Matyáš Lerch
Příspěvky k vlastnostem sférických čar šroubových

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 23 (1914), č. 33, 1–87

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501604

Příspěvky k vlastnostem sférických čar šroubových.

Podává **M. Lerch** v Brně.

S dvěma obrazy na zvláštní tabulce.

(Předloženo dne 2. července 1914.)

---

1. Hledejme čáru Γ té vlastnosti, že

1. protíná přímky jistého válce pod stálým úhlem (γ),
2. a leží na kouli (Σ).

Čáry takové slují šroubovice sférické (hélice sphérique).

Buď Π rovina kolmá na přímky plochy válcové. V libovolném bodě M čáry Γ svírá tečna její s přímkou válce úhel γ, a týž úhel svírají roviny kolmé na tyto přímky, t. j. normální rovina $\mathfrak{N}$ čáry Γ (v bodě M) a rovina Π.

Obalová plocha normálních rovin libovolné čáry sluje její plocha polární; její charakteristiky jsou osy křivosti uvažované čáry.

Pro sférickou čáru procházejí normální roviny $\mathfrak{N}$ pevným bodem, jenž jest střed V koule Σ. Polární plocha sférické čáry je tedy kuželová plocha s vrcholem V.

Pro naši čáru Γ svírají tečné roviny polárního kužele s danou pevnou rovinou Π stálý úhel γ; tudíž soudíme, že

„polární plocha sférické šroubovice je rotační kužel. Jeho vrchol je ve středu koule (která obsahuje šroubovici) a jeho osa je rovnoběžna s povrchovými přímkami válce, na němž čára je šroubovou".

Koule Σ protne polární kužel ve dvou kružnicích shodných; znamenejme jejich poloměr c, a délku strany kužele mezi jednou z těchto kružnic a vrcholem nazveme a; takže

$$c = a \cos \gamma .$$

Rovinu Π můžeme předpokládati vedenu jedním z těchto kruhů; znamenejme jej (c), a jeho střed buď O; bod V leží na kolmici OV na rovinu Π postavené, ve vzdálenosti

$$OV = a \sin \gamma.$$

Omezený kužel $V(c)$ oviňme pláštěm z látky dokonale ohebné a neroztažitelné; v rovinném tvaru (rozbaleném) je tento plášť kruhový o poloměru a, a jeho střed se při návoji klade do vrcholu V.

Mysleme si nyní jistý oblouk na čáře Γ, v němž se body singularní nevyskytují; normální rovina čáry Γ v bodě M je tečnou rovinou kužele $V(c)$ i dotýká se ho podél strany Vm, kde m je jistý bod kruhu (c).

Při odvíjení pláště s kužele přechází plášť v rovinu; tu zachytíme v okamžiku, kdy prochází bodem M; rovinu ta je nutně tečnou rovinou kužele $V(c)$, i můžeme předpokládati, že směr ovinutí byl tak volen, aby tato rovina splynula s rovinou $\mathfrak{N}$; neboť v opačném případě docílíme toho, provedeme-li ovinutí ve směru (smyslu) opačném.

Podržme na plášti bod daný polohou M, a pokračujme v odvíjení a navíjení kužele; náš bod při tom opíše jistou čáru Γ', která kolmo protíná tečné roviny kužele a je tedy orthogonální trajektorií rovin $\mathfrak{N}$; majíc s čarou Γ společný bod M, bude s ní identickou:

„Čára Γ jest evolventou kužele $V(c)$."

Bod m, pata osy křivosti bodu M na kruhu (c), je právě tam, kde obal opouští kužel a přechází v rovinu. Rozbalená část pláště je kruh v rovině $\mathfrak{N}$ se středem V.

Mysleme si kruhovou desku (a) téhož poloměru a, kterou přiložme na rovinu $\mathfrak{N}$ tak, aby se kryla s odvinutým pláštěm. Na desce máme body M a m jako na odvinutém plášti, a v pokračování směru Mm uvažujme

na kruhu (c) bod m',
na kruhu (a) bod m'',

tak, aby oblouky $m m'$, $m m''$ se sobě rovnaly. Pokračuje-li se v odvíjení pláště až ku straně $m' V$, padne bod m'' pohyblivé desky (a) do polohy m', t. j. jinými slovy:

„Pohyb vzniklý odvíjením pláště je totožný s kotálením kruhu (a) po kruhu pevném (c) tak, aby hybný kruh měl střed ve stálém bodě V."

Aneb též:

„Sférická šroubovice je zvláštní případ sférické epicykloidy; ten totiž, kdy střed valeného kruhu zůstává pevným."

Valíme-li kruh (a) ve směru zpětném dostatečně daleko, zaujme opisující bod M jednou polohu A na kruhu (c).

Naše čára Γ se tedy vytvoří valením kruhu (a) po kruhu (c) uvedeným způsobem, při čemž opisující bod vyjde z určité základní polohy A na kruhu (c).

V poloze, kdy kruh (a) se dotýká kruhu (c) v bodě m, jest jeho rovina $\mathfrak{R}$ tečnou rovinou kužele V (c) podél přímky $V\,m$. Bod M čáry Γ sestrojíme tím, že vedeme kruh $m\,M$ v rovině $\mathfrak{R}$ se středem V, a naneseme délku oblouku $m\,M$ rovnou oblouku $A\,m$ na kruhu (c).

Oskulační rovina Ω čáry Γ v bodě M je kolmá na osu křivosti $m\,V$; hlavní normála $M\,S$ pak leží v rovině $\mathfrak{R}$ (tečná rovina kužele) kolmo na přímku $m\,V$, a tedy

„hlavní normála sférické šroubovice Γ v bodě M je rovnoběžna s tečnou pevného kruhu (c) v bodě m".

Průsek její S s osou křivosti je střed křivosti čáry Γ.

Netřeba zvlášť dokazovati, že tečna $M\,t$ čáry Γ jest kolmice na rovinu $\mathfrak{R}$ vedená.

*

Zcela obecně můžeme každou čáru prostorovou vytvořiti jako evolventu její plochy polární. Tuto pokryjeme náplastí ohebnou a neroztažitelnou, a při její odvíjení jeden z bodů jejích probíhá danou čáru. V každé poloze jest opisující bod M v tečné rovině $\mathfrak{R}$ plochy polární podél přímky P, v níž náplasť plochu opouští. Kolmice $M\,S$ v rovině $\mathfrak{R}$ na přímku P stanoví střed křivosti S. Uvažujme na ploše polární čáru (S), geometrické to místo bodu S. Bod M zachycený na hybné — odvíjené — rovině považujme vůči této za stálý, znamenajíce jej A'; jeho poloha na ploše před odvíjením jest A.

Při odvíjení náplasti je bod S vždy na rozhraní částí rovné a křivé (náplasti) a po rozbalení náplasti tvoří čára (S) úpatnici čáry úvratní pro pól A' (jenž jest poloha bodu A po rozvinutí). Toť známá věta Lancretova.

V případě čáry sférické se úvratnice redukuje na bod (V), a úpatnice přechází v kruh nad průměrem $V\,A'$. V našem případě zvláště:

„Čára středů křivosti sférické šroubovice Γ jest ona křivka, jež při rozvinutí kužele V (c) rozkrojeného podél strany $V\,A$ přechází v kruh nad průměrem $V\,A$."

Obdržíme ji pomocí kruhového nálepu poloměru $\frac{a}{2}$ přiloženého na kužel V (c) tak, aby průměr nálepu se kryl s přímkou $V\,A$.

Avšak tím není čára (S) ještě vyčerpána, ani není dosti přesně vyznačena.

Úhel středový $m\,V\,M$ příslušný odvalenému oblouku $m\,M$ (odvalený úhel) na kruhu hybném znamenejme φ, dále buď ψ úhel středový $A\,O\,m$ příslušný k odvalenému oblouku $A\,m$ (odvalený úhel) na kruhu pevném (c).

Od $\varphi = 0$ do $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nacházejí se paty kolmic na délkách, v něž přešly strany kužele V (c), a jich souhrn tvoří půlkruh. Body S jsou na okraji půlkruhového nálepu přiloženého na (omezený) plášť kužele V (c).

Avšak od $\varphi = \frac{\pi}{2}$ do $\varphi = \pi$ jsou paty kolmic na délkách prodloužených a příslušný nálep třeba učiniti na druhém plášti (prodlouženého) kužele, a sice opět půlkruh; další půlkruh ($\varphi = \pi \ldots \varphi = \frac{3}{2}\pi$) zůstává na prodlouženém plášti, načež se pro hodnoty ($\varphi = \frac{3}{2}\pi \ldots \varphi = 2\pi$) vrátíme na plášť původní.

