, nanášejíce na paprsky svazku (C) od jich průseku s přímkou $O\,y$ stálou délku $2\,.\,O\,C$. Ze čtyř průseků konchoidy a osy $O\,x$ jeden má od C vzdálenost $O\,C$, ostatní tři L, L', L'' jsou vrcholy úhlů $B\,L\,C$, $B\,L'\,C$, $B\,L''\,C$, z nichž nejmenší rovná se třetině daného úhlu $B\,O\,C$ a druhé dva se od něho liší o násobky 120^0.

Přímky $C\,L$, $C\,L'$, $C\,L''$ obsahují skutečně tři polohy hybné přímky $P\,Q$ velikosti $2\,.\,O\,C$, a příslušná astroida má střední kruh poloměru $O\,C$.

Konstrukci tuto bylo by lze mechanisovati, avšak užitečnost tohoto přístroje byla by sotva větší než obyčejný postup s proužkem papíru, na němž vyznačeny dva body P, Q vzdálenosti $2\,O\,C$; body ty šineme tak dlouho po kolmých osách až okraj proužku zachytí bod C.

* * *

Je třeba se ještě zmíniti o čáře průseků kolmých tečen. Ježto vzdálenost středu O od tečny astroidy obnáší $m \sin 2\varphi$, jsou tečny na sobě kolmé φ, $\varphi \pm \frac{\pi}{2}$ právě tak jako tečny rovnoběžné φ, $\varphi + \pi$ od středu stejně vzdáleny.

Čára je tedy místem vrcholů opsaných čtverců; střed čtverců je bod O; jeli p tečna astroidy, spustíme na ni kolmici $O\,H$, a od její paty H naneseme na tečnu na obě strany délku $O\,H = H\,M_1 = H\,M_2$; koncové body $M_1\,M_2$ délek těch jsou body naší čáry. Normála čáry v bodě průsečném tečen φ a $\varphi + \frac{\pi}{2}$ obsahuje bod na kruhu poloměru

$$\frac{2\,m\,\sqrt{2}}{3}$$

v poloze $\omega = \varphi + \frac{\pi}{4}$, t. j. právě uprostřed mezi směry $O\,N$, $O\,N_1$ určujícími polohu příčních bodů obou přímek. Čára jest ostatně růžice

$$x + i\,y = m\,\sqrt{2}\cos 2\,\omega\, e^{-i\omega},$$

čili v polárních souřadnicích

$$\varrho = m\,\sqrt{2}\cos 2\,\omega.$$

Na každé tečně astroidy leží dva body růžice pocházející od tečen na ni kolmých. Ze zbývajících čtyř průsečíků této přímky s růžicí jsou dva vždy pomyslné.

* * *

L.

Opsané trojúhelníky rovnostranné mají strany

$$\varphi, \quad \varphi + \frac{\pi}{3}, \quad \varphi + \frac{2\pi}{3},$$

takže jeden vrchol leží na středním kruhu a dva na hypocykloidě

$$x + i y = \frac{m}{\sqrt{3}} (2 + e^{-4i\omega}) e^{i\omega},$$

$$\omega = \varphi + \frac{\pi}{6}, \quad \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Trojúhelníky ty se řadí do skupin po šesti $\left(\varphi + \frac{\nu\pi}{3}, \nu = 0, 1, \ldots 5\right)$ a strany jejich mají tuto vzájemnou polohu: Libovolným bodem na kruhu středním vedená Steinerova trojice poloh hybné přímky, a z bodu diametrálního přímky s nimi rovnoběžné. Každý opsaný trojúhelník má jednu stranu z jedné a dvě z druhé trojice.

3. O normálách ellipsy.

Budeme uvažovati ellipsu (a, b)

(1) $$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi,$$

jejíž polouosy a, b obyčejně budeme považovati za kladné; vedle té budeme ještě uvažovati jiné ellipsy, jichž polouosy (jako a', b') bude nutno pojímati algebraicky, t. j. připisovati jim určité znamení.

Rovnice normály ellipsy (1) zní

(2) $$a X \sin \varphi - b Y \cos \varphi = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi;$$

ze čtyř normál ellipsy jdoucích daným bodem (X, Y) bude jedna předem určitelna, leží-li tento bod na určité ellipse souosé, jejíž polouosy a', b' hoví podmínce

(3) $$a a' - b b' = a^2 - b^2.$$

Neboť z polohy bodu na ellipse (a', b') určí se jeho anomalie Θ bezprostředně

$$X = a' \cos \Theta, \quad Y = b' \sin \Theta,$$

a po dosazení těchto hodnot rovnice (2) nabude tvaru

(4) $$a a' \sin \varphi \cos \Theta - b b' \cos \varphi \sin \Theta = (a^2 - b^2) \sin \varphi \cos \varphi$$

a rovnice (3) ukazuje, že tato poslední rovnice je splněna pro $\varphi = \Theta$.

Problém normál ellipsy vycházejících z daného bodu se v tomto případě rozpadá v lineární a v úkol stupně 3.

L.

Vložíme-li do poslední rovnice $\varphi = \Theta$ a odečteme výsledky, obdržíme po dělení na $\sin \frac{\varphi - \Theta}{2}$ pro zbývající tři normály

$$(4^*)\qquad \begin{aligned} a\,a' \cos\Theta \cos\frac{\varphi+\Theta}{2} + b\,b' \sin\Theta \sin\frac{\varphi+\Theta}{2} &= \\ = (a^2 - b^2)\cos(\varphi+\Theta)\cos\frac{\varphi-\Theta}{2}&. \end{aligned}$$

Ellipsy (a', b') určené podmínkou (3) nazývejme adjunkčními; neboť pro jich body se problém normál základní ellipsy (a, b) rozpadá. Polouosy adjunkční ellipsy volme za souřadnice *representačního* bodu $a' = \xi$, $b' = \eta$; representační body ellips adjunkčních naplňují určitou přímku $\varkappa$

$$(\varkappa)\qquad a\,\xi - b\,\eta = a^2 - b^2.$$

Přímka ta obsahuje patrně body $\xi = a$, $\eta = b$, dále $\xi = \eta = a + b$, $\xi = -\eta = a - b$; oba poslední representují kruhy poloměrů $a \pm b$, které jsou zvláštní případy adjunkčních ellips.

* * *

Problém normál z bodu $M\,(X, Y)$ k ellipse (a, b) bude řešen, známe-li všecky čtyři adjunkční ellipsy (a', b') jím procházející; neboť každá z nich dává jednu normálu jednoznačně.

Souřadnice ξ, η representačního bodu ellipsy adjunkční hoví rovnici

$$(5)\qquad \frac{X^2}{\xi^2} + \frac{Y^2}{\eta^2} = 1,$$

která při stálém ξ, η a proměnném $X\ Y$ charakterisuje ellipsu (ξ, η). Při stálých X, Y a proměnných ξ, η rovnice tato odpovídá čáře křížové mající asymptoty v přímkách $\xi = \pm X$, $\eta = \pm Y$. Vrcholy obdélníka určeného asymptotami jako svými stranami tvoří vrcholy svazku ellips; jich representační body pak vytvoří křížovou čáru. Přímka $\varkappa$ seče křížovou čáru ve čtyřech bodech, které representují čtyři adjunkční ellipsy, čímž problém normál ellipsy (a, b) z bodu M řešen.

Konstrukce bodu křížové čáry provede se na základě rovnic

$$\xi = X \sec\varphi, \qquad \eta = Y \operatorname{cosec}\varphi;$$

její tečna má směrnici

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{\eta\cos^2\varphi}{\xi\sin^2\varphi}.$$

Naneseme na osy souřadnic od počátku úseky $\xi \sin^2\varphi$ a $\eta\cos^2\varphi$; přímka spojující jich koncové body je rovnoběžna s tečnou křížové čáry.

* * *

L.

Poměr $a' : b'$ nemůže splynouti s poměrem $a : b$, aniž by obě ellipsy splynuly; mohou si však tyto poměry býti opačně rovny, a sice nalezneme pro ten případ

$$a' = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} a, \qquad b' = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} b;$$

vedeme středem O rovnoběžku se spojkou vrcholů a, b základní ellipsy; její průsečík s přímkou $\varkappa$ je bod (a', b'). Tato adjunkční ellipsa podobná ellipse základní jest ellipsa Frégierova; každý její bod F je středem involuce na základní ellipse, kterou na ní vytvoří ramena pravého úhlu, otáčeného kolem svého vrcholu na ellipse.[1]) Veďme bodem F různé tětivy ellipsy (a, b), a nad každou jako průměrem opišme kruh; veškery tyto kruhy mají společný bod na ellipse, který je patou jedné z normál vycházejících z bodu F.

Další zajímavý je zvláštní případ, kdy $a a' + b b' = 0$, t. j. kdy průvodiče bodů (a, b) a (a', b') stojí na sobě kolmo;

$$a' = \frac{a^2 - b^2}{2a}, \qquad b' = - \frac{a^2 - b^2}{2b}.$$

Rovnice (4) tu zní

$$\sin \varphi \cos \Theta + \cos \varphi \sin \Theta = \sin 2\varphi$$

tedy

$$\sin (\varphi + \Theta) = \sin 2\varphi,$$

což vyžaduje buď $\varphi = \Theta$ aneb $\Theta = \pi - 3\varphi$.

Řešení

$$3\varphi = \pi - \Theta + 2\nu\pi$$

vede na Steinerovy trojúhelníky na ellipse

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_0 + \frac{4\pi}{3},$$

bod $\varphi = \Theta$ je pata satellitní normály příslušné trojice.

Poněvadž zde $\varphi_0 = \frac{\pi - \Theta}{3}$, dospíváme také k řešení trisekce úhlu na základě čáry křížové.

* * *

Na čáru křížovou vede také problém tečen astroidy z daného bodu. Jde o polohy latě stálé délky $2m$, jejíž konce se šinou po osách $O x$ a $O y$. Poloha latě obsahující daný bod M bude určena, známe-li ellipsu jdoucí bodem M, jejíž poloosy a, b hoví podmínce $a + b = 2m$. Zavedeme representační body $\xi = a$, $\eta = b$ těchto ellips, a jsme vedeni na čáru křížovou

$$\frac{X^2}{\xi^2} + \frac{Y^2}{\eta^2} = 1,$$

[1]) Srov. Časopis pro pěst. math. a fys. roč 45 (Drobnosti z geometrie), čl. 16, tr. 370 (1916).

kde X a Y značí souřadnice bodu M. Průsečíky její s přímkou $\xi + \eta = 2m$ stanoví čtyři ellipsy žádané vlastnosti. Pro jednu z těchto ellips pak přísluší bodu M určitá anomalie φ, jež se vyskytuje v rovnici latě

$$x \sin \varphi + y \cos \varphi = m \sin 2\varphi,$$

a jež tedy na kruhu $(O, 2m)$ stanoví příční bod latě. —

Lať φ seče ellipsu (a, b) v druhém „podružném" bodě, jehož anomalie buď ψ. Dosazením hodnot

$$x = a \cos \psi, \qquad y = b \sin \psi$$

do poslední rovnice obdržíme vztah

$$\cos \frac{3\varphi + \psi}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cos \frac{\varphi - \psi}{2},$$

a po zavedení komplexních parametrů

$$z = e^{i\varphi}, \qquad u = e^{i\psi}$$

$$u z^3 + 1 = \frac{a - b}{a + b} (z^2 + u z).$$

Měníme-li podružný bod u na ellipse, tvoří příslušné mu kinematické body z skupiny kubické involuce; jich symetrické úkony hoví podmínkám

$$\mathfrak{f}_2 = \frac{\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_3} = -\frac{a - b}{a + b},$$

jež plynou z hodnot

$$u \mathfrak{f}_1 = \lambda, \quad \mathfrak{f}_2 = -\lambda, \quad u \mathfrak{f}_3 = -1; \quad \lambda = \frac{a - b}{a + b}.$$

Bod ellipsy, s bodem podružným u diametrální, leží s třemi body z trojice involuční na témž kruhu. Normály bodů z a u procházejí společným bodem.