Mezi úhly φ a ψ vládne vztah

$$a\varphi = c\psi,$$

tedy hodnotám

$$\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$$

příslušejí

$$\psi = 0, \frac{a\pi}{2c}, \frac{a\pi}{c}, 3\frac{a\pi}{2c}, \frac{2a\pi}{c};$$

body m jim příslušné (stopy os křivosti) buďte

$$q, q', q'', q''', q^{(4)}.$$

Na plášť $V(c)$ přilepíme půlkruh nad průměrem a, tak aby průměr pokryl přímku qV; po té na plášť prodlouženého kužele přilepíme celý kruh tak, aby průměr pokryl prodlouženou stranu $q''V$, načež půlkruhem se vrátíme na plášť $V(c)$ tak, aby průměr pokryl délku $q^{(4)}V$.

Bod $q^{(4)} \equiv B$ leží na čáře Γ a jest koncovým bodem jedné větve její; pokračování čáry Γ od bodu B se obdrží z této základní větve její otočením kolem osy OV o úhel $\frac{2a\pi}{c}$, čímž bod A zaujme polohu B.

Počet větví těchto je nekonečný, je-li poměr $a:c$ irracionalní; v opačném případě je počet větví konečný a čára jest unikursální, jak vysvítá z příslušných rovnic.

*

2. Rovinu kruhu (c) zvolme za Oxy (půdorys), přímku OA za osu Ox, takže nárysná rovina Oxz splývá s rovinou AOV.

V obrazci 1. veden kruh $(c) \equiv AmA'$, a zvolen vrchol V svými průměty $V_1 \equiv O$, V_2. Po odvalení oblouku $c\psi = Am$ na pevném kruhu leží opisující bod M v poloze, již určíme následovně.

Rovinu $\mathfrak{R}$, která obsahuje bod M, sklopíme kol její půdorysné stopy $\mathfrak{R}^1$ — je to tečna kruhu (c) v bodě m — do roviny xy; střed kruhu (a) při tom zaujme polohu C na přímce Om a bod M padne do (M) na kruhu $m(M)$ o středu C, tak aby oblouk $m(M) = a\varphi =$ obl. $Am = c\psi$.

Při sklápění roviny $\mathfrak{R}$ opisuje bod M kružnici, jejíž průmět je přímka $(M)P \perp \mathfrak{R}^1$. Pravoúhlý trojúhelník PM_1M (M_1 půdorys bodu M) má při P úhel $\gamma = OA'V_2$. Naneseme tedy na $A'V_2$ délku $A'M' = P(M)$, načež bude $P M_1$ průmět vektoru $A' M'$ do $O x$, a nárys má výšku z rovnou průmětu tohoto vektoru do $O z$, t. j. nárys M_2 bodu M je na přímce $M' M_2 \parallel O x$.

Tím sestrojeny průměty bodu M, a je tato část konstrukce nejsložitější.

Znajíce u roviny normální $\mathfrak{N}$ stopu půdorysnou, vedeme její uzlem (na $O x$) a bodem V_2 stopu nárysnou $\mathfrak{N}^{II}$; načež kolmice $M_1 t_1$, $M_2 t_2$ na stopy tyto vedené podávají průměty tečny čáry šroubové Γ.

Bezprostředně strojíme průměty osy křivosti ($V_1 m$, $V_2 m_2$); stopa Ω^I roviny oskulační Ω prochází pak půdorysnou stopou tečny t a je kolmá na $V_1 m \equiv O m$; nárysná stopa Ω^{II} je kolma na $V_2 m_2$.

Hlavní normála $M S$ má průměty $M_1 S_1 \parallel \mathfrak{N}^I$, $M_2 S_2 \parallel O x$ (t. j. $M_2 S_2$ leží v $M' M_2$), střed křivosti (S_1, S_2) jest její průsek s přímkou $V m$. Poloměr křivosti sférické šroubovice $M S = M_1 S_1$.

Znajíce stanovení bodů a jich tečen pro oba průměty čáry Γ přistupme k určení jich středů křivosti.

Abychom toho docílili pro půdorys, uvažujme promítající válec kolmý na $O x y$. Jeho kolmý řez vedený bodem M je shodný s průmětem Γ_1, a je to zároveň hlavní řez normální pro plochu válcovou. Druhý hlavní poloměr křivosti je nekonečný; poloměr křivosti ϱ_1 čáry Γ_1 bude tedy s poloměrem obecného řezu normálního ϱ souviseti rovnicí Eulerovou

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 \omega}{\varrho_1},$$

kde ω jest úhel sevřený tečnama obou řezů.

Poněvadž rovina oskulační Ω obsahuje přímku $M S$, která jest očividně normálou válce, jest řez roviny Ω s válcem čára, pro niž známe poloměr křivosti $\varrho = M S = M_1 S_1$.

Tečna hlavního řezu je kolmá na stranu válce a svírá s tečnou šroubovice úhel $\omega = \frac{\pi}{2} - \gamma = A' V_2 O$.

Máme tak

$$\varrho_1 = \varrho \cos^2 \omega = \varrho \sin^2 \gamma = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \varrho,$$

poněvadž

$$c = a \cos \gamma.$$

Z obrazce pak vychází pro $\varrho = M_1 S_1$

$$\varrho = a \sin \varphi,$$

a tedy jest

$$\varrho_1 = \frac{a^2 - c^2}{a} \sin \varphi.$$

Střed křivosti σ průmětu Γ_1 leží na vektoru $M_1 S_1$; jeho vzdálenost od bodu S_1 obnáší $\varrho - \varrho_1$, t. j.

$$\overline{S_1 \sigma} = \frac{c^2}{a} \sin \varphi = c \cos \gamma \sin \varphi.$$

Naneseme tedy stálou délku $c \cos \gamma = C \sigma'$ na rameno C (M); přímka $\sigma' \sigma$ rovnoběžná s $C m$ protne $M_1 S_1$ v hledaném středu křivosti σ.

Z Eulerovy a Meusnierovy věty bychom též snadno vyvodili konstrukci poloměru křivosti pro nárys; omezíme se však na jeho analytické vyjádření, které bude podáno v čl. 5.

*

3. Bod (M) vzniklý sklopením roviny $\mathfrak{R}$ kol stopy $\mathfrak{R}^1$ do půdorysny opisuje epicykloidu, kterou opisuje bod hybného kruhu poloměru a valeného po kruhu (c), a sice vychází bod ten ze začáteční polohy A.

Mohli jsme však sklopiti rovinu $\mathfrak{R}$ na opačnou (vnitřní) stranu, čímž by bod M padl do polohy $(\overline{M})$, střed valeného kruhu do polohy C'. Bod $(\overline{M})$ pak opisuje rovněž epicykloidu. Při její konstrukci opíšeme kruhový oblouk m $(\overline{M})$ o středu C' ($C' m$ má délku a) rovný oblouku Am.

Veďme přímku m $(\overline{M})$, její druhý průsek s kruhem (c) buď bod μ. Rovnoramenné trojúhelníky $O m \mu$ a $C' m$ $(\overline{M})$ jsou si podobny, majíce společný úhel (m) při základně, a tedy $O \mu \parallel C'$ $(\overline{M})$, i máme rovnost úhlů

$$\varphi = m C' (\overline{M}) = m O \mu.$$

Prodlužme poloměr $O \mu = c$ o délku $a - c = \mu \overline{C}$ do $O \overline{C}$; z rovnosti délek C' $(\overline{M}) = a = O \overline{C}$ na rovnoběžkách plyne, že obrazec $O C' (\overline{M}) \overline{C}$ je rovnoběžník, tedy $\overline{C}$ $(\overline{M}) = O C' = a - c$.

Máme tudíž $\overline{C}$ $(\overline{M}) = \overline{C} \mu$, t. j. bod $(\overline{M})$ leží na kruhu opsaném ze středu $\overline{C}$ poloměrem $\overline{C} \mu = a - c$. Oblouk μ $(\overline{M})$ tohoto kruhu má hodnotu $(a - c) \varphi = a \varphi - c \varphi$, a je tedy

$$\text{obl. } \mu (\overline{M}) + \text{obl. } m \mu = a \varphi = \{\text{obl. } m (\overline{M})\}_a = \{\text{obl. } A\, m\}_c ,$$

kde indexy u závorek udávají poloměry příslušných oblouků.

Odtud plyne očividně

$$\{\text{obl. } A\, \mu\}_c = \{\text{obl. } \mu (\overline{M})\}_{a-c} ,$$

t. j. bod $(\overline{M})$ opisuje epicykloidu vzniklou valením kruhu poloměru $a - c$ po kruhu (c).*)

Odvalený úhel na kruhu hybném $= \varphi$, na kruhu pevném $= \psi - \varphi$.

Přímka $(\overline{M})$ $\overline{C} \parallel C' O m$ je kolmá na $\mathfrak{R}^1$ a splývá s přímkou $(M) P$, t. j. s průmětem tečny, a je tedy tečnou půdorysu Γ_1.

---

*) La Hire, Traité des épicycloïdes (1694), str. 390—392. Srov. F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables, sv. II., str. 155 a násl.

Avšak přímka spojující opisující bod se středem hybného kruhu obaluje epicykloidu, která vznikne valením kruhu polovičního poloměru po témž pevném kruhu.*)

V důsledku toho místo bodu M_1, t. j. průmět Γ_1 jest epicykloidou, kterou opíše bod kruhu poloměru $\frac{a-c}{2}$ při jeho kotálení po**) kruhu (c).

K témuž výsledku dospějeme přímo: Nejprvé plyne z podobnosti trojúhelníků $m\,O\,\mu$, $m\,C'\,(\overline{M}')$ vztah

$$m\,\mu : m\,(\overline{M}) = c : a,$$

a v pravoúhlém trojúhelníku $m\,P\,(\overline{M})$ bude dle toho vzdálenost bodu μ od přímky $\mathfrak{N}^1 \equiv m\,P$ míti hodnotu

$$\frac{c}{a} \,.\, (\overline{M})\,P = P\,M_1\,,$$

a tudíž leží bod M_1 na přímce ($\mu\,M_1 \parallel \mathfrak{N}^1$) vedené bodem μ rovnoběžně se stopou $\mathfrak{N}^1$.

Vrchol M_1 pravoúhlého trojúhelníka $\overline{C}\,M_1\,\mu$ tedy leží na kruhu opsaném ze středu D (na přeponě $\overline{C}\,\mu$) poloměrem $D\,\mu = \frac{a-c}{2}$. Obvodový úhel oblouku $\mu\,M_1$ jest $\mu\,\overline{C}\,(\overline{M}) = \varphi$, středový úhel jeho tedy $= 2\,\varphi$ a délka jeho

$$\frac{a-c}{2} \,.\, 2\,\varphi = (a-c)\,\varphi = c\,(\psi - \varphi) = \left\{\text{obl. } A\,\mu\right\}_c$$

Tím naše věta dokázána přímo a zároveň vidno, že při valení kruhu $\left(\frac{a-c}{2}\right)$ po kruhu (c) přísluší bodu M_1 odvalený úhel $\psi - \varphi$ na pevném a $2\,\varphi$ na hybném kruhu.

*

Konstrukce bodu M_1 spočívá na úměře

$$P\,M_1 : P\,(M) = c : a,$$

a dle ní se musí přímky $C\,(M)$ a $O\,M_1$ protnouti na přímce $\mathfrak{N}^1$ v bodě n.

Na té vlastnosti lze založiti důkaz Buffoneovy věty, nezávislý na větě La Hireově. Potřebí je k tomu následující planimetrické věty:

Buď m pata výšky trojúhelníku $O\,C\,n$; $O\,m = c$, $C\,m = a$; opišme kružnice (c), (a) mající středy v druhých dvou vrcholech O, C, a které se dotýkají výšky v bodě m. Větší z nich protne přiléhající stranu v bodě

---

*) M. Chasles, Corresp. math. et phys. (Quetelet) 1832; svaz. I., str. 4. Viz též F. G. Teixeira, Traité des courbes, II., str. 165.

**) Teixeira l. c. str. 402. Ang. Buffone, Giorn. di Mat. 1896.

(M), jím vedená rovnoběžka se základnou stanoví na druhé straně bod M_1; nechť kolmice $M_1 \mu$ na základnu spuštěná protne menší kruh v bodě μ. Pak

1⁰ Úhel $m O \mu$ se rovná úhlu C v trojúhelníku,

2⁰ Kružnice L opsaná poloměrem $\frac{a-c}{2}$ a tečná v bodě μ s kruhem (c) obsahuje bod M_1.

3⁰ Oblouky $m \mu$ na (c) a μM_1 na L mají za součet oblouk $m (M)$ na (a).

Znamenejme k vůli stručnosti opět $\sphericalangle C = \varphi$, $\sphericalangle m O \mu = \chi$; pak nám vztahy

$$P (M) = a - a \cos \varphi, \; P M_1 = c - c \cos \chi$$
$$P (M) : P M_1 = a : c$$

podávají $\varphi = \chi$.

Nechť osa bodů M_1 a μ protne $O \mu$ v bodě D, a položme $D \mu = r$, $M_1 \mu = l$. V kruhu opsaném ze středu D poloměrem r stanoví se tětiva l vzorcem

$$l = 2 r \sin \chi = 2 r \sin \varphi,$$

dále máme pro délku $M_1 S_1$ výrazy

$$l + c \sin \chi, \; a \sin \varphi;$$

jich srovnáním plyne

$$(2 r + c) \sin \varphi = a \sin \varphi,$$

t. j.

$$r = \frac{a-c}{2},$$

čímž stanoven poloměr kruhu L.

Konečně hodnoty

$$\text{obl. } m \mu = c \varphi, \; \text{obl. } \mu M_1 = r \,.\, 2 \varphi = (a - c) \varphi, \; \text{obl. } m (M) = a \varphi$$

verifikují udaný vztah mezi oblouky. Applikujeli se tato věta na naši konstrukci bodu M_1, vychází odtud povaha čáry Γ_1 jako epicykloidy výše popsané.

Konečně můžeme z předešlých konstrukcí určiti křivku (S_1), kterou opisuje průmět středu křivosti sférické šroubovice.

Přímka $M_1 S_1$ jakožto normála epicykloidy obaluje opět epicykloidu; ježto $O S_1 \perp M_1 S_1$, vychází věta, že čára (S_1) jest úpatnicí jisté epicykloidy z jejího středu jakožto pólu.

Polární souřadnice bodu S_1 jsou

$$O S_1 = r, \; \sphericalangle A O S_1 = \psi,$$

i plyne z trojúhelníka $O S_1 \mu$, v němž úhel při O jest φ,

$$r = c \cos \varphi, \; a \varphi = c \psi,$$

tedy polární rovnice čáry (S_1)

$$r = c \cos\left(\frac{c}{a}\,\psi\right);$$

křivky tyto nazval Guido Grandi růžicemi (rhodonaea, rosace).

Naopak lze každou růžici

$$r = c \cos k\,\psi,$$

jejíž paramétr k je ryzí zlomek, stanoviti jako průmět geodetické kružnice*) na rotačním kuželi do jeho základny. Délka strany kužele patrně

$$a = \frac{c}{k}\,.$$

Analytické odvození úpatnice epicykloidy pro pól v její středu položený viz Teixeira l. c. str. 162.

Z polární rovnice růžice plyne

$$x + i\,y = e^{i(\psi - \varphi)}\left[\frac{c}{2} + \frac{c}{2}\,e^{2i\varphi}\right],$$

i bude lze čáru (S_1) vyjádřiti jako modifikovanou epicykloidu.

Nechť se po kruhu (R) poloměru R kotálí po vnější straně kruh poloměru r, jehož střed buď C; jeden z jeho bodů P opisuje obyčejnou epicykloidu; bod Q na přímce $C\,P$ určený ramenem $C\,Q = g$ (algebraicky pojatým, a sice je g kladné pro případ, že Q leží na téže straně bodu C jako bod P) pak opisuje epicykloidu prodlouženou neb zkrácenou (modifikovanou); pravoúhlé souřadnice bodu Q dány jsou rovnicí

$$x + i\,y = e^{i\alpha}\,(R + r - g\,e^{i\beta}),\ R\,\alpha = r\,\beta\,,$$

je-li začáteční poloha bodu P v místě $x = R$, $y = 0$.

A sice značí tu α odvalený úhel na kruhu pevném, β odvalený úhel na kruhu hybném.

Hořejší vyjádření čáry (S_1) vznikne odtud pro

$$R = \frac{c^2}{a + c}\,,\ r = \frac{c\,(a - c)}{2\,(a + c)}\,,\ g = -\frac{c}{2}\,;$$

$$\alpha = \psi - \varphi,\ \beta = 2\,\varphi.^{**)}$$

Epicykloida opsaná bodem P je v tomto případě homothetická s čarou Γ_1, a sice je multiplikátor $= \dfrac{c}{a + c}$.

---

*) t. j. čáry, jež rozvinutím kužele v rovinu přechází v kruh.

**) Tuto zmíněnou vlastnost růžic znal již Suardi (1752) a dokázal Ridolfi (1844); viz Teixeira, l. c., str. 212.

Zvětšíme-li průvodiče $O S_1$ v poměru $a + c : c$, obdržíme prodlouženou epicykloidu s prvky

$$R = c,\ r = \frac{a - c}{2},\ g = -\frac{a + c}{2} = -\left(\frac{a - c}{2} + c\right);$$

prodloužíme-li tedy vektor $M_1 D$ o délku $\frac{a + c}{2} = O D$, padne koncový bod do přímky $O m$.