* * *

Hledejme obalovou čáru ellips souosých (a, b), pro něž součet poloos $a + b = 2m$ je stálý.

Máme tu rovnice

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \qquad a + b = 2m,$$

$$-b x^2 + a y^2 = a b (b - a).$$

Řešení dává

$$x^2 = \frac{a^3}{2m}, \qquad y^2 = \frac{b^3}{2m},$$

tedy

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2m)^{\frac{2}{3}}.$$

L.

„Astroida se jeví jako obalová čára ellips, jichž representační body tvoří přímku $x + y = 2m$.

Pro dotykový bod $x = 2m\cos^3\varphi$, $y = 2m\sin^3\varphi$, tedy

$$\cos^2\varphi = \frac{a}{2m}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{b}{2m}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{a-b}{a+b}.$$

* * *

Podmínce (3) se vyhoví substitucí

$$a' = a + \mu b, \qquad b' = b + \mu a,$$

kde μ je libovolné. Rovnici adjunkční ellipsy pišme

$$x^2\left(\frac{b+a\mu}{a+b\mu}\right)^2 + y^2 = (b+a\mu)^2;$$

její dotykový bod s obalovou čarou určíme derivováním dle μ a nalezneme

$$x^2 = \frac{a}{c^2}(a+b\mu)^3, \qquad y^2 = -\frac{b}{c^2}(b+a\mu)^3; \qquad c^2 = a^2 - b^2,$$

a odtud

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}},$$

t. j.

„Adjunkční ellipsy problému normál příslušné k ellipse (a, b) obalují její evolutu.

Z výrazů pro polohu středu křivosti ellipsy

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi$$

a z uvedených hodnot x^2, y^2

$$x^2 = \frac{a a'^3}{c^2}, \qquad y^2 = -\frac{b b'^3}{c^2}$$

plyne pro anomalii dotykového bodu ellipsy

$$\cos^2\varphi = \frac{a a'}{c^2}, \qquad \sin^2\varphi = -\frac{b b'}{c^2}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{a a' + b b'}{c^2}.$$

* * *

Vraťme se k normálám ellipsy (a, b) z bodů adjunkční ellipsy (a', b'); tyto tvoří na původní ellipse svými patami kubickou involuci a promětnou s ní řadu (satellitních) bodů, které pocházejí od jednoznačně určených satellitních normál $\varphi = \theta$.

Bod m na ellipse (a', b') považujme za střed koule, která se dotýká ellipsy (a, b); koule takové jsou čtyři, je však jedna z nich určena jednoznačně satellitní normálou jako svým poloměrem. Tyto satellitní koule obalují určitou plochu osmého stupně, kdežto koule kubické řady obalují plochu stupně 24.

Zvláštní případ plochy 8. stupně nastane, když ellipsa (a', b') je kruh poloměru $a \pm b$; v tom případě máme t. zv. plochu kotálnic prodloužených neb zkrácených, na které leží kotálnice vytvořené valením kruhu po kruhu (m) dvojnásobného poloměru. Podrobně o těchto plochách pojednáno bude na jiném místě.

* * *

Uvažujme normály ellipsy v bodech φ a φ_1; adjunkční ellipsy je protínají každou ve dvou bodech, z nichž jeden lze zvlášť vyznačiti jako *prvotní*, druhý je podružný. Průsek s normálou φ prvotní má souřadnice

$$x = a' \cos \varphi, \qquad y = b' \sin \varphi,$$

pro prvotní body na normálách φ a φ_1 platí tedy

$$\frac{x}{x_1} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}, \qquad \frac{y}{y_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1},$$

takže se řady prvotních průseků adjunkčních ellips s dvěma normálama promítají do os v řady podobné; odtud:

„Adjunkční ellipsy problému normál k ellipse vytínají na normálách podobné řady bodů prvotních."

Přiřaděné si body řad na dvou normálách vytvoří svými spojkami parabolu; bod O se jeví jako průsek tečen na sobě kolmých a leží tedy na řídících přímkách všech těchto parabol.

4. O některých zvláštních křivkách stupně 4.

Nechť se šine úhel stálé velikosti tak, aby jedno jeho rameno se dotýkalo určitého kruhu, a určitý bod druhého ramene při tom opisoval danou přímku; vrchol úhlu při tom opíše jistou cirkulární křivku 4. stupně, pro niž se hledá analytické vyjádření.

Stálý úhel buď $\varkappa$, přímka opisovaná bodem B ramene $M B$ měj rovnici $x = c$, kruh, jehož se rameno $M T$ (v bodě T) dotýká, měj poloměr a a střed v počátku souřadnic; konečně znamenejme $B M = b$ vzdálenost bodu B od vrcholu úhlu M.

Znamenejme na okamžik α úhel $X O T$, rovnice tečny $M T$ bude

$$(\alpha) \qquad x \cos \alpha + y \sin \alpha = a;$$

značí-li dále τ úhel, jejž vektor $B M$ svírá se směrem $O x$, máme

$$(\beta) \qquad \cos \tau = \frac{x - c}{b}, \qquad \sin \tau = \frac{y - p}{b},$$

kde $y = p$ udává polohu bodu B v okamžiku pohybu, a x, y jsou souřadnice vrcholu M hybného úhlu $\varkappa$. Z obrazce vychází vztah mezi úhly

$$\alpha + \frac{\pi}{2} = \varkappa + \tau,$$

jímž se rovnice (β) převedou na

$$-\sin\alpha = \frac{x-c}{b}\cos\varkappa - \frac{y-p}{b}\sin\varkappa,$$

$$\cos\alpha = \frac{x-c}{b}\sin\varkappa + \frac{y-p}{b}\cos\varkappa;$$

dosazením těchto hodnot přepíše se rovnice (α) na tvar

$$(y-p)(x\cos\varkappa + y\sin\varkappa) + (x-c)(x\sin\varkappa - y\cos\varkappa) = a\,b.$$

S touto rovnicí spojme podmínku $B\,M = b$ t. j.

$$(y-p)^2 + (x-c)^2 = b^2,$$

abychom vyloučili p. Máme tak

$$[b^2 - (x-c)^2]\,(x\cos\varkappa + y\sin\varkappa)^2 = (x-c)^2\,(x\sin\varkappa - y\cos\varkappa)^2$$
$$- 2\,a\,b\,(x-c)\,(x\sin\varkappa - y\cos\varkappa) + a^2\,b^2,$$

čili po redukci

(1)
$$(x-c)^2\,(x^2+y^2) + a^2\,b^2 = b^2\,(x\cos\varkappa + y\sin\varkappa)^2$$
$$+ 2\,a\,b\,(x-c)\,(x\sin\varkappa - y\cos\varkappa).$$

Mechanické vytvoření ukazuje, že normála čáry obsahuje průsek přímek $O\,T$ a $B\,x$ ($\parallel O\,x$) jakožto normál řídících čar.

Případ $a = 0$ se nám vyskytl při studiu určitého konoidu stupně 4. při otázce osvětlení plochy kotálnic 4. stupně v naší rozpravě o plochách kotálnic (roč. *XXVI.*, č. 7) str. 146–7. Zvláštní případ $c = 0$ uvažoval Sluse

Případ $a = 0$, $c = b\sin\varkappa$ dává strofoidu; členy na x nezávislé se tu vyváží a odštěpí se činitel x:

$$(x - 2\,b\sin\varkappa)\,(x^2+y^2) = b^2\cos\varkappa\,(x\cos\varkappa + 2\,y\sin\varkappa).$$

Z rovnice (1) plyne, že kruhy $x^2 + y^2 =$ konst. sekou čáru ve čtyřech bodech, kdežto ostatní kruhy ji sekou v šesti bodech; tudíž *střed kruhu O je singulárním ohniskem* čáry (1). Úběžný bod osy $O\,y$ je dvojným bodem čáry.

Více než rovnice (1) nás o povaze čáry poučí parametrické vyjádření. Spojíme rovnici (α) s rovnicemi

$$\alpha = \varkappa + \tau - \frac{\pi}{2}, \qquad x = c + b\cos\tau,$$

vyjde

$$(2) \qquad x = c + b \cos \tau, \qquad y = \frac{(c + b \cos \tau) \sin (\tau + \varkappa) - a}{\cos (\tau + \varkappa)};$$

čára je tedy racionální.

Bodu dvojnému odpovídají různé parametry, tedy dle tvaru x hodnoty τ a $-\tau$; porovnáním obou výrazů pro y

$$\frac{(c + b \cos \tau) \sin (\tau + \varkappa) - a}{\cos (\tau + \varkappa)} = \frac{(c + b \cos \tau) \sin (\varkappa - \tau) - a}{\cos (\varkappa - \tau)}$$

vychází rovnice pro parametry bodů dvojných

$$[(c + b \cos \tau) \cos \tau - a \sin \varkappa] \sin \tau = 0.$$

Hodnota $\sin \tau = 0$ může odpovídati bodu dvojnému, jen když vymizí také derivace $\frac{dy}{d\tau}$, což nastává při $\sin \tau = 0$ pro $c + b \cos \tau = a \sin (\tau + \varkappa)$; pro oba případy $\tau = 0$ a $\tau = \pi$, t. j. pro $b + c = a \sin \varkappa$ a pro $b - c = a \sin \varkappa$ vymizí také hranatá závorka, takže ve všech případech dvojné body čáry přísluší parametrům τ určeným rovnicí

$$(3) \qquad b \cos^2 \tau + c \cos \tau - a \sin \varkappa = 0,$$

čili

$$(3^*) \qquad x^2 - c\,x - a\,b \sin \varkappa = 0.$$

Tato rovnice určuje dvě přímky, z nichž každá seče čáru ve dvou bodech dvojných, z nichž jeden je v nekonečnu.

Pořadnice hoví rovnici

$$y\,[(x - c)^2 - b^2 \sin^2 \varkappa] = b \cos \varkappa\,[a\,c - (a - b \sin \varkappa)\,x].$$

Asymptoty realné jsou $\left(\tau + \varkappa = \pm \frac{\pi}{2}\right)$

$$x = c \pm b \sin \varkappa.$$

Případ $\varkappa = 0$ je lehké zobecnění konchoidy Nikomédovy

$$(4) \qquad (x - c)^2 (x^2 + y^2) + a^2 b^2 = b^2 x^2 - 2\,a\,b\,y\,(x - c),$$

při čemž možno připustit také záporná b (což odpovídá volbě $\varkappa = \pi$). Poblíž asymptoty $x = c$ chová se křivka jako hyperboly

$$y = -\frac{(a \pm c)\,b}{x - c}.$$

V úběžném bodě osy y splývají dva body dvojné, obyčejný bod dvojný je

$$x = 0, \qquad y = \frac{a\,b}{c}.$$

V případě $c^2 = a^2$ odštěpí se faktor $x - c$, takže čára je 3. stupně ($\varepsilon = \pm 1$)

(5) $$(x - c)(x^2 + y^2) = b^2 (x + c) - 2\,a\,b\,y, \qquad c = \varepsilon\,a.$$

Pošiňme počátek do dvojného bodu $(0, \varepsilon\,b)$, kladouce $y = \eta + \varepsilon\,b$:

$$x\,(x^2 + \eta^2 + 2\,\varepsilon\,b\,\eta) = c\,(x^2 + \eta^2),$$

a v souřadnicích polárních

$$r = c \sec \varphi - 2\,\varepsilon\,b \sin \varphi.$$

Čára je cissoida přímky $x = c$ a kruhu $r = 2\,\varepsilon\,b \sin \varphi$ t. j. $x^2 + \eta^2 = 2\,\varepsilon\,b\,\eta$ (počátek souřadnic v bodě dvojném). Tečny v bodě dvojném jsou realné pro $|\,b\,| > a$, pomyslné pro $|\,b\,| < a$, úvrat nastává pro $|\,b\,| = a$, při čemž tečna svírá s $O\,x$ úhel $\pm 45^0$.