Rovnoběžka s osou rotačního kužele u vzdálenosti r od ní vedená protne tento kužel v bodě, jehož výška jest

$$z = (c - r)\, tg\, \gamma = (c - r) \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}.$$

Po dosazení hodnoty

$$r = c \cos \varphi$$

obdržíme jako třetí souřadnici bodu S

$$z = (1 - \cos \varphi) \sqrt{a^2 - c^2},$$

takže naše čára středů křivosti sférické šroubovice jest analyticky dána rovnicemi

$$(S) \quad x = c \cos \varphi \cos \psi,\ y = c \cos \varphi \sin \psi,\ z = (1 - \cos \varphi) \sqrt{a^2 - c^2},$$

$$a \varphi = c \psi.$$

Potlačíme-li vztah mezi φ a ψ vládnoucí, probíhají body (S) při neodvislých φ a ψ naši plochu kuželovou

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} = \frac{(z - \sqrt{a^2 - c^2})^2}{a^2 - c^2};$$

čára středů (S) jest na ní charakterisována rovnicí

$$a \varphi = c \psi.$$

Je-li σ délka oblouku $A M_1$ na průmětu Γ_1, bude příslušný oblouk $A M$ šroubovice sférické dle obecného vzorce

$$s = \frac{\sigma}{\sin \gamma},\ \left(\cos \gamma = \frac{c}{a}\right),$$

při čemž značí γ jako výše stálý úhel mezi tečnou čáry a stranou válce.

Poněvadž oblouk σ na epicykloidě určen elementárním výrazem

$$\frac{4 r (R + r)}{R} \left(1 - \cos \frac{\beta}{2}\right),$$

tedy v našem případě čáry Γ_1, kdy $R = c,\ r = \frac{a - c}{2},\ \beta = 2 \varphi$

$$\sigma = \frac{a^2 - c^2}{c} (1 - \cos \varphi),\quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

bude v uvedených mezích $0 \leq \varphi \leq \pi$

$$s = a\, tg\, \gamma\, (1 - \cos \varphi),$$

dále v intervallu $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$

$$s = a\, tg\, \gamma\, (3 + \cos \varphi).$$

Oblouk sférické šroubovice se tedy určí elementárními prostředky.*)

Čára Γ je průseč koule $x^2 + y^2 + (z - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = a^2$ s válcem, jehož přímý řez jest epicykloida Γ_1. Na té odpovídají body vratu hodnotám $\varphi = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Příslušné povrchové přímky válce jsou singulární, a také budou jich průsečíky s koulí singulární body čáry Γ, a sice body vratu. Takové jsou na základní větvi tři: $\varphi = 0, \pi, 2\pi$ (pokud není $\frac{a}{c}$ číslo celistvé; v tom případě poslední bod splývá s prvním, A).

*

4. Průběhem úvah v předešlém odstavci dospěli jsme k výsledku, že lze každou růžici, jejíž paramétr je menší jedné, sestrojiti jako průmět kruhového nálepu na rotačním kuželi. Tento vztah možno zobecniti, čímž zároveň vynikne jeho pravá podstata.

Čára

(C) $\quad x = c \cos \varphi \cos \psi,\ y = c \cos \varphi \sin \psi,\ z = b \cos \varphi,\ a\, \varphi = c\, \psi,$

leží na rotačním kuželi

$$\frac{x^2 + y^2}{c^2} = \frac{z^2}{b^2}.$$

Je-li $M\,(x\,y\,z)$ bod čáry, seče povrchová přímka $O\,M$

$$\frac{x}{z} = \frac{c}{b} \cos \psi,\ \frac{y}{z} = \frac{c}{b} \sin \psi$$

základnu kužele $z = b$ v bodě

(m) $\quad x = c \cos \psi,\ y = c \sin \psi,\ z = b;$

na rovině základní leží též bod čáry (C)

(A) $\quad \varphi = 0 = \psi;\ x = c,\ y = 0,\ z = b.$

Úhel ψ patrně se měří na oblouku $A\,m$.

Po rozvinutí kužele v rovinu přechází část pláště mezi přímkami $O\,A$, $O\,m$ a základnou v kruhovou výseč poloměru

$$O\,A = l = \sqrt{b^2 + c^2},$$

se středovým úhlem ω, a bude — ježto obl. $A\,m = c\,\psi$ —

$$l\,\omega = c\,\psi = a\,\varphi.$$

*) P. Serret, Théorie des lignes à double courbure; 1860.

Znamenáme-li $OM = r$ průvodič bodu M, máme nejprvé na kuželi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^2}}\, z = \sqrt{b^2 + c^2} \cos \varphi,$$

předpokládáme-li $b > 0$.

Polární rovnice rozbalené čáry C bude tedy

$$(C^*) \qquad r = l \cos \frac{l\,\omega}{a},$$

a je to růžice s poloměrem l a parametrem $\frac{l}{a}$; průmět čáry C jest růžice

$$(C_0) \qquad r = c \cos \frac{c}{a}\, \psi$$

s poloměrem c a parametrem $\frac{c}{a}$.

Znamenáme-li γ úhel mezi stranou kužele a jeho osou, bude

$$c = l \sin \gamma.$$

„Nalepíme-li na plášť rotačního kužele s otvorem 2γ rovinu s růžicí

$$r = l \cos \varepsilon\, \omega$$

tak, aby střed růžice padl do vrcholu kužele, zaujme růžice místo prostorové čáry C, která se do základny kužele promítá v růžici, jejíž poloměr i parametr se ve stejném poměru zmenší a sice jako $1 : \sin \gamma$."

Je-li zvláště $\varepsilon = 1$, je nálep kruh procházející vrcholem, a průmět je růžice s parametrem $\sin \gamma$.

Naopak se růžice v nálepu s parametrem $\varepsilon = \frac{1}{\sin \gamma} > 1$ promítá v kruh procházející středem základny, takže příslušná čára prostorová jest algebraickou stupně 4. V tomto případě $a = c$, $\psi = \varphi$ jsou rovnice čáry

$$x = c \cos^2 \varphi, \; y = c \sin \varphi \cos \varphi, \; z = b \cos \varphi \; \left(tg\, \gamma = \frac{c}{b}\right),$$

z nichž vychází při označení $k = tg\, \gamma = \frac{c}{b}$

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2, \; x^2 + y^2 - c\,x = 0,$$

t. j. čára je pronikem rotačního kužele s kruhovým válcem, jenž obsahuje osu kužele jako svou stranu.

Svazek ploch 2. stupně jí určený

$$(2) \qquad (1 + \lambda)(x^2 + y^2) - k^2 z^2 - \lambda\, c\, x = 0$$

obsahuje kouli $(\lambda + 1 = -k^2)$

$$(2^0) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{k^2+1}{k^2} c\, x = \frac{c\, x}{\sin^2 \gamma},$$

která se dotýká kruhového válce čáry, t. j. čára tato jest hyppopéda Eudoxova.*)

*

5. Epicykloida vytvořená bodem hybného kruhu (r) při jeho kotálení po pevném kruhu (R) se středem v O jest charakterisována rovnicí**)

$$x + i\, y = (R + r)\, e^{i\alpha} - r\, e^{i(\alpha+\beta)}, \quad R\, \alpha = r\, \beta,$$

při čemž α, β jsou odvalené úhly na kruhu pevném a hybném, a poloha začáteční $\alpha = 0 = \beta$ je v ose $O\,x$ ($x = R$, $y = 0$).

V našem případě čáry Γ_1 máme

$$R = c, \; r = \frac{a - c}{2}, \; \alpha = \psi - \varphi, \; \beta = 2\,\varphi, \; a\,\varphi = c\,\psi,$$

takže průmět šroubové čáry sférické Γ je dán vztahem

$$(1) \qquad x + i\, y = \frac{a + c}{2} e^{i(\psi - \varphi)} - \frac{a - c}{2} e^{i(\psi + \varphi)}.$$

Differencováním plyne

$$d\,x + i\,d\,y = \frac{a^2 - c^2}{2\,c}\, i\, e^{i(\psi - \varphi)} (1 - e^{2i\varphi})\, d\,\varphi$$

a odtud pro prvek oblouku u průmětu

$$d\,\sigma = \frac{a^2 - c^2}{c} \sin \varphi\, d\,\varphi.$$

Oblouk průmětu bude dán výrazem***)

$$\sigma = k - \frac{a^2 - c^2}{c} \cos \varphi,$$

kde k je veličina stálá.

Podmínka, aby čára byla šroubovou, zní

$$z = \lambda\,\sigma + \mu,$$

*) Srov. naši rozpravu O dvou plochách stupně čtvrtého, čl. I. (Rozprav České Akademie roč. XXII, č. 36; 1913).

**) Jinak známá tato věc plyne jednoduše z obrazce na základě sečítání vektorů v rovině.

***) V intervalech $(2\,\nu - 1)\,\pi \leq \varphi \leq 2\,\nu\,\pi$ třeba změniti znamení u druhého členu, neboť tu $\sin \varphi$ je záporné, takže v tomto v případě dlužno klásti

$$\frac{d\,\sigma}{d\,\varphi} = \frac{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}{d\,\varphi} = -\frac{a^2 - c^2}{c} \sin \varphi.$$

kde λ, μ jsou stálé; tu možno klásti $k = 0$; máme pak

$$(1^0)\quad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi+\varphi) \\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi+\varphi) \\ z &= -\lambda\frac{a^2-c^2}{c}\cos\varphi + \mu. \end{aligned}\right.$$

Z prvních dvou rovnic plyne

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{a^2-c^2}{2}\cos 2\varphi,$$

dále jest

$$(z-\mu)^2 = \lambda^2\frac{(a^2-c^2)^2}{c^2}\cos^2\varphi, \quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1;$$

tudíž sečtením vychází

$$x^2 + y^2 + \frac{c^2}{\lambda^2(a^2-c^2)}(z-\mu)^2 = a^2,$$

rovnice plochy 2. stupně obsahující naši čáru. Aby to byla čára sférická, musí tato plocha býti koulí, t. j.

$$\lambda = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

Oběma znamením odpovídá v našem vyjádření šroubová čára sférická, a to při libovolném μ. Žádáme-li, aby koule procházela bodem A ($x = c$, $y = z = 0$), máme

$$\mu^2 = a^2 - c^2.$$

Aby bylo $z = 0$ pro $\varphi = 0$, musí λ a μ býti stejného znamení; našim předpokladům odpovídá μ kladné, tedy

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \mu = \sqrt{a^2-c^2},$$

takže parametrické vyjádření sférické šroubovice v poloze námi uvažované zní

$$(1^*)\quad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi+\varphi) \\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi-\varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi+\varphi) \\ z &= \sqrt{a^2-c^2}\,(1-\cos\varphi) \\ a\,\varphi &= c\,\psi. \end{aligned}\right.$$

Analytický zákon oblouku se mění, přestoupí-li průmět bodu bod vratu; také čára (Γ), v niž přejde šroubovice po rozvinutí válce v rovinu, mění v těch místech náhle směr, a nesestává z jediné přímky, nýbrž z čáry

lomené o přímých složkách, které jsou k povrchovým přímkám stejně nakloněny.

Hodnota

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} = cotg\, \gamma, \ \left(\cos \gamma = \frac{c}{a}\right)$$

udává směrnici rozvinuté čáry pro oblouk $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, v následujícím intervallu zní zákon oblouku

$$\varkappa + \frac{a^2 - c^2}{c} \cos \varphi ,$$

a tedy bude vztah mezi výškou bodu M a obloukem σ pozměněn na

$$z = - \lambda \sigma + \mu',$$

takže směrnice lomené čáry v intervallu $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ bude $- \lambda$.

Pro nárysný průmět čáry Γ máme

$$(\Gamma_2) \qquad \left| \begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2} \cos(\psi - \varphi) - \frac{a-c}{2} \cos(\psi + \varphi) \\ z &= \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos \varphi)\,; \ a\varphi = c\psi, \end{aligned} \right.$$

a rovnice ty podávají realné body i pro ryze pomyslné parametry ψ; čára Γ_2 prochází bodem A, a nemá v něm žádné singularity.

Z rovnic

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{a^2 - c^2}{c} \cos \psi \sin \varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \sqrt{a^2 - c^2} \sin \varphi$$

plyne

$$\frac{dx}{dz} = tg\, \gamma . \cos \psi ,$$

z čehož vychází jednoduchá konstrukce tečny.

Dále

$$\frac{d^2 x}{d z^2} = - \frac{a}{c^2} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \varphi} ,$$

z čehož plyne pro poloměr křivosti nárysu

$$(2) \qquad P = \frac{(a^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}{a c} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} .$$

V bodě A $(\psi = 0)$ máme

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{c}{a}, \ P = a,$$

t. j. střed křivosti tu padne do V_2.

Pro ellipsu

$$x = c \cos \psi, \ z = a \sin \psi$$

má poloměr křivosti hodnotu

$$E = \frac{(a^2 \cos^2 \psi + c^2 \sin^2 \psi)^{3/2}}{a\,c};$$

je tedy

(2°) $$P = E \frac{\sin \varphi}{\sin \psi};$$

sestrojíme tedy poloměr křivosti u ellipsy, načež pomocí sinusové věty o trojúhelníku snadno obdržíme P.

V bodech obratních je $P = \infty$, tedy má nárys obrat v místech $\psi = \pm\,\pi, \pm\,2\pi, \pm\,3\,\pi, \ldots$, pokud na nich $\sin \varphi = \sin \left(\frac{c}{a}\,\psi\right)$ jest od nully různo.

Naproti tomu hodnoty $\varphi = \pm\,\pi, \pm\,2\,\pi, \pm\,3\,\pi, \ldots$, pokud pro ně nevymizí též $\sin \psi$, dávají body vratní (kuspidální).

*

Hlavní normála leží v rovině $Z = z$, a v rovině kolmé na přímku $O\,m$ u vzdálenosti $O\,S_1 = c \cos \varphi$ od Oz. Její rovnice znějí tedy:

(3) $$X \cos \psi + Y \sin \psi = c \cos \varphi, \; Z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos \varphi).$$

Stopa $\mathfrak{N}^1$ roviny normální má rovnici

$$X \cos \psi + Y \sin \psi = c,$$

tedy úseky na osách normální rovinou stanovené jsou

$$\frac{c}{\cos \psi}, \; \frac{c}{\sin \psi}, \; \sqrt{a^2 - c^2},$$

a rovina normální má rovnici

(4) $$X \cos \psi + Y \sin \psi + Z \cotg \gamma = c, \;\; \cotg \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Tečna tedy je vyjádřena rovnicemi*)

(5) $$\frac{X - x}{\cos \psi} = \frac{Y - y}{\sin \psi} = \frac{Z - z}{\cotg \gamma},$$

a její směrnice (kosinusy směrné) mají hodnoty

(5a) $$\sin \gamma \cos \psi, \; \sin \gamma \sin \psi, \; \cos \gamma.$$

Směrnice osy křivosti $V\,m$ jsou (a zároveň binormály)

(6) $$-\cos \gamma \cos \psi, \; -\cos \gamma \sin \psi, \; \sin \gamma,$$

a rovina oskulační má tedy rovnici

(7) $$X \cos \psi + Y \sin \psi - \operatorname{tg} \gamma\,(Z - z) = c \cos \varphi.$$

---

*) V bodech $\psi = \pm\,n\,\pi$ — pro něž nárys má obrat — jsou tečny rovnoběžny s nárysnou $O\,x\,z$.

Kladný směr hlavní normály $M\,S$

$$-\sin\psi,\ \cos\psi,\ 0\,.$$

Dále je poměr poloměru křivosti ϱ k poloměru kroucení T

$$\frac{\varrho}{T}=\frac{d\,(-\cos\gamma\cos\psi)}{d\,(\sin\gamma\cos\psi)}=-\operatorname{cotg}\gamma$$

tudíž

$$\varrho=a\sin\varphi,\ T=-a\operatorname{tg}\gamma\sin\varphi\,.$$

Souřadnice středu křivosti nalezeny výše ve tvaru

(8) $$X=c\cos\varphi\cos\psi,\ Y=c\cos\varphi\sin\psi\,,$$
$$Z=\sqrt{a^2-c^2}\,(1-\cos\varphi)$$

*

Obraťme se k ploše hlavních normál. Tyto jsou rovnoběžny s rovinou $O\,x\,y$, a společná kolmice každých dvou prochází průsekem jich průmětů; totéž platí o dvou hlavních normálách nekonečně blízkých, jejich společná kolmice je rovnoběžná s $O\,z$ a její stopa se blíží bodu na evolutě čáry Γ_1, t. j. středu křivosti σ čáry Γ_1 v bodě M_1. Kolmice v bodě σ na rovinu $O\,x\,y$ vztyčená protíná hlavní normálu v t. zv. středním bodě; geometrické místo těchto bodů tvoří strikční čáru plochy hlavních normál.

Pro epicykloidu

$$x+i\,y=e^{i\alpha}\,(R+r-r\,e^{i\beta}),\ R\,\alpha=r\,\beta\,,$$

je střed křivosti dán vzorcem

$$X_0+i\,Y_0=\frac{R}{R+2\,r}\,e^{i\alpha}\,(R+r+r\,e^{i\beta})\,,$$

tedy v našem případě $R=c$, $2\,r=a-c$, $\beta=2\,\varphi$, $\alpha=\psi-\varphi$ bude

(9) $$\left|\begin{aligned} X_0&=\frac{c}{a}\,\frac{a+c}{2}\cos(\psi-\varphi)+\frac{c}{a}\,\frac{a-c}{2}\cos(\psi+\varphi)\,,\\ Y_0&=\frac{c}{a}\,\frac{a+c}{2}\sin(\psi-\varphi)+\frac{c}{a}\,\frac{a-c}{2}\sin(\psi+\varphi)\,;\end{aligned}\right.$$

to jsou výrazy souřadnic bodu na strikční čáře, třetí souřadnice jest

$$Z_0=z=\sqrt{a^2-c^2}\,(1-\cos\varphi)\,.$$

Promítající válec, jehož základna jest epicykloida (9), dotýká se plochy hlavních normál podél strikční čáry.