Řídící přímka cissoidy je tu rovnoběžna s průměrem řídícího kruhu, jenž obsahuje pól (bod dvojný). Veškery tyto cirkulární čáry 3. stupně lze vytvořiti hořejším jednoduchým mechanismem.

* * *

Případ $\varkappa = 90^0$ dává čáru symetrickou

(6) $$(x - c)^2 (x^2 + y^2) + a^2 b^2 = b^2 y^2 + 2\,a\,b\,x\,(x - c).$$

Konstrukci bodů této čáry lze také takto provésti: Buď C bod $(c, 0)$; vedeme $C\,H \parallel O\,T$, $C\,H = b$, a bodem H vedená rovnoběžka s asymptotou (t. j. $H\,y$) protne tečnu $M\,T$ kruhu (a) v bodě M na čáře (6). Dvojné body leží na $O\,x$.

Je-li mimo to $c = 0$, vzniká čára o dvojí symetrii[1])

(7) $$x^2 (x^2 + y^2) + a^2 b^2 = b^2 y^2 + 2\,a\,b\,x^2.$$

Na paprsku $O\,T\,H$ svazku (O) vytkneme body T, H dle podmínek $O\,T = a$, $O\,H = b$, a vedeme kolmice $T\,M$ na $O\,T$, $H\,M$ na $O\,x$; průsečný bod je bod M na čáře.

Dvojné body $y = 0$, $x = \pm \sqrt{a\,b}$; asymptoty $x = \pm\,b$. V případě $b < 0$ probíhá větev $y > 0$ nad přímkou $y = a$, dotýkajíc se ve svém vrcholu kruhu (a).

V souřadnicích kruhových $u = x^2 + y^2$ a y se rovnice čáry píše

$$u^2 - u\,y^2 - 2\,a\,b\,u + (2\,a\,b - b^2)\,y^2 + a^2 b^2 = 0,$$

derivace je

$$u' = \frac{d\,u}{d\,y} = \frac{2\,y\,(u + b^2 - 2\,a\,b)}{2\,u - y^2 - 2\,a\,b};$$

[1]) Zmínku o ní viz H. Wieleitner, Spez. ebene Kurven (Leipzig, 1908), str. 74.

ve vrcholech $x = 0$, $y = \pm a$, $u = a^2$ tedy

$$\frac{1}{2} u' = \pm \frac{(a - b)^2}{a - 2b},$$

což jest pořadnice středu křivosti ve vrcholu. Pro případ $b = \frac{a}{2}$ má tedy čára s tečnami ve vrcholech styk čtyřbodový.

Rovnici čáry lze též psáti

(7ª) $$y = \pm \frac{x^2 - ab}{\sqrt{b^2 - x^2}}.$$

Ve zvláštním případě $b = 2a$ přechází čára (7) v trisekantu. V polárních souřadnicích s pólem O, osou Oy zní rovnice čáry skutečně

$$r = a \sec \frac{\varphi}{2}.$$

„Trisekanta se jeví jako geometrické místo vrcholu pravého úhlu, jehož jedno rameno se dotýká pevného kruhu (poloměru a), a určitý bod druhého ramene, jehož vzdálenost od vrcholu rovná se průměru pevného kruhu, opisuje průměr tohoto.

Uvažujíce v poslední konstrukci trojúhelník OHM, nacházíme, že je rovnoramenný, ana jeho výška TM prochází středem T základny OH:

„Trisekanta je geometrické místo vrcholů rovnoramenných trojúhelníků, majících stálou délku základny ($2a$) a jeden její koncový bod pevný, při čemž protilehlé rameno má stálý směr (Oy)."

* * *

Předpokládejme existenci případu, kdy v rovnicích (2) vyskytne se y v neurčitém tvaru $\frac{0}{0}$. Pro příslušný úhel τ jest

$$\tau = \pm \frac{\pi}{2} - \varkappa,$$

tedy podmínka zní

$$\pm (c \pm b \sin \varkappa) = a;$$

v tom případě se čára rozpadne v přímku $x = c \pm b \sin \varkappa$ ($x = \pm a$) a v cirkulární čáru 3. stupně.

Čitatele ve výrazu (2) pro y možno psáti při podmínce

(8ª) $$c + \varepsilon b \sin \varkappa = \varepsilon a, \quad \varepsilon = \pm 1$$

takto:

$$c \sin(\tau + \varkappa) + \frac{b}{2} \sin(2\tau + \varkappa) + \frac{b}{2} \sin \varkappa - a$$

$$= c \left[\sin(\tau + \varkappa) - \sin \frac{\varepsilon \pi}{2}\right] + \frac{b}{2}\left[\sin(2\tau + \varkappa) - \sin \varkappa\right]$$

$$= b \sin \tau \cos(\tau + \varkappa) + 2c \sin\left(\frac{\tau + \varkappa}{2} - \frac{\varepsilon \pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\tau + \varkappa}{2} + \frac{\varepsilon \pi}{4}\right),$$

2*

a máme tak pro naši čáru parametrické vyjádření

$$x = c + b \cos \tau, \qquad y = b \sin \tau - c \operatorname{cotg}\left(\frac{\tau + \varkappa}{2} + \frac{\varepsilon \pi}{4}\right). \tag{8}$$

Jeden dvojný bod původní čáry přešel v průsek čáry 3. stupně s přímkou $x = \varepsilon a$, pro jeho paramétr máme

$$b \cos \tau = \varepsilon a - c = \varepsilon b \sin \varkappa, \qquad \cos \tau = \varepsilon \sin \varkappa,$$

druhý kořen rovnice (3) jest

$$\cos \tau = -\frac{\varepsilon a}{b}, \tag{8^b}$$

a ten dává skutečný bod dvojný; souřadnice jeho se vypočtou dle (2)

$$x = c + b \cos \tau = -\varepsilon b \sin \varkappa, \qquad y = \frac{a + \varepsilon b \sin \varkappa \sin (\tau + \varkappa)}{-\cos (\tau + \varkappa)};$$

dosadíme-li sem $b \sin \tau = \sqrt{b^2 - a^2}$, vyjde

$$y = \frac{a b + \varepsilon b \sin \varkappa (\cos \varkappa \sqrt{b^2 - a^2} - \varepsilon a \sin \varkappa)}{\varepsilon a \cos \varkappa + \sin \varkappa \sqrt{b^2 - a^2}} = \varepsilon b \cos \varkappa.$$

„Čára (8) má dvojný bod

$$x = -\varepsilon b \sin \varkappa, \qquad y = \varepsilon b \cos \varkappa. \tag{8^b}$$

Z asymptot jedna odpadne a zbývá jako asymptota čáry (8)

$$x = c - \varepsilon b \sin \varkappa = \varepsilon (a - 2 b \sin \varkappa) = 2 c - \varepsilon a.$$

Každou racionální cirkulární čáru 3. stupně lze tímto způsobem vytvořiti: Volíme sing. ohnisko O (4 podmínky), realnou asymptotu (2) a dvojný bod (3), čímž je čára určena.

Vedeme-li osu $O x$ kolmo na asymptotu, máme určený počátek O, dvojným bodem jsou stanoveny konstanty b a $\varkappa$, asymptotou pak je určení doplněno, ana stanoví parametr a.

* * *

Ve své práci o plochách kotálnic[1]) uvažoval jsem plochu, kterou vytvoří poloměr hybného kruhu (loukoť) kotáleného po kruhu stejně velkém tak, aby roviny obou kruhů svíraly stálý úhel α. Přímková tato plocha je 4. stupně a její rovnici lze přepsati na tvar — značíme a poloměr pevného a hybného kruhu —

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2) y^2 + [(1 - k^2) z^2 - 2 a k z] y^2 - k^2 x^2 z^2 + \\ + \frac{1}{4} [(1 - k^2) z^2 - 2 a k z]^2 = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

[1]) Rozpravy České Akademie II. tř., roč. 26, čís. 7 (1916), čl. 8 str. 39, rovnice (21) [O čarách a plochách, jež se vytvořují při kotálení kruhu po čáře rovinné, atd.].

čili

$$(9^*)\qquad x = \frac{y^2 + \frac{1-k^2}{2} z^2 - a\,k\,z}{\sqrt{k^2 z^2 - y^2}}, \qquad k = tg\,\frac{\alpha}{2}.$$

Rovnice tato pro $z =$ konst. je tvaru (7^*), vyměníme-li označení os; znamenáme-li parametry křivky $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, mají v našem případě hodnoty

$$\mathfrak{b} = k\,z, \quad \mathfrak{a} = a - \frac{1-k^2}{2\,k} z = a - z\,cotg\,\alpha.$$

„Veškery řezy plochy loukotí příslušné ke sférické epicykloidě 4. stupně na rovinách rovnoběžných s rovinou pevného kruhu se tedy vytvoří vrcholem pravého úhlu, jehož jedno rameno se stále dotýká známého kruhu a určitý bod druhého ramene probíhá pevný jeho průměr."

A sice leží střed tohoto kruhu na ose $O\,z$, jeho poloměr jest $a - z\,cotg\,\alpha$, pevný průměr jest rovnoběžný s dvojnou přímkou $O\,x$ plochy loukotí, a vzdálenost bodu na druhém rameni od vrcholu pravého úhlu obnáší $z\,tg\,\frac{\alpha}{2}$.

Zejména je řez na rovině $z = a\,tg\,\alpha$ čarou kappa

$$(x^2 + y^2)\,y^2 = \left(a\,tg\,\alpha\,tg\,\frac{\alpha}{2}\right)^2 x^2,$$

kdežto řez $z = 2\,a\,k$ odpovídá parametrům $\mathfrak{a} = k^2 a$, $\mathfrak{b} = 2\,a\,k^2 = 2\,\mathfrak{a}$ a je tedy trisekantou:

$$x^2 + y^2 = \frac{4\,c^4}{4\,c^2 - y^2}, \qquad c = a\,k^2.$$

Asymptoty všech řezů $z = konst.$ na uvažované ploše tvoří dvě roviny $y = \pm\, z\,tg\,\frac{\alpha}{2}$.

Řídicí kruhy mechanického vytvoření těchto řezů leží na rotačním kuželi

$$x^2 + y^2 = cotg^2\,\alpha\,(z - a tg\,\alpha)^2.$$

* * *

Zvláštní transformace. V souřadnicích kosoúhlých nebo pravoúhlých buď dána křivka (m); libovolným bodem jejím m veďme rovnoběžku s osou $O\,y$, která protne $O\,x$ v bodě m'; tímto bodem pak vedeme přímku p rovnoběžně s průvodičem $O\,m$. Touto transformací přiřazena každému bodu roviny určitá přímka p, a přímky odpovídající bodům na dané čáře (m) obalují určitou čáru (M). Abychom stanovili dotykový bod přímky p

s obalovou čarou, znamenejme ξ, η souřadnice bodu m, takže η jest určitá funkce proměnné ξ. Přímka p má rovnici

$$(p) \qquad \frac{x}{\xi} - \frac{y}{\eta} = 1 \text{ č. } \eta x - \xi y = \xi \eta.$$

Pro bod dotykový M podá derivování druhé rovnice

$$(p') \qquad \eta' (x - \xi) = y + \eta,$$

t. j. bod M je průsek s přímkou p', která je rovnoběžna s tečnou $m\,t$ základní čáry (m) a obsahuje bod m_0 $(\xi, -\eta)$ na přímce $m\,m'$ v její prodloužení o stejnou délku.

Souřadnice Plückerovské přímky p jsou

$$(A) \qquad u = -\frac{1}{\xi}, \qquad v = \frac{1}{\eta},$$

takže transformace uvažovaná jest kvadratická korrelace.

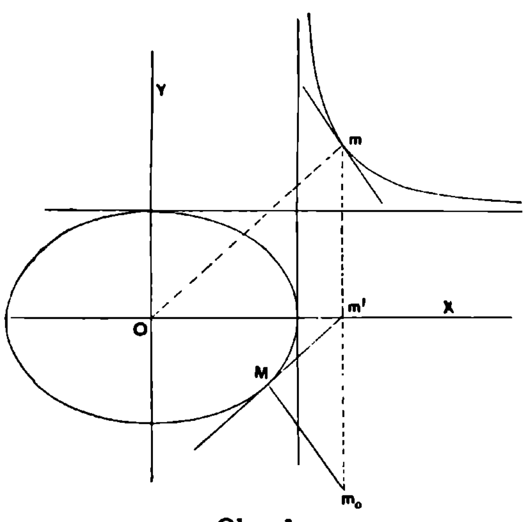
Předpokládejme souřadnice pravoúhlé; je-li transformovaná čára ellipsa o polouosách a, b

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1,$$

je čára původní patrně

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = 1,$$

t. j. čára křížová.



Obr. 1.

Pro konstrukci této čáry vedeme (obr. 1) v libovolném bodě M ellipsy (a, b) tečnu $p \equiv M\,m'$, její rovnoběžku $O\,m$ protneme přímkou $m'\,m \parallel O\,y$, čímž určen bod m na křížové čáře; symetrický bod m_0 $(m\,m' = m'\,m_0)$ určuje pak přímku $M\,m_0$, s níž je tečna $m\,t$ křížové čáry rovnoběžna.

První podnět k této transformaci zavdává vytvoření astroidy z kruhu $O\,m = konst.$; tu je pak $O\,m$ délka latě, která zaujme polohu $p\,m'$; bod m_0 jest její příční bod na kruhu opsaném.

Přímka v obecné poloze

$$A\,\xi + B\,\eta + C = 0$$

se transformací (A) převádí v parabolu

$$C\,u\,v + B\,u - A\,v = 0$$

L.

s ohniskem

$$x = -\frac{AC}{A^2 + B^2}, \qquad y = \frac{BC}{A^2 + B^2}.$$

Čára, která se uvažovanou transformací převádí v bod (čáru třídy první)

$$x_0 u + y_0 v + 1 = 0,$$

jest hyperbola

$$(\xi - x_0)(\eta + y_0) + x_0 y_0 = 0.$$

Kruh, který se v počátku dotýká osy Oy, převádí se touto transformací ve Steinerovu hypocykloidu.

Normála ellipsy $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ má rovnici

$$\frac{ax}{c^2 \cos \varphi} - \frac{by}{c^2 \sin \varphi} = 1,$$

i je to přímka transformační p příslušná k bodu m o souřadnicích

$$\xi = \frac{c^2}{a} \cos \varphi, \qquad \eta = \frac{c^2}{b} \sin \varphi;$$

evoluta ellipsy (a, b) tedy vychází naší transformací z ellipsy

$$\left(\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{b}\right); \; c^2 = a^2 - b^2.$$

Poznamenejme ještě, že singulární trojúhelníky v transformaci (A) jsou

pro soustavu bodovou: počátek O a úběžné body os Ox, Oy;
pro soustavu přímek: osy souřadnic a přímka úběžná.

5. Zobecnění jisté plochy kotálnic.

Uvažujme astroidu, která jest obálkou poloh latě délky $2m$, jejíž konce se šinou po kolmých osách Ox, Oy:

(1) $$x \sin \varphi + y \cos \varphi = 2m \sin \varphi \cos \varphi;$$

tato astroida jest evolutou astroidy, kterou vytvoří lať délky m šinutím svých konců po přímkách $x \pm y = 0$; rovnice tečny zní

(2) $$x \cos \varphi - y \sin \varphi = \frac{m}{2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

a bod na této astroidě má souřadnice

(M_0) $$x_0 = \frac{m}{4} (3 \cos \varphi - \cos 3\varphi), \qquad y_0 = \frac{m}{4} (3 \sin \varphi + \sin 3\varphi).$$

Problém tečen astroidy (1) z daného bodu mimo čáru se rozpadá v problémy stupně 1. a 3. pro body na adjunkční ellipse (a, b)

$$(m) \qquad x = a \cos \varphi, \; y = b \sin \varphi,$$

jejíž polouosy (vzaté s určitým znamením) hoví podmínce

$$a + b = 2\,m.$$

Z bodu m na adjunkční ellipse příslušného k anomalii φ vychází určitá normála astroidy (M_0), jejíž rovnice je právě (1). Konstrukce této normály je následující: Na kruhu $(2\,m)$ poloměrem $2\,m$ kolem středu O opsaném vytkneme příční bod latě, jehož polární úhel v soustavě x, y jest φ; pravoúhlé průměty do os $O\,x$, $O\,y$ jsou konce latě délky $2\,m$, a na ní leží bod (m), jenž tuto lať dělí v poměru $a : b$, obě délky brány kladně, pokud směřují dovnitř latě od její konců měřeny (b od $O\,x$, a od $O\,y$). Opíšeme pak kruh poloměru m kolem počátku; lať $2\,m$ jej seče ve dvou bodech, z nichž jeden — její střed — je příční bod latě délky m, jejíž konce se šinou po osách $y = \pm x$; do těchto os se promítne onen průsek, a spojivá přímka je lať kolmá na předešlou, je to tečna (2) astroidy (M_0); její průsek s latí (1) je bod M_0, pata normály astroidy (M_0) spuštěné z bodu m na adjunkční ellipse.

Koule K mající středy m na ellipse a procházející příslušnými jim patami normál „stopní astroidy" M_0 dotýkají se této čáry a obalují určitou plochu stupně 16. Její stopa na rovině základní $O\,x\,y$ sestává z astroidy M_0 a z určité čáry stupně 10.

Rovnice koule K zní

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a\,x \cos \varphi - 2\,b\,y \sin \varphi = \mathfrak{G}.$$

$$\mathfrak{G} = x_0^2 + y_0^2 - 2\,a\,x_0 \cos \varphi - 2\,b\,y_0 \sin \varphi;$$

koule dotýká se obalové plochy podél kruhu Γ na rovině

$$a\,x \sin \varphi - b\,y \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{d\,\mathfrak{G}}{d\,\varphi}.$$

Pravá strana se určí na základě okolnosti, že tato rovina prochází bodem M_0:

$$\frac{1}{2} \frac{d\,\mathfrak{G}}{d\,\varphi} = a\,x_0 \sin \varphi - b\,y_0 \cos \varphi = \frac{m}{2}(a - b) \sin 2\,\varphi - \frac{m^2}{4} \sin 4\,\varphi;$$

rovina kruhu Γ má tedy rovnici

$$(\Gamma) \qquad a\,x \sin \varphi - b\,y \cos \varphi = \frac{m}{2}(a - b) \sin 2\,\varphi - \frac{m^2}{4} \sin 4\,\varphi.$$

Souhrn těchto kruhů Γ zobecňuje plochu kotálnic obyčejných, která se vytvoří kotálením kruhu poloměru $\frac{m}{4}$ po kruhu pevném poloměru m.

L.

a vzniká z našeho případu pro $a = b$. Rovnice (Γ) splývá v podstatě s rovnicí (4') na str. 4. naší rozpravy o plochách kotálnic, pouze poloha os je tu otočena o 45^0, a voleno jiné označení.

Roviny kruhů Γ obalují plochu válcovou, určenou rovnicemi (Γ) a její derivátem

$$(\Gamma') \qquad a\,x\cos\varphi + b\,y\sin\varphi = m\,(a - b)\cos 2\,\varphi - m^2\cos 4\,\varphi.$$

Rovnice základní čáry na tomto válci jsou

$$a\,x = \frac{1}{4}\,m\,(a - b)\,(3\cos\varphi + \cos 3\,\varphi) - \frac{1}{8}\,m^2\,(5\cos 3\,\varphi + 3\cos 5\,\varphi)$$
$$b\,y = \frac{1}{4}\,m\,(a - b)\,(-3\sin\varphi + \sin 3\,\varphi) + \frac{1}{8}\,m^2\,(5\sin 3\,\varphi - 3\sin 5\,\varphi)\,;$$

pro konstruktivní účely vystačíme s rovnicí (Γ') v rovině základní, která charakterisuje přímku; přímka ta seče půdorysnou stopu roviny kruhu Γ v bodě na základní čáře válce, a bod ten lze zároveň považovati za půdorys bodu na hřbetní čáře plochy, která tu jest imaginární podobně jako u plochy kotálnic.

Přímka Γ' je kolma na paprsek $O\,m$ a prochází bodem

$$x = \lambda\,b\cos\varphi - m\cos 3\,\varphi, \qquad y = -\lambda\,a\sin\varphi + m\sin 3\,\varphi,$$

kde

$$\lambda = \frac{3}{2}\,m\,\frac{a - b}{a\,b} = \frac{3}{4}\,\frac{a^2 - b^2}{a\,b}\,;$$

při označení $a^2 - b^2 = c^2$ se jeho souřadnice píší

$$(H) \qquad x = \frac{3}{4}\,\frac{c^2}{a}\cos\varphi - m\cos 3\,\varphi, \qquad y = -\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{b}\sin\varphi + m\sin 3\,\varphi.$$

Vzpomeňme okolnosti, že bod $\varkappa - 3\,\varphi$ na kruhu (m) je druhý průsek normály (1) (latě) s tímto kruhem; znamenejme K tento průsek a sestrojme bod J o souřadnicích

$$x = \frac{3}{4}\,\frac{c^2}{a}\cos\varphi, \qquad y = -\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{b}\sin\varphi,$$

pak je H koncový bod vektoru $O\,H$ vyjádřeného „*geometrickým součtem*“ (vektoriálním)

$$O\,H = O\,J + O\,K.$$

Z bodu H spuštěná kolmice na směr $O\,m$ seče přímku (Γ) v bodě L její obalové čáry, půdorysu bodu na hřbetní čáře plochy a na kruhu Γ.