Z rovnic (9) plyne

$$X_0^2+Y_0^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{a^2-c^2}{2}\cos 2\,\varphi\right),$$

dále jest

$$(Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = (a^2 - c^2) \cos^2 \varphi ,$$

a odtud pro bod $(X_0\, Y_0\, Z_0)$ na strikční čáře vztah

$$X_0^2 + Y_0^2 - \frac{c^2}{a^2} (Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 = \frac{c^4}{a^2} , \tag{10}$$

t. j. strikční čára plochy hlavních normál sférické šroubovice leží na rotačním hyperboloidu jednoplochém majícím střed a osu společné s polárním kuželem. Nejužší kruh má poloměr $\frac{c^2}{a}$, laterální poloosa hyperboly jest c.

*

Oblouk epicykloidy

$$x + i\, y = e^{i\alpha} (R + r + r\, e^{i\beta})$$

je dán výrazem

$$\sigma = 4 \frac{r\,(R + r)}{R} \sin \frac{\beta}{2} ,$$

tedy pro epicykloidu (9)

$$\sigma = \frac{a^2 - c^2}{a} \sin \varphi .$$

Tedy bude

$$(Z_0 - \sqrt{a^2 - c^2})^2 + \mu\, \sigma^2 = a^2 - c^2 ,$$

volíme-li

$$\mu = \frac{a^2}{a^2 - c^2} .$$

Rozvine-li se válec, jehož přímý řez je evoluta čáry Γ_1, v rovinu, přejde strikční čára v ellipsu, jejíž poloosa rovnoběžná se stranami válce má hodnotu $\sqrt{a^2 - c^2}$, druhá pak jest

$$\frac{a^2 - c^2}{a} = a \sin^2 \gamma .$$

*

Znamenáme-li M bod (1*) na šroubovici Γ, M_0 bod (9) na strikční čáře (střední bod na hl. normále), bude bod P definovaný barycentrickou rovnicí

$$c\, M + a\, M_0 = (c + a)\, P$$

míti souřadnice

$$X = c \cos (\psi - \varphi), \; Y = c \sin (\psi - \varphi) , \; Z = z ,$$

a je to bod, jehož průmět jsme znamenali μ.

Podobně bod P' daný rovnicí

$$a\, M_0 - c\, M = (a - c)\, P'$$

má souřadnice

$$X = c \cos (\psi + \varphi), \; Y = c \sin (\psi + \varphi), \; Z = z.$$

Obě čáry

(11) $X = c\cos(\psi \pm \varphi),\quad Y = c\sin(\psi \pm \varphi),\quad Z = \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi)$

tvoří část průseče plochy hlavních normál s válcem

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Na př. v případě $a = 2c$, $\psi = 2\varphi$ znějí rovnice čáry (P)

$$X = c\cos\varphi,\quad Y = c\sin\varphi,\quad Z - \sqrt{a^2 - c^2} = -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi$$

a je tedy

$$Z + X\,tg\,\gamma = \sqrt{a^2 - c^2},$$

t. j. čára (P) jest ellipsa.

Naproti tomu máme pro čáru (P') v tomto případě $(a = 2c)$

$$X = c\cos 3\varphi,\quad Z - \sqrt{a^2 - c^2} = -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi$$

a poněvadž

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

vychází, že (P') je na ploše stupně třetího a tedy křivkou stupně 6.

*

Hlavní normálu lze v obecném případě pro naši křivku Γ vyjádřiti parametricky (paramétry v a φ)

$$(3^*)\qquad \begin{aligned} X &= c\cos(\psi - \varphi) - v\sin\psi \\ Y &= c\sin(\psi - \varphi) + v\cos\psi \\ Z &= \sqrt{a^2 - c^2}\,(1 - \cos\varphi),\ a\varphi = c\psi, \end{aligned}$$

a je to zároveň paramétrické vyjádření plochy hlavních normál.*) Odtud plyne:

(12) $$X^2 + Y^2 = c^2 + v^2 - 2cv\sin\varphi$$

a tedy

$$\left(\frac{X^2 + Y^2 - c^2 - v^2}{2cv}\right)^2 + \frac{(Z - \sqrt{a^2 - c^2})^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

rovnice rotační plochy stupně 4., na níž leží čára stálého v naší plochy sborcené.

Základní válec

$$x^2 + y^2 = c^2$$

protíná tedy plochu hlavních normál v bodech daných rovnicí

$$v^2 - 2cv\sin\varphi = 0.$$

---

*) Na čáře Γ jest $v = -(a - c)\sin\varphi$; pro střed křivosti pak $v = c\sin\varphi$.

Hodnota $v = 0$ podává křivku (P) (rov. (11), spodní znaménko), a zbývá ještě řešení

$$v = 2\, c \sin \varphi,$$

pro něž rovnice (3*) podají při nezměněném Z

$$X = c \cos (\psi + \varphi), \quad Y = c \sin (\psi + \varphi),$$

t. j. křivka (P').

Této methodě unikly pouze útvary v nekonečnu, a tedy válec základní [s řídící čarou (c)] nemá s plochou hlavních normál jiných útvarů společných v konečné vzdálenosti mimo čáry (P) a (P').

V případě $a = 2\, c$ znějí rovnice (3*)

$$X = c \cos \varphi - v \sin 2\, \varphi, \quad Y = c \sin \varphi + v \cos 2\, \varphi, \quad Z = c \sqrt{3}\, (1 - \cos \varphi)$$

aneb zavede-li se komplexní paramétr

$$u = e^{i\varphi},$$

$$\text{(13)} \qquad \left| \begin{aligned} X &= \frac{c\, u\, (u^2 + 1) + i\, v\, (u^4 - 1)}{2\, u^2} \\ Y &= \frac{-i\, c\, u\, (u^2 - 1) + v\, (u^4 + 1)}{2\, u^2} \\ Z &= c \sqrt{3} - c \sqrt{3}\, \frac{u^2 + 1}{2\, u}\, . \end{aligned} \right.$$

Čáry stálého v jsou stupně 4., plocha však je stupně 6.

Hlavní normála v našem případě $a = 2\, c$ má rovnice

$$X \cos 2\, \varphi + Y \sin 2\, \varphi = c \cos \varphi$$

$$Z_1 = -c \sqrt{3} \cos \varphi\, , \quad Z_1 = Z - c \sqrt{3};$$

vyloučením $\cos \varphi$ plyne rovnice 6. stupně

$$\text{(13*)} \qquad X\, (2\, Z_1^2 - 3\, c^2) + c^2 \sqrt{3}\, Z_1 = 2\, Y\, Z_1 \sqrt{3\, c^2 - Z_1^2},$$

pro naši plochu hlavních normál. Kužel asymptotických směrů má rovnici

$$X\, Z_1^2 \mp i\, Y\, Z_1^2 = 0$$

i rozpadá se ve dvě roviny pomyslné $X \mp i\, Y = 0$ a v čtvernásob čítanou rovinu $Z_1 = 0$, vedenou bodem V rovnoběžně s rovinou základní $x\, y$.

Nekonečně vzdálené přímky pomyslných rovin $X \mp i\, Y = 0$ leží také na našem základním válci, mimo to asymptotické roviny v jejich bodech splývají s asymptotickými rovinami válce, takže každá z nich platí jako průsečnice 2. stupně. Skutečně zavede-li se čtvrtá homogenní souřadnice ω substitucí

$$X = \frac{x}{\omega}\, , \quad Y = \frac{y}{\omega}\, , \quad Z_1 = \frac{z}{\omega}\, ,$$

obdržíme rovnici plochy ve tvaru

$$f \equiv [x(2z^2 - 3c^2\omega^2) + c^2\sqrt{3}\,z\,\omega^2]^2 + 4y^2z^2(z^2 - 3c^2\omega^2) = 0;$$

tu jest pro nekonečně vzdálené body $\omega = 0$

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$$

a rovnice tečné roviny v takém bodě bude zníti

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z_1\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

čili po dosazení hodnot

$$z^4(Xx + Yy) + 2z^3Z_1(x^2 + y^2) = 0.$$

Pro naše body jest $x^2 + y^2 = 0$, tedy rovnice roviny asymptotické

$$Xx + Yy = 0$$

po dosazení hodnot $x = \pm\, i\,y$ bude

$$X \pm i\,Y = 0,$$

což jsou zároveň asymptotické roviny válce $x^2 + y^2 = c^2\omega^2$, jak tvrzeno.

Naše kuželosečka (P) leží na rovině

$$Z + X\,tg\,\gamma = \sqrt{a^2 - c^2}, \text{ t. j. } Z + X\sqrt{3} = c\sqrt{3},$$

která patrně obsahuje body A, V a jest rovnoběžna s osou $O\,y$ (normální rovina čáry v bodě vratu A); do úplného průseku této roviny s plochou stupně 6. zbývá ještě útvar stupně 4.