Výraz $\mathfrak{G}$ určíme integrací a hodnotou pro $\varphi = 0$, jíž přísluší hodnota $\mathfrak{G}$

$$\frac{m^2}{4} - a\,m\,;$$

L.

rovnice koule K pak se přepíše na

$$
(3) \quad \begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - 2\,a\,x\cos\varphi - 2\,b\,y\sin\varphi + \\ & + \frac{m}{2}(a-b)\cos 2\,\varphi - \frac{m^2}{8}\cos 4\,\varphi + \frac{7}{8}m^2 = 0. \end{aligned}
$$

Tečna ellipsy (m)

$$
b\,x\cos\varphi + a\,y\sin\varphi = a\,b
$$

seče tečnu (2) stopní čáry M_0 v bodě V na *vrcholnici*, který je vrcholem rotačního kužele, jenž se plochy dotýká podél kruhu Γ. Řešením obou rovnic vychází pro bod V

$$
(4) \qquad x = \frac{2\,a\,b + a\,m\cos 2\,\varphi}{4\,m\cos\varphi}, \qquad y = \frac{2\,a\,b - b\,m\cos 2\,\varphi}{4\,m\sin\varphi},
$$

takže vrcholnice je racionální čára stupně šestého. Tečna ellipsy (m) a stopa roviny (Γ) sekou se v bodě, který je půdorys nejvyššího bodu na kruhu Γ. Znamenejme L pravou stranu rovnice (Γ), načež se souřadnice $x_1\,y_1$ průsečíku M_1 vyjadřují takto

$$
x_1 = \frac{a\,L\sin\varphi + a\,b^2\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}, \qquad y_1 = \frac{-\,b\,L\cos\varphi + a^2\,b\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};
$$

tato čára, jež v případě $a = b$ je půdorys kotálnice $\alpha = \frac{\pi}{2}$, je stupně 10. Druhá část stopní čáry sestává z bodů M, pro něž $M_0 + M = 2\,M_1$ t. j.

$$
x = 2\,x_1 - x_0, \qquad y = 2\,y_1 - y_0,
$$

a je tedy tato křivka stupně 10.

Křivka (M) — druhá složka stopní čáry uvažované plochy — je konstruktivně dostatečně přístupna, a také středy hlavní křivosti plochy samé se snadno určí. Středy křivosti na normálách v různých bodech kruhu Γ (jež tvoří rotační kužel s vrcholem m) naplňují kuželosečku ležící v rovině kolmé na rovinu základní. Bod na hřbetní čáře leží na této rovině, poněvadž má poloměr křivosti rovný nulle a splývá se svými středem; mimo to obsahuje tato rovina střed křivosti F_0 astroidy (M_0) pro bod M_0. Tím je stopa roviny kuželosečky středů určena, a splývá s přímkou $F_0\,L$. Její průsek s normálou $M\,m$ stopní čáry (M) je střed křivosti S této křivky.

Tečna vrcholnice je kolma na přímku $F_0\,L$.

Konstrukce tato selže, padne-li bod m do vrcholu centrální ellipsy (a, b). Pro ten případ možno užiti obecné věty:[1]) Buďte $M_0\,M$ sdružené body stopních čar, t. j. stopy téhož kruhu Γ na ploše, $F_0\,F$ pak příslušné jim středy křivosti; kuželosečka určená těmito body jako ohnisky a procházející bodem m na centrále, oskuluje v něm tuto čáru.

[1]) Bude dokázána zároveň s druhými zde užitými vlastnostmi v následujícím odstavci.

V našem případě je pro hledanou kuželosečku dán její vrchol U ($\equiv m$) a poloměr křivosti p, mimo to ohnisko F_0, střed křivosti astroidy; střed křivosti ellipsy ve vrcholu U znamenejme K a volme směr $K\,U$ za kladný, takže $K\,U = p > 0$; poloosy hledané kuželosečky buďte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ voleny kladně. Veličině $U\,F_0 = l$ přísluší určité znamení, které udělíme též fokální dálce $\mathfrak{c}$ (sgn. $\mathfrak{c}$ = sgn. l).

Jeli hledaná kuželosečka hyperbola, máme rovnice

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = l, \qquad \mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}\,p,$$

z nichž plyne

$$\mathfrak{a} = \frac{l^2}{2\,l + p}.$$

Je-li však hledaná kuželosečka ellipsou, je problém vyjádřen rovnicemi

$$\mathfrak{a} \pm \mathfrak{c} = -l, \quad \mathfrak{a}^2 - \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}\,p,$$

z nichž vychází

$$\mathfrak{a} = -\frac{l^2}{2\,l + p}.$$

V prvním případě obdržíme polohu středu hledané kuželosečky, naneseme-li od U vypočtenou délku $\mathfrak{a}$ ve směru kladném, v druhém případě ji nanášíme ve směru záporném; tedy obecně

„střed hledané kuželosečky nalezneme nanesením délky

$$\frac{l^2}{2\,l + p}, \qquad (l = U\,F_0)$$

od vrcholu U na osu, při čemž kladný její směr je dán vektorem $K\,U$.

Známe-li střed, je poloha druhého ohniska bezprostředně dána a problém řešen.

6. Obecné věty o čarách obalových kružnic v rovině.

Uvažujme obalovou čáru řady kruhů o jednom parametru

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,q\,y + p^2 + q^2 = r^2, \tag{1}$$

jichž středy m (p, q) naplňují určitou čáru *centrální.*

Dotykové body kruhu (1) s obalovou čarou leží na přímce

$$x\,d\,p + y\,d\,q - \frac{1}{2}\,d\,n = 0, \qquad n = p^2 + q^2 - r^2, \tag{2}$$

která seče kolmo tečnu $m\,Q$ čáry centrální. Oba dotykové body M_0, M_1 mají jakožto body obálky určité středy křivosti S_0, S_1; abychom k nim dospěli, veďme normály $M_0\,m\,S_0$, $M_1\,m\,S_1$ považujíce je za složky zvrhlé čáry druhého stupně, načež se určí $S_0\,S_1$ jako charakteristické body na obalové čáře těchto normál.

Obecně seče přímka

$$A x + B y + C = 0$$

kruh (1) ve dvou bodech M_0, M_1, jichž poloměry $M_0 m$, $M_1 m$ tvoří zvrhlou kuželosečku o rovnici

$$(A p + B q + C)^2 (x^2 + y^2 - 2 p x - 2 q y + p^2 + q^2) =$$
$$= r^2 (A x + B y - A p - B q)^2;$$

v uvažovaném případě jde o průseky s přímkou (2)

$$A = d p, \quad B = d q, \quad C = -\frac{1}{2} d n,$$

a je tedy

$$A p + B q + C = r\, dr.$$

Výpočty se zjednoduší, volíme-li poloměr kruhu r za neodvisle proměnnou, polohu středu (p, q) za jeho funkci; rovnice obou normál $M_0 m$, $M_1 m$ se pak píše

$$x^2 + y^2 - 2 p x - 2 q y + p^2 + q^2 = (x p' + y q' - p p' - q q')^2. \tag{3}$$

Derivováním vychází odtud

$$x p' + y q' - p p' - q q' +$$
$$+ (x p' + y q' - p p' - q q') [x p'' + y q'' - (p p' + q q')] = 0,$$

t. j. dotykové body $S_0 S_1$ obou normál s evolutou leží na přímce

$$x \frac{d^2 p}{d r^2} + y \frac{d^2 q}{d r^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2 n}{d r^2} = 0, \tag{4}$$

poněvadž druhý činitel

$$x p' + y q' - (p p' + q q')$$

vymizí za platnosti rovnice (3) jen při

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 0,$$

t. j. na nullové kružnici.

Přímky $M_0 M_1$ — tětivy sdružených bodů — jsou dány rovnicí (2); její derivováním vychází rovnice (4), t. j. průsečík přímek (2) a (4) je bod *hřbetní* H, v němž se přímka $M_0 M_1$ dotýká svojí obálky. Souhrn těchto bodů tvoří hřbetní čáru či hřbetnici.

Výsledek zní, že *bod* H *leží na tětivě středů* $S_0 S_1$.

Obecně má pól přímky

$$A x + B y + C = 0$$

vůči kruhu (1) souřadnice ξ, η dané rovnicemi

$$\frac{\xi - p}{A} = \frac{\eta - q}{B} = \frac{n - p\,\xi - q\,\eta}{C} = \frac{-r^2}{A\,p + B\,q + C},$$

t. j.

$$\xi = p - \frac{r^2 A}{A\,p + B\,q + C}, \qquad \eta = q - \frac{r^2 B}{A\,p + B\,q + C};$$

v případě přímky (2) je pól průsečík tečen ve sdružených bodech čáry, *bod V na vrcholnici.* Hodnoty

$$A = p', \qquad B = q', \qquad C = -\frac{1}{2}\,n'$$

dávají

$$A\,p + B\,q + C = r,$$

a tak vychází vyjádření polohy bodu na vrcholnici

$$\xi = p - r\,\frac{d\,p}{d\,r}, \qquad \eta = q - r\,\frac{d\,q}{d\,r}. \tag{5}$$

Derivováním vychází

$$\frac{d\,\xi}{d\,r} = -r\,\frac{d^2 p}{d\,r^2}, \qquad \frac{d\,\eta}{d\,r} = -r\,\frac{d^2 q}{d\,r^2},$$

což vzhledem k rovnici (4) dává výsledek:

„tečna vrcholnice stojí kolmo na tětivě středů $H\,S_0\,S_1$.

* * *

Uvažujeme-li na místě kruhů (1) soustředné s nimi koule, které jimi procházejí, vzniká obalová plocha jejich, která jest geometrickým místem kruhů Γ, jichž roviny stojí kolmo na základní rovině $O\,x\,y$ a mají rovnice (2).

Rovnice (4) určuje rovinu, která protíná rotační kužel normál (vrchol m základna Γ) v kuželosečce na ploše hlavních středů křivosti, a tedy slouží ke konstrukci středu křivosti obalové plochy ležícího na libovolné normále $P\,m$.

Hřbetní čára (H) na ploše je pak obalová čára kruhů Γ, uvažovaná křivka hřbetních bodů jest její půdorys. Bod V na vrcholnici je vrcholem opsaného rotačního kužele, který se plochy dotýká podél kruhu Γ. Tyto kruhy tvoří jednu řadu čar křivoznačných, druhá řada křivoznaček sestává z jejich pravoúhlých trajektorií. Možno je charakterisovati jako křivky na ploše, jichž tečny protínají vrcholnici. Oskulační rovina Ω křivoznačky prochází tečnou vrcholnice; tato je půdorysná stopa oskulačních rovin všech křivoznaček pro různé body P téhož kruhu Γ. Buď S střed hlavní křivosti plochy pro bod P, tedy průsek normály $P\,m\,S$ s rovinou (4), kterou znamenejme (Σ), ana vytíná na kuželi normál (m, Γ) kuželosečku Σ centrální plochy. Osa křivosti křivoznačky příslušná k bodu P obsahuje bod S, a tedy

„osa křivosti křivoznačky pro bod P je kolmice spuštěná ze středu křivosti S uvažované plochy na oskulační rovinu určenou bodem P a tečnou Ω^I vrcholnice."

Osy křivosti příslušné různým křivoznačkám v bodech téhož kruhu Γ leží v rovině (Σ), která je kolma na přímku Ω^I; obalují určitou křivku čtvrté třídy. Tyto křivky příslušné všem kruhům Γ tvoří plochu, která jest částí fokální plochy pro kongruenci os křivosti křivoznaček obalové plochy (Γ). Druhou část fokální plochy této kongruence tvoří plocha válcová, která obaluje roviny kuželoseček (Σ).

Pro bod $P \equiv H$ na čáře hřbetní splyne střed S s bodem P a poloměr křivosti křivoznačky vymizí. Křivoznačky mají v bodech hřbetní čáry singulární body s nekonečnou křivostí.

* * *

Pro souřadnice x_1 y_1 hřbetního bodu H vypočteme řešením rovnic (2) a (4)

$$x p' + y q' = \frac{1}{2} n', \qquad x p'' + y q'' = \frac{1}{2} n''$$

$$x_1 (p' q'' - p'' q') = \frac{1}{2} (n' q'' - n'' q')$$

$$= q'' (p p' + q q' - r) - q' (p p'' + q q'' + p'^2 + q'^2 - 1)$$

$$= q' - r q'' + p (p' q'' - p'' q') - q' (p'^2 + q'^2).$$

tedy

$$(H) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \left(p - q' \frac{p'^2 + q'^2}{p' q'' - p'' q'}\right) + \frac{q' - r q''}{p' q'' - p'' q'}, \\ y_1 &= \left(q + p' \frac{p'^2 + q'^2}{p' q'' - p'' q'}\right) - \frac{p' - r p''}{p' q'' - p'' q'}. \end{aligned}$$

Ježto patrně

$$\frac{p'^2 + q'^2}{p' q'' - p'' q'} = \frac{1 + \left(\frac{d q}{d p}\right)^2}{d \frac{d q}{d p}} d r,$$

jsou uzávorkované výrazy souřadnice středu křivosti centrální čáry pro bod m

$$P = p - \frac{d q}{d p} \frac{1 + \left(\frac{d q}{d p}\right)^2}{\frac{d^2 q}{d p^2}}, \qquad Q = q + \frac{1 + \left(\frac{d q}{d p}\right)^2}{\frac{d^2 q}{d p^2}},$$

takže

$$(x_1 + i y_1) - (P + i Q) = - \frac{2 i}{p' q'' - p'' q'} \frac{d}{d r} \left(\frac{p + \xi}{2} + i \frac{q + \eta}{2}\right),$$

kde ξ, η značí souřadnice (5) bodu V. Znamenejme U střed délky $m\,V$ mezi bodem na centrále a na vrcholnici,

$$m + V = 2\,U,$$

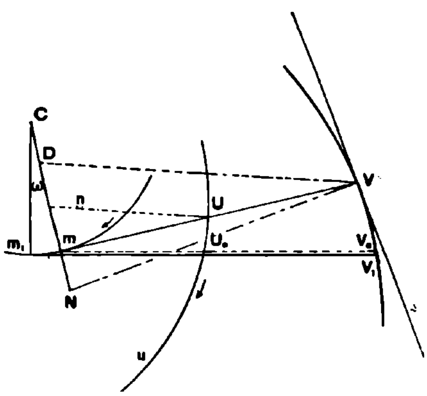
dále buď C střed křivosti centrální čáry (m); poslední rovnice pak dává větu, že

„tečna čáry (U) stojí kolmo na přímce $C\,H$."

V případě čáry anallagmatické, kdy kruhy (1) protínají orthogonálně určitý kruh o středu G, splyne H s tímto stálým bodem; je-li pak centrální čára (deferenta) kruh, t. j. kdy obalová čára je Cartesiův ovál, je jeho střed $O \equiv C$, a čára (U) je přímka kolmá na $O\,G$.

To dává jednoduchou konstrukci vrcholnice v tomto případě: Na tečnách kruhové deferenty přenášíme délky $m\,U$ na opačnou stranu do $U\,V$ při čemž U opisuje uvedenou přímku.

Známe-li tečnu čáry (U), můžeme bezprostředně strojiti tečnu a normálu vrcholnice, a též normálu každé čáry (V), jejíž body jsou na tečnách určité (centrální) čáry (m) určeny podmínkou $m\,V = k \,.\, m\,U$, kde k je stálý činitel číselný. Buďte (obr. 2.) $m\,V$, $m_1\,V_1$ dvě tečny čáry (m) nekonečně blízké, veďme přímku $m\,V_0$ rovnoběžnou s $m_1\,V_1$ a určeme na ní bod V_0 dle podmínky



Obr. 2.

$$(\alpha) \qquad m\,V_0 = k \,.\, m\,U_0 + (k - 1)\; arc\; m\,m_1,$$

kde U_0 je průsek přímky $m\,V_0$ s čarou u (bodů U).

Vzdálenost bodu m od přímky $m_1\,V_1$ je nekonečně malá druhého řádu, průmět m_0 bodu m do normály bodu m_1 se od polohy bodu m_1 liší rozměry druhého řádu, a je s chybou téhož řádu $arc\; m\,m_1 = m_0\,m$. Je tedy délka $m_0\,V_0$ s chybou druhého řádu $= m\,V_0 + arc\; m\,m_1 = k\,(m\,U_0 + arc\; m\,m_1)$, t. j. s chybou druhého řádu

$$m_0\,V_0 = m_1\,V_1,$$

poněvadž poloha bodu U_0 se od U_1 liší o rozměry nekonečně malé druhého řádu. Odtud vychází, že body V_0 a V_1 se liší o vzdálenost, která vzhledem k oblouku $m\,m_1$ neb kontingenčnímu úhlu ω je nekonečně malá druhého řádu, takže $\lim \overline{V\,V_0} \equiv \lim \overline{V\,V_1}$ co do polohy.

Béřeme-li směr tečen $V\,m$, $V_1\,m_1$ za kladný a zvolíme-li m za pól, $m\,U$ za osu polárních souřadnic, bude bod V_0 míti souřadnice: úhel $\omega = V\,m\,V_0$ a průvodič $m\,V_0 = r$; rovnice čáry vytvořené bodem V_0 zní dle hořejší definice (α)

$$r = k\,r_0 + (k - 1)\,R\,\omega,$$

při čemž r_0 je průvodič bodu U_0 na čáře u, a R značí poloměr křivosti $C\,m$, čáry centrální (m). Polární subnormála čáry (V_0) tedy jest

$$\frac{d\,r}{d\,\omega} = k\,\frac{d\,r_0}{d\,\omega} + (k-1)\,R\,;$$

pro $\omega = 0$ to dává polární subnormálu čáry (V).

Vedeme normálu $U n$ čáry u a bodem V přímku s ní rovnoběžnou $V D$; stopa normály N čáry (V) na přímce $m\,C$ je pak určena vztahem

$$m\,N = m\,D + (k-1)\,R, \qquad R = C\,m,$$

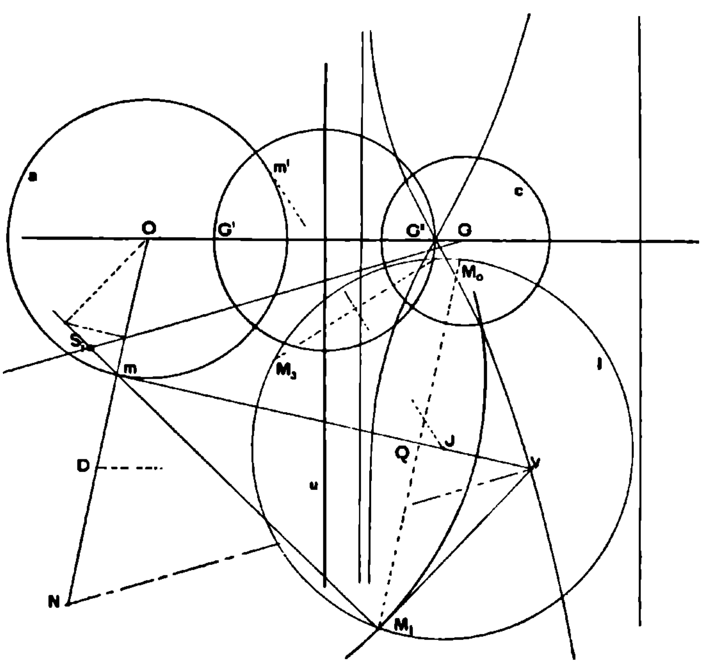
při čemž dlužno délky bráti s příslušným znamením.

Ve zvláštním případě (jako u vrcholnice) $k = 2$ tedy se stopa normály N určí nanesením délky $m\,N = C\,D$, načež je $V\,N$ normálou vrcholnice v bodě V.

Tato konstrukce normály vrcholnice je velmi rychlá.

* * *

V obr. 3. uvažována kartesiana jako obalová čára kruhů K, které mají středy na kruhu (a) středu O a sekou orthogonálně kruh (c) poloměru c o středu G (čára je stopa plochy, jakou jsme uvažovali mezi konidami).



Obr. 3.

Body na obalové čáře $M_0\,M_1$ příslušné k bodu m na kruhu (a) se obdrží jako průsečíky kruhu K s přímkou $G\,M_0\,M_1$ kolmou na tečně $m\,Q\,V$ kruhu (a).

Tyto body jsou vrcholy svazku kružnic, které sekou orthogonálně kruh (c); pro sestrojení bodů obalové kartesiany možno užiti kruhu, který má svůj střed J v libovolném bodě tečny $m\,Q\,V$, a seče orthogonálně kruh (c).

Problem průsečíků kartesiany s libovolným kruhem l, který seče orthogonálně řídící kruh anallagmatie (c), se rozpadá ve dvě úlohy 2. stupně.

Ze středu J kruhu l vedeme tečny $J\,m$, $J\,m'$ kruhu (a); kolmice z bodu G na tyto tečny spuštěné sekou kruh l ve dvou párech $M_0\,M_1$, $M_2\,M_3$ na kartesianě.

Přímka u (bodů U) je zde chordála kruhů (a) a (c). Normálu $N\,V$ vrcholnice v bodě V určíme dle vyložené právě methody: určíme průsek D přímky $O\,m$ s přímkou $V\,D \parallel O\,G$, a přeneseme $O\,D$ do $m\,N$.

Přímka $G\,S_0\,S_1$ vedená pólem G rovnoběžně s normálou vrcholnice $V\,N$ stanoví na normálách kartesiany $M_0\,m$ a $M_1\,m$ její středy křivosti S_0 a S_1.

Vrcholnice uvažovaného případu splývá s vrcholnicí plochy kotálnic 4. stupně,[1]) pokud přímka u leží mimo centrálu (a); v případě, kdy její průseky s tímto kruhem jsou realné, změní křivka tvar, zachovávajíc své vlastnosti algebraické; její oba dvojné body v konečné vzdálenosti jsou pak pomyslné.

Dvojné body $G'\,G''$ vrcholnice jsou vrcholy svazku kružnic, které mají středy na přímce u a sekou orthogonálně kruhy (a) a (c). Tyto kružnice stanoví na vrcholnici kvadratickou involuci; chceme určiti obalovou čáru tětiv $V\,V'$ této involuce.