V souřadnicích se středem V se rovnice roviny této píše

$$Z_1 = -X\sqrt{3},$$

čehož dosazením do rovnice (13*) vychází

$$X[X^2 - c^2 + Y\sqrt{c^2 - X^2}] = 0.$$

Řešení $X = 0$ je patrně dvojnásobné, vedle toho máme dvě řešení jednoduchá $X^2 = c^2$ a $X^2 + Y^2 = c^2$, z nichž poslední přísluší čáře (P)

Naše čára Γ při $a = 2c$ má dva body vratu $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$.

„Plocha hlavních normál sférické šroubovice šestého stupně (s dvěma body vratu) je proťata normální rovinou bodu A

$$\frac{X}{c} + \frac{Z}{c\sqrt{3}} = 1$$

ve dvojné přímce $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$X = 0,\ Z = c\sqrt{3} \text{ (rovnoběžka } V\,y),$$

ve dvou přímkách jednoduchých ($\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$) spolu rovnoběžných

$$(X = c,\ Z = 0) \text{ a } (X = -c,\ Z = 2c\sqrt{3})$$

a v ellipse, která se promítá ve kruh (c)."

Z (13*) vychází dále, že řez s rovinou XZ ($y = 0$) je dvojná čára plochy hlavních normál:

(14) $$X(2Z_1^2 - 3c^2) + c^2\sqrt{3}Z_1 = 0 \quad (Z_1 = Z - c\sqrt{3})$$

Rovnice $Y = 0$ podává pak rovnici její v paramétrech

(14¹) $$v = -\frac{c \sin\varphi}{\cos 2\varphi},$$

(14²) $$X = \frac{c\cos\varphi}{\cos 2\varphi},\quad Z = c\sqrt{3}(1 - \cos\varphi).$$

Přistupme k čarám stálého v. Paramétry průseků křivky (13) s rovinou

$$A x + B y - \frac{C(z - c\sqrt{3})}{\sqrt{3}} + Dc = 0$$

hoví rovnici

$$A(u^3 + u) - iB(u^3 - u) + C(u^3 + u) +$$
$$+ \frac{iv}{c}[A(u^4 - 1) - iB(u^4 + 1)] + 2Du^2 = 0,$$

kterou spořádáme na

(15⁰) $$(A - iB)u^4 - \frac{ic}{v}[(A + C - iB)u^3 + (A + C + iB)u + 2Du^2] -$$
$$-(A + iB) = 0.$$

Znamenáme-li symetrické funkce kořenů $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \mathfrak{f}_4$, takže rovnice zní

(15) $$u^4 - \mathfrak{f}_1 u^3 + \mathfrak{f}_2 u^2 - \mathfrak{f}_3 u + \mathfrak{f}_4 = 0,$$

možno zvlášť zaznamenati následující zvláštní případy:

I. Rovina je rovnoběžna s osou Ox.

V rovnici jest $A = 0$, načež z rovnice (15⁰) vychází

(a) $$\mathfrak{f}_4 = 1,\quad \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_3 = \frac{2ci}{v}.$$

Druhou rovnici lze použitím první psáti

$$\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 + \sin\varphi_4 = \frac{c}{v},$$

kdežto první podává

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Veličiny φ_α tu značí úhly příslušné bodům sférické šroubovice, jichž hlavní normály procházejí průsečíky roviny ($\parallel Ox$) s čarou (13).

XXXIII.

Protněme ellipsu

$$x = \mathfrak{A} \cos \varphi, \; y = \mathfrak{B} \sin \varphi,$$

kde $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ jsou libovolné veličiny kladné, libovolným kruhem. Paramétry $u_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ průsečných bodů hoví podmínce

$$\mathfrak{k}_4 = u_1 u_2 u_3 u_4 = 1\,;$$

naopak pro libovolné 4 komplexní veličiny u_ν podrobené této podmínce leží 4 body ellipsy jim příslušné na kruhu a jeho rovnice zní:

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,q\,y + \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{4}\,\mathfrak{k}_2 - \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{2} = 0,$$

$$p = \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{8\,\mathfrak{A}}\,(\mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_3), \; q = i\,\frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{8\,\mathfrak{B}}\,(\mathfrak{k}_1 - \mathfrak{k}_3).$$

Druhá rovnice (a) podává tedy

$$q = -\frac{c}{4\,v\,\mathfrak{B}}\,(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\,.$$

Na rovině hybného kruhu (a) narýsujeme ellipsu

$$x = a \cos \varphi, \; y = c \sin \varphi \quad (\mathfrak{A} = a = 2\,c, \; \mathfrak{B} = c)$$

a přímku středovou

$$y = -\frac{a^2 - c^2}{4\,v} = -\frac{3}{4}\,\frac{c^2}{v}\,.$$

Libovolný kruh mající střed na této přímce protne ellipsu ve čtyrech bodech, jichž paramétry hoví podmínce (a), a jimž příslušné body na kruhu (a) se bezprostředně určí. Kotálíme-li kruh (a) po kruhu (c) až se jednotlivé body naší čtveřiny octnou na základně (kotálení začíná bodem $\varphi = 0$ od bodu A na kruhu (c)), obdržíme čtyry body na kotálnici šroubové, jichž hlavní normály stanoví na uvažované čáře $v = konst$ čtyři body ležící na rovině rovnoběžné s osou $O\,x$.

II. Nechť rovina sekoucí jest rovnoběžna s osou $O\,y$; kladouce $B = 0$, nacházíme vztahy

$$(b) \qquad \mathfrak{k}_4 = -1, \; \mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_3.$$

Uvažujme na ellipse

$$x = \mathfrak{A} \cos \varphi, \; y = \mathfrak{B} \sin \varphi, \; (\mathfrak{A} > \mathfrak{B})\,,$$

čtyři body, jichž parametry

$$u = e^{i\varphi}$$

hoví podmínkám (b); veďme jimi rovnostrannou hyperbolu. Její rovnice zní

$$\frac{i}{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}\,x\,y - \frac{\mathfrak{k}_1}{2\,\mathfrak{A}}\,x + \frac{1}{4}\,\mathfrak{k}_2 = 0$$

čili

$$x\,(y + \frac{\mathfrak{B}}{2}\,i\,\mathfrak{k}_1) = \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}}{4}\,i\,\mathfrak{k}_2\,.$$

„Body ellipsy, jejichž paramétry hoví rovnicím (*b*), leží na rovnostranné hyperbole, jejíž jedna asymptota jest osa $O\,y$."

„Protneme-li ellipsu ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) rovnostrannou hyperbolou, mající $O\,y$ za asymptotu, stanoví anomalie φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 průseků čtyři body šroubovice 30° spádu, jimiž procházející hlavní normály její vytínají na všech křivkách $v = konst$ čtveřiny rovinné, ležící na rovinách rovnoběžných s osou $O\,y$."

Podmínky (*b*) lze psáti též

$$\Sigma\,\varphi_\nu \equiv \pi\ (mod\ 2\,\pi), \quad \Sigma\,cos\,\varphi_\nu = 0.$$

III. Konečně volme rovinu rovnoběžnou s $O\,z$; $C = 0$; obdržíme vztahy

$$(c) \qquad \mathfrak{f}_1 = \frac{i\,c}{v}, \quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{i\,c}{v}\,\mathfrak{f}_4,$$

které lze nahraditi jiným tvarem

$$\Sigma\,cos\,\varphi_\nu = 0, \quad \Sigma\,sin\,\varphi_\nu = \frac{c}{v}.$$

Čtveřiny na šroubovici o 30° spádu hovící těmto podmínkám mají hlavní normály, jež na křivce $v = konst$ stanoví čtveřinu bodovou ležící na rovině rovnoběžné s osou $O\,z$.

Jako applikaci předpokládejme $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$, $\varphi_4 = \varphi_0$, kde φ je dáno, načež

$$cos\,\varphi_0 + 3\,cos\,\varphi = 0$$

určuje φ_0 a vztah

$$\frac{c}{v} = sin\,\varphi_0 + 3\,sin\,\varphi = 3\,sin\,\varphi + \sqrt{1 - 9\,cos^2\,\varphi}$$

určuje v. Takto se pro danou přímku na sborcené ploše hlavních normál určují dvě čáry $v = konst$, které v bodech oné přímky mají oskulační rovinu rovnoběžnou s osou $O\,z$.