Volme střed O kruhu (a) za počátek souřadnic; rovnice přímky u buď $x = h$, její pól vůči kruhu (a) jest $x = \frac{a^2}{h} = k, \quad y = 0.$

Body V, V' tétéž dvojice leží na tečnách $U\,m$, $U\,m'$ kruhu (a), které se protínají v bodě U na přímce u; při čemž přímka $m\,m'$ se otáčí kolem pólu přímky u. Přímka $O\,U$ seče kolmo tětivu $V\,V'$ v její středu W

$$2\,W = V + V'.$$

Znamenejme φ úhel $X\,O\,U$; pak vychází z obrazce

$$O\,U = h \sec \varphi, \quad U\,W = h \sec \varphi - k \cos \varphi,$$

a bod W má polární souřadnice φ a r,

$$r = 2\,h \sec \varphi - k \cos \varphi.$$

Čára (W) jest cissoida přímky $x = 2\,h$ a kruhu nad průměrem, jehož jeden konec jest O a druhý v pólu přímky u; je to racionální čára cirkulární 3. stupně. Abychom určili její protiúpatnici, pišme rovnici přímky $V\,V'$ t. j. $x \cos \varphi + y \sin \varphi = r$ ve tvaru

$$x + t\,y = 2\,h\,(1 + t^2) - k, \quad t = tg\,\varphi.$$

---

[1]) Plochy takové jsou dvě; mají za deferentu kruh (a) a konický bod je buď G' nebo G'', o kterýchžto bodech následuje zmínka.

„Obalová čára tětiv $V V'$ tedy jest

$$y^2 + 8h(x + k - 2h) = 0,$$

parabola s osou Ox, jejíž ohnisko leží vůči bodu O souměrně s pólem přímky u.

Kruhy (a) a (c) mají rovnice $(OG = g)$

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2gx + g^2 - c^2 = 0,$$

tedy chordála

$$2gx = a^2 + g^2 - c^2$$

dává hodnotu

$$2h = \frac{a^2 + g^2 - c^2}{g}.$$

Pro tečny naší paraboly se úloha průsečíků s vrcholnicí rozpadá ve dvě úlohy 2. stupně, z nichž pouze jedna má řešení realná.

O této čáře jakožto vrcholnici plochy kotálnic 4. stupně bylo jednáno podrobněji v rozpravě o plochách kotálnic.[1]) Roli bodů G' G'' zastávaly tam body na Ox a sice $x = g$ (G) a $x = \frac{a^2}{g}$, který znamenejme H. Plocha kotálnic vychází z našeho případu za supposice $c = 0$. Zejména byla stanovena involuce, v níž se promítají do Ox páry průsečíků vrcholnice s přímkami svazku G; pro začátek úseček G zněla rovnice její (str. 8. s hora)

$$x_1 x_2 = \frac{a^2 - g^2}{2g}(x_1 + x_2).$$

Přepíše-li se tato rovnice pro začátek O, t. j. klade-li se $x_\nu - g$ za x_ν, obdrží tato rovnice tvar

$$x_1 x_2 - \frac{b}{2}(x_1 + x_2) + a^2 = 0$$

a je to táž involuce, ve kterou se promítají páry průseků čáry s paprsky svazku H.

Přímky Gy, Hy vedené dvojnými body rovnoběžně s osou y tvoří dvě strany trojúhelníka dvojných bodů; z nalezené vlastnosti vychází bezprostředně věta:

Paprsky vycházející z dvojného bodu uvažované čáry sekou čáru ještě ve dvou bodech vůči středu svazku a protější straně trojúhelníka dvojných bodů harmonicky sdružených.

Zároveň tak seznáváme tři centrální a involutorní kollineace, kterými čára přechází v samu sebe: Ze tří bodů dvojných G, H, ∞ je vždy jeden pólem kollineace a protilehlá strana trojúhelníka její osou.

---

[1]) l. c. str. 7 a násl.

L.

Body O, G, H lze voliti dle libosti na jedné přímce; kruh (a) je pak určen svým středem O a podmínkou, aby protínal pod pravým úhlem kruhy svazku o vrcholech G a H; bod O je singulárním ohniskem čáry. Vytknutí tří bodů dvojných G, H, ∞ vyčerpává devět podmínek, čtyři podmínky zabírá požadavek, aby O byl sing. ohniskem. Připojíme-li ještě podmínku tečny v reálném bodě dvojném (kolmice na tečnu z tohoto bodu ke kruhu (a) vedené), je tím čára již určena jako křivka stupně 4. —

Toutéž transformací, kterou se kruh (a) prostřednictvím přímky u převádí ve vrcholnici, převádějí se paraboly mající u za tečnu vrcholovou ve své osy.

Má-li se určiti parabola ze svazku parabol o společném vrcholu a ose, která se dotýká daného kruhu, převedeme tento ve vrcholnici prostřednictvím vrcholové tečny parabol. Průseky osy parabol s vrcholnicí pak odpovídají bodům m na kruhu, v nichž se (čtyři, dvě realné) hledané paraboly daného kruhu dotýkají.

* * *

Je-li vrcholnice přímkou, zvolíme ji za osu úseček Ox; z rovnic (5) pak máme $\eta = 0$ t. j.

$$r \frac{dq}{dr} = q, \qquad q = kr,$$

kde k je libovolný stálý činitel číselný; poloměr obalené koule je tedy ve stálém poměru ku vzdálenosti q bodu m (na centrále) od vrcholnice. Křivoznačky obalové plochy koulí jsou v tomto případě její řezy s rovinami vedenými vrcholnicí. Zvolením čísla k a centrální čáry (m) je soustava koulí určena.

Zde lze strojiti tečnu čáry bodů U

$$2U = m + V$$

na základě vyložené výše methody. Máme totiž podmínku

$$mU = \frac{1}{2} mV;$$

vyměníme-li roli liter U a V, a uvážíme-li, že bod V opisuje přímku Ox, máme následující konstrukci pro normálu čáry (U): Vedeme přímku $UD \perp Ox$, od jejího průseku D s normálou čáry centrální (m) naneseme poloviční hodnotu poloměru křivosti ve směru ke středu; koncový bod její N leží na normále čáry U. Rovnoběžka s normálou UN vedená středem křivosti centrální čáry (m) seče přímku $M_0 M_1$ [t. j. (2), půdorys kruhu Γ] ve hřbetním bodě H; přímka Hy vedená bodem H kolmo na vrcholnici Ox je půdorysem kuželosečky na ploše středů a seče normály stopní čáry pro body M_0 M_1 v jich středech křivosti S_0, S_1.

Zbývá ještě vésti přímku $M_0 M_1$, aby naznačená konstrukce byla schopna provedení. Její rovnice

$$p' x + q' y = p p' + q q' - r$$

ukazuje vzhledem k hodnotě $q = k r$, že přímka ta obsahuje bod

$$x = p, \quad y = q - \frac{r}{k}; \quad \left[r = \frac{q}{k}\right.$$

Kolmice spuštěná z tohoto bodu na tečnu centrály $m V$ je přímka $M_0 M_1$, na níž tyto body vytíná kruh poloměru r a středu m.

Ve zvláštním případě $k = 1$ prochází přímka $M_0 M_1$ bodem $(p, 0)$ a ježto $r = q$, dotýkají se kruhy vrcholnice $O x$, která absorbuje jednu větev stopní čáry (M_0).

Jako zvlášť jednoduché případy třeba vytknouti:

1. centrální čára je kruh;
2. čára (m) je parabola, vrcholnice v její ose.

V tomto druhém případě splývá čára (U) s vrcholovou tečnou paraboly, a bod H leží tedy se středem křivosti paraboly na rovnoběžce s vrcholnicí $O x$.

* * *

Zmínku zasluhuje též případ, kdy vrcholnice je kruh; volíme-li střed jeho za počátek souřadnic, dávají rovnice (5), po dosazení do rovnice kruhu $\xi^2 + \eta^2 = b^2$ vztah

$$p^2 + q^2 - 2 r (p p' + q q') + r^2 (p'^2 + q'^2) = b^2.$$

Vyšetříme případ, kdy centrála je též kruh (a) s vrcholnicí soustředný: $p^2 + q^2 = a^2$. Rovnice poslední pak se zjednoduší na

$$r^2 \frac{d p^2 + d q^2}{d r^2} = c^2 = b^2 - a^2,$$

a jest dále $n = a^2 - r^2$. Znamenáme-li σ oblouk na centrále (a), jest tedy

$$d \sigma = c \frac{d r}{r}$$

a odtud integrací pro libovolně vytčenou konstantu k

$$r = c k e^{\frac{\sigma}{c}}$$

Klademe-li tedy pro určení polohy bodu na centrále

$$(\alpha) \qquad p = a \cos \varphi, \quad q = a \sin \varphi,$$

bude poloměr koule r dán výrazem

$$(\alpha') \qquad r = c k e^{\frac{a}{c} \varphi}$$

L.

Bod $U = \frac{m + V}{2}$ opisuje očividně kruh se středem společným O, a tedy hřbetní bod H je průsek poloměru $O\,U$ s přímkou $M_0\,M_1$. Tato se určí jako chordála kruhu (m, r) s kruhem opsaným nad průměrem $V\,m$ Bodem H vedeme rovnoběžku s poloměrem $O\,V$ (normálou vrcholnice) a obdržíme tak přímku $S_0\,S_1$, která určuje středy křivosti.

Křivoznačné čáry jsou stanoveny obecným vzorcem[1]) z čl. 18. naší rozpravy o plochách kotálnic

$$log\,cotg\,\frac{\alpha}{2} = \int \frac{p_0\,d\,\tau}{q_0},$$

kde p_0, q_0 jsou souřadnice bodu M_0 v osách $m\,V$ a její kolmici, a τ značí úhel sevřený tečnou centrály a osou $O\,x$. V našem případě je $\tau = \varphi + \frac{\pi}{2}$, dále máme stálou délku

$$m\,V = c = \frac{r^2}{p_0};\; p_0^2 + q_0^2 = r^2.$$

Vychází tedy při označení $\frac{a}{c} = \lambda$:

$$p_0 = c\,k^2\,e^{2\lambda\varphi},\quad q_0 = c\,k\,e^{\lambda\varphi}\sqrt{1 - k^2\,e^{2\lambda\varphi}},$$

a křivoznačky jsou určeny parametrickou rovnicí

$$log\,cotg\,\frac{\alpha}{2} = \int \frac{p_0}{q_0}\,d\,\varphi = \int \frac{k\,e^{\lambda\varphi}\,d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2\,e^{2\lambda\varphi}}} = log\,K + \frac{1}{\lambda}\,arcsin\,(k\,e^{\lambda\varphi})$$

čili

$$(\beta) \qquad cotg\,\frac{\alpha}{2} = K\,e^{\frac{c}{a}\,arcsin\frac{r}{c}}$$

při tom jest $\frac{\alpha}{2}$ úhel $M_0\,M_1\,P$, značí-li P bod křivoznačky na kruhu Γ ležící.

* * *

Vraťme se k rovnici

$$(3) \qquad (x - p)^2 + (y - q)^2 = [(x - p)\,p' + (y - q)\,q']^2,$$

která vyjadřuje dvojici sdružených normál obalové čáry $m\,M_0$, $m\,M_1$, a příslušné k ní spojce středů křivosti $S_0\,S_1$

$$(4) \qquad p''\,(x - p) + q''\,(y - q) = p'^2 + q'^2 - 1.$$

Proveďme transformaci souřadnic zavádějíce jako nové osy normálu centrální čáry $m\,\xi$ a její tečnu $m\,\eta$. Substituční rovnice mají tvar

---

[1]) Vzorec (C) na str. 152. Tam užité litery p, q jsou zde nahraženy značkami p_0, q_0.

$$x - p = \xi \cos\alpha - \eta \sin\alpha$$
$$y - q = \xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha,$$

a úhel α třeba voliti tak, aby platila identita

$$p'(x-p) + q'(y-q) \equiv k\eta,$$

t. j.

$$q' \cos\alpha - p' \sin\alpha = k$$
$$p' \cos\alpha + q' \sin\alpha = 0;$$

z rovnic těch plyne

$$k^2 = p'^2 + q'^2, \quad \cos\alpha = \frac{q'}{k}, \quad \sin\alpha = -\frac{p'}{k}$$

Po substituci hodnot znějí rovnice (3) a (4)

$$\xi^2 + \eta^2 = k^2 \eta^2 \tag{3*}$$
$$l\xi + m\eta = k^2 - 1, \tag{4*}$$

$$l = p'' \cos\alpha + q'' \sin\alpha = \frac{q' p'' - p' q''}{k} = -\frac{k^2}{R},$$

$$m = q'' \cos\alpha - p'' \sin\alpha = \frac{p' p'' + q' q''}{k} - \frac{dk}{dr},$$

při čemž

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dq}{dp}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2 q}{dp^2}}$$

značí poloměr křivosti centrální čáry.

Z rovnice (3*) t. j. $\eta : \xi = \pm \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}}$ vychází geometrický význam veličiny k

$$k = \frac{1}{\sin\vartheta},$$

kde ϑ značí *úhel dopadu* mezi normálou centrální čáry a paprskem $M_0 m$, normálou čáry obalové.

Vyloučením η z rovnic (3*) a (4*) máme

$$[m^2 + (1 - k^2) l^2] \xi^2 + 2l(k^2 - 1)^2 \xi - (k^2 - 1)^3 = 0;$$

kořeny $\xi_0 \xi_1$ této rovnice 2. stupně hoví tedy vztahu

$$\frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{\xi_1} = \frac{2l}{k^2 - 1} = \frac{-2}{R \cos^2\vartheta}.$$

Avšak veličiny

$$\xi_0 \sec\vartheta = R_0 \quad \text{a} \quad \xi_1 \sec\vartheta = R_1$$

jsou *průvodiče bodu m měřené od středů křivosti $S_0\, S_1$ čáry obalové*; tedy rovnice předešlá dává vztah

$$(6) \qquad \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} = \frac{-2}{R \cos \vartheta},$$

který pro případ stálého S_0 podává známý zákon určení bodu S_1 na obalové čáře paprsků vyslaných ze svítícího bodu S_0 a odražených dirimantou (m).

Poněvadž znamení veličin R_0, R_1 v této formě výsledku ztrácejí určitosti, možno psáti výsledek též takto

$$\frac{1}{R_0} \pm \frac{1}{R_1} = \frac{\pm 2}{R \cos \vartheta}$$

Zaměníme-li na okamžik čáru centrální za kuželosečku a vložíme-li bod S_0 do ohniska, padne S_1 do ohniska druhého, R bude poloměr křivosti kuželosečky. Větu obecnou lze tedy takto vyjádřiti:

„Kuželosečka mající ohniska ve sdružených středech křivosti $S_0\, S_1$ obálky kruhů a procházející bodem m čáry centrální má v něm s touto čarou stejný střed křivosti.

Z hodnot $\cos \alpha$ a $\sin \alpha$ vychází

$$e^{i\alpha} = -\frac{i}{k} \frac{d\,(p + i\,q)}{d\,r};$$

porovnáme-li to s identitou

$$d\,(p + i\,q) = e^{i\tau}\, d\,\sigma,$$

kde σ značí oblouk na centrále (m) a τ úhel sevřený její tečnou a osou $O\,x$, vychází $\tau = \alpha + \frac{\pi}{2}$ a

$$\frac{d\,\sigma}{d\,r} = k = \frac{\pm 1}{\sin \vartheta},$$

t. j.

$$(7) \qquad d\,r = \pm\, d\,\sigma \sin \vartheta.$$

Pro polohu bodu V na vrcholnici v nynějších souřadnicích vypočteme

$$\xi = 0, \quad \eta = -k\,r,$$

jak zřejmo a priori.

Omezme se na absolutní hodnoty a znamenejme $V\,m = h$; rovnice poslední dává

$$h \sin \vartheta = r,$$

a tedy lze na místě (7) psáti též

$$(7^*) \qquad \frac{d\,r}{r} = \pm \frac{d\,\sigma}{h}.$$

* * *

L.

Třeba ještě vyjádřiti souřadnice bodů $M_0\, M_1$ na obalové čáře, k čemuž slouží rovnice (1) a (2)

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2, \quad k\,\eta = -r;$$

souřadnice bodu M_0 jsou

$$\mathfrak{y} = -\frac{r}{k}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{y}\sqrt{k^2-1},$$

souřadnice bodu M_1 odpovídají opačné hodnotě odmocniny.

Přímka $M_0\, m$ seče přímku (4*) v bodě S_0 $(\xi_0\, \eta_0)$; z rovnic

$$\xi_0 = \eta_0 \sqrt{k^2-1}, \quad l\,\xi_0 + m\,\eta_0 = k^2 - 1$$

vypočteme

$$\eta_0\,(m + l\sqrt{k^2-1}) = k^2 - 1.$$

Pro kruh o středu S_0 obsahující bod M_0, tedy oskulační kruh obalové čáry máme rovnici

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\,\xi_0\,\xi - 2\,\eta_0\,\eta = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2\,\xi_0\,\mathfrak{x} - 2\eta_0\,\mathfrak{y},$$

podobně pro kruh oskulační v bodě M_1

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\,\xi_1\,\xi - 2\,\eta_1\,\eta = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 2\,\xi_1\,\mathfrak{x} - 2\,\eta_1\,\mathfrak{y},$$

takže pro chordálu obou kruhů platí

$$(\xi_1 - \xi_0)\,\xi + (\eta_1 - \eta_0)\,\eta = -(\xi_1 + \xi_0)\,\mathfrak{x} + (\eta_1 - \eta_0)\,\mathfrak{y}.$$

Zde máme

$$\eta_0 = \frac{\xi_0}{\sqrt{k^2-1}}, \quad \eta_1 = -\frac{\xi_1}{\sqrt{k^2-1}},$$

tedy rovnice chordály se přepíše na tvar

$$\sqrt{k^2-1}\,\frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 + \xi_0}\,\xi - \eta = k\,r,$$

při čemž ξ_0 a ξ_1 jsou kořeny rovnice 2. stupně výše uvažované. Z rovnice té vychází

$$\frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 + \xi_0} = \pm\,\frac{\sqrt{l^2\,(k^2-1)^4 + (k^2-1)^3\,[m^2 - (k^2-1)\,l^2]}}{l\,(k^2-1)^2} = \pm\,\frac{m}{l\sqrt{k^2-1}}$$

tedy

$$\sqrt{k^2-1}\,\frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_1 + \xi_0} = \varepsilon\,\frac{m}{l}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Chordála je kolmá na přímku (4*), která má směrnici

$$-\frac{l}{m},$$

L.

a tedy naše znamení jest $\varepsilon = 1$. Rovnice chordály oskulačních kruhů zní tedy

$$\eta + k\tau = \frac{m}{l}\xi$$

a v původních souřadnicích

$$p''(y-q) - q''(x-p) = r(p'q'' - p''q'),$$

t. j.

„chordála oskulačních kruhů ve dvojici sdružených bodů na obalové čáře kruhů splývá s tečnou vrcholnice.“

Poznamenejme ještě mimochodem vztah mezi veličinami R_0, R_1, úhlem dopadu ϑ a úseky $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, které přímka $S_0 S_1$ vytíná na normále a na tečně čáry centrální

$$\frac{1}{R_0 R_1} = \frac{\cos^2\vartheta}{\mathfrak{a}^2} - \frac{\sin^2\vartheta}{\mathfrak{b}^2}$$

* * *

Jako zajímavý zvláštní případ volme $\vartheta = konst.$; rovnice (7) ukazuje že v tom případě

$$r = \pm\,\sigma \sin\vartheta + konst.$$

je poloměr koule lineární funkcí oblouku na centrální čáře.

Úhel stálé velikosti $2\,\vartheta$ se šine tak, že jeho vrchol m opisuje danou čáru (centrální), a při tom její normála úhel rozpoluje Ramena úhlu obalují dvě čáry (S_0) (S_1) a čáry (M_0), (M_1) jsou jejich evolventy a sice tak sdružené, že přímka $M_0 M_1$ je rovnoběžna s normálou čáry (m). Body S_0 a S_1 jsou pravoúhlé průměty středu křivosti S čáry (m) do ramen úhlu

Přímka $S_0 S_1$ je zde rovnoběžna s tečnou $m\,V$, tato je tedy normálou vrcholnice, t. j. vrcholnice je v uvažovaném případě evolventou centrální čáry (m) Dále přímka $M_0 M_1$ seče přímku $S_0 S_1$ v bodě hřbetním H a stojí na ní kolmo; tedy $S_0 S_1$ je stále normálou hřbetní čáry v půdoryse. Pro křivoznačné čáry na ploše kruhů Γ (jež kolmo protínají rovinu základní ve sdružených bodech $M_0 M_1$) máme známý vztah výše užitý

$$\log \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \int \frac{p_0\, d\tau}{q_0},$$

kde

$$p_0 = r\sin\vartheta,\quad q_0 = r\cos\vartheta$$

jsou složky vektoru $m\,M$ ve směru tečny a normály, a úhel $\frac{\alpha}{2} = M_0 M_1 P$ pro bod P křivoznačky ležící na kruhu Γ:

„Parametrická rovnice nekruhových křivoznaček zní

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = C\,e^{\tau \operatorname{tg}\vartheta},$$

kde τ je *úhel mezi* Ox a *tečnou čáry* (m), C stálé číslo."

Jednoduché výsledky dává případ kruhu jako centrální čáry (m). Zde body S_0 a S_1 opisují kruh soustředný a také přímka $S_0 S_1$ obaluje kruh soustředný; tedy zde čáry (M), (S), (V) a také hřbetnice (H) jsou evolventy kruhů o témž středu. —

Jednu z čar (S) možno voliti neodvisle, načež jest za čáru (m) vzíti jednu z trajektorií jejích tečen, které seče pod stálým úhlem $\frac{\pi}{2} - \vartheta$.

Volíme-li za čáru (S_0) pevný bod O, jest trajektorií kosoúhlou přímek Om logaritmická spirála, kdežto bod M_0 opíše kruh se středem O, jehož poloměr lze voliti neodvisle. Normála hřbetnice $S_0 S_1 \equiv O S_1$ prochází pevným bodem O, a je tedy hřbetnice kruh se středem O.

Buď centrální spirála (m) v polárních souřadnicích s pólem O

$$r = a\, e^{c\varphi}.$$

Normála její svírá s průvodičem úhel γ, $c = tg\,\gamma$; kolmice z pólu na normálu spuštěná má délku

$$\frac{1}{2} r_1 = r \sin \gamma$$

a směr $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} - \gamma$. Bod S_1 s bodem $O \equiv S_0$ vůči normále souměrně ležící má polární souřadnice r_1 a ψ, čára (S_1) je log. spirála

$$r_1 = 2\,a \sin\gamma\, e^{c\varphi} = 2\,a \sin\gamma\, e^{c\left(\psi + \gamma - \frac{\pi}{2}\right)},$$

t. j.

$$r_1 = \bar{a}\, e^{c\psi}, \quad \bar{a} = 2\,a \sin\gamma\, e^{-c\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}.$$

Čára (M_1) je pak evolventa této spirály.

OBSAH.

L.