Uvažujme ještě koule Σ, které jsou opsány nad průměrem, jenž polohou i velikostí splývá s poloměrem křivosti $M\,S$ čáry Γ, při čemž se omezíme na případ $a = 2\,c$. Z obrazce 2. je zřejmo, že střed koule Σ je v bodě μ na ellipse plochy hlavních normál; poloměr koule $\mu\,S$ rovná se vzdálenosti bodu μ od nárysny, poněvadž $O\,\mu_1$ půlí úhel $A\,O\,S_1$. Koule Σ dotkne se nárysny $x\,z$ v nárysu μ_2 bodu μ; odtud plyne, že

„koule Σ mají své středy na ellipse plochy hlavních normál a dotýkají se roviny $O\,x\,z$ podél fokální osy této ellipsy."

Tím nabýváme obrazu o obalové ploše koulí Σ; je to souhrn kruhů majících své středy na tečnách ellipsy (μ), a které její rovinu kolmo protínají v bodech její nárysné stopy $A\,V$.

Stopa plochy na rovině ellipsy skládá se z této přímky a z racionální čáry 4. třídy, 6. stupně, jejíž paramétrické vyjádření se obdrží bez obtíží.

XXXIII.

Pro rovnici koule Σ nalezneme (počátek souřadnic V)

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\,c \cos\varphi\,(x - z\sqrt{3}) - 2\,c\,y \sin\varphi + 4\,c^2 \cos^2\varphi = 0;$$

charakteristika leží na rovině

$$(\Sigma') \qquad (x - z\sqrt{3}) \sin\varphi - y \cos\varphi = 4\,c \sin\varphi \cos\varphi .$$

Tyto roviny obalují válec rovnoběžný s přímkou $y = 0$, $z = x\,tg\,30^0$

$$x - z\sqrt{3} = 4\,c \cos^3\varphi, \quad y = -4\,c \sin^3\varphi,$$

jehož řídící čára v rovině $V\,x\,y$ jest astroida.

*

6. Bod M čáry Γ a bod na strikční čáře a jeho normále ležící M_0 jsou s průseky P, P', jež hlavní normála stanoví na válci $x^2 + y^2 = c^2$, v souvislosti vyjádřené barycentricky

$$c\,M + a\,M_0 = (c + a)\,P$$
$$c\,M - a\,M_0 = (c - a)\,P';$$

z toho plyne, že body $P\,P'\,M\,M_0$ tvoří čtveřinu harmonickou,*) čili že body $M\,M_0$ jsou vůči kruhovému válci (c) harmonicky sdruženy. Mimo to jsou dělící poměry

$$\frac{M\,P}{P\,M_0} = \frac{a}{c}, \quad \frac{M\,P'}{P'\,M_0} = -\frac{a}{c},$$

$$\frac{P\,M}{M\,P'} = -\frac{a-c}{a+c}, \quad \frac{P\,M_0}{M_0\,P'} = \frac{a-c}{a+c}$$

veličiny stálé.

Sférická šroubovice dělí tedy tětivy svých hlavních normál, stanovené základním válcem $x^2 + y^2 = c^2$, ve stálém poměru.

Poněvadž dle konstrukce jest $O\,S_1 \perp P_1\,P_1'$, je S_1 středem tětivy $P_1\,P_1'$ a bod S je středem tětivy $P\,P'$:

„Střed křivosti půlí tětivu hlavní normály $P\,P'$ na základním válci stanovenou."

Obraťme se nyní k tečnám čáry Γ. Směrnice tečny mají hodnoty $\sin\gamma \cos\psi$, $\sin\gamma \sin\psi$, $\cos\gamma$, a body na tečně se vyjadřují parametricky takto:

$$(16) \qquad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a+c}{2}\cos(\psi - \varphi) - \frac{a-c}{2}\cos(\psi + \varphi) + v \sin\gamma \cos\psi, \\ y &= \frac{a+c}{2}\sin(\psi - \varphi) - \frac{a-c}{2}\sin(\psi + \varphi) + v \sin\gamma \sin\psi, \\ z &= -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi + v \cos\gamma, \quad a\,\varphi = c\,\psi, \end{aligned}\right.$$

při čemž počátek souřadnic je v bodě V.

*) Vlastnost ta se přenáší na kruhové kotálnice v rovině: Bod kotálnice jest se svým středem křivosti vzhledem k pevné kružnici harmonicky sdružený. (Srov. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, dtsch. v. G. Kowalewski, str. 59.)

Paramétr v udává vzdálenost bodu $x\,y\,z$ na tečně od dotykového bodu M na čáře Γ.

Vypočteme postupně

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \cos 2\varphi + v^2 \sin^2 \gamma + 2 c v \sin \gamma \cos \varphi,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + v^2. \tag{17}$$

Čáry $v = konst$ na ploše tečen leží tedy na koulích se stálým středem V.

Snadno bychom ukázali, že normální rovina čáry $v =$ konst. obsahuje osu křivosti Vm příslušného bodu na čáře šroubové Γ. Délka oblouku jejího vede na vzpřímení ellipsy.

Pro průseč plochy tečen s válcem

$$x^2 + y^2 = g^2$$

platí

$$v \sin \gamma = -c \cos \varphi \pm \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi - (a^2 - c^2) \sin^2 \varphi - c^2 + g^2} =$$
$$= -c \cos \varphi \pm \sqrt{g^2 - a^2 \sin^2 \varphi};$$

pro $g = a$ se tedy průseč rozpadá ve dvě čáry

$$v \sin \gamma = (a - c) \cos \varphi, \quad v \sin \gamma = -(a + c) \cos \varphi.$$

„Válec $x^2 + y^2 = a^2$ protíná plochu tečen v čarách

$$(Q) \qquad x + i\,y = a\,e^{i(\psi - \varphi)}, \quad z = -a \, tg \frac{\gamma}{2} . \cos \varphi,$$

a

$$(Q') \qquad x + i\,y = -a\,e^{i(\psi + \varphi)}, \quad z = -a \, cotg \frac{\gamma}{2} . \cos \varphi,\text{“}$$

při čemž počátek souřadnic je bod V.

V případě $a = 2c$, $\psi = 2\varphi$ je první čára ellipsou na rovině

$$z + \frac{x}{\sqrt{3}} = 0,$$

která jest oskulační rovina čáry v bodě $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\psi = \pi)$.

Jednoduchý výsledek podává též případ $a = 3c$, $\psi = 3\varphi$.

Zde máme pro čáru (Q) (při počátku V)

$$x = a \cos 2\varphi, \quad y = a \sin 2\varphi, \quad z = -b \cos \varphi, \quad b = a \, tg \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Tato čára jest hyppopéda ležící na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{2a} x + a^2 + \frac{b^2}{2} = \frac{a}{4} (x + a) + a^2;$$

má dvojný bod $x = -a$, $y = z = 0$, a leží na rotačním kuželi

$$(x + a)^2 + y^2 = 8 z^2 \text{ (počátek } V).$$

XXXIII.

Nárys čáry té jest parabola

$$z^2 = \frac{a}{4}(x + a).$$

Vraťme se k případu obecnému; tu obsahuje plocha tečen epicykloidu na rovině $z = 0$ („střední epicykloida") — počátek souřadnic je stále bod V —

$$v = a\, tg\, \gamma \cos \varphi,$$

$$x + i\, y = \left(\frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\, e^{2 i \varphi}\right) e^{i(\psi - \varphi)} \sec \gamma,$$

která vznikne při kotálení kruhu poloměru $\frac{a-c}{2} \sec \gamma$ po kruhu poloměru $c \sec \gamma = a$, při čemž rámě g má hodnotu $-\frac{a-c}{2} \sec \gamma$, t. j. bodu $\varphi = \psi = 0$ přísluší vrchol epicykloidy.

Ježto se jedná o plochu tečen čáry šroubové, jsou veškery řezy $z = konst$ pravoúhlé trajektorie tečen, a čára Γ_1 jest evolutou této střední epicykloidy.

Z toho vychází, že

„tětivy stanovené tečnami sférické šroubovice na válci $x^2 + y^2 = a^2$ jsou šroubovicí jakož i střední epicykloidou děleny ve stálých poměrech, opačného znamení,"

takže tu máme opět čtveřiny harmonické. Poměry stálé mají hodnotu

$$\pm \frac{a-c}{a+c},$$

t. j. platí pro body Q, Q' na proniku válce s tečnou barycentrický vztah

$$(a + c)\, Q + (a - c)\, Q' = 2\, a\, M;$$

pro bod E na střední epicykloidě pak

$$(a + c)\, Q - (a - c)\, Q' = 2\, c\, E,$$

a odtud

$$(a + c)\, Q = a\, M + c\, E.$$

V případě $a = 2\, c$ tedy ellipsa na ploše tečen dělí úseky tečen mezi šroubovicí a střední epicykloidou v poměru 1 : 2.

Na místě (16) můžeme pro vyjádření tečny užiti rovnic

$$(18) \qquad \left|\begin{array}{l} x = a \cos(\psi - \varphi) + w \sin \gamma \cos \psi \\ y = a \sin(\psi - \varphi) + w \sin \gamma \sin \psi \\ z = -a\, tg \frac{\gamma}{2} \cos \varphi + w \cos \gamma, \end{array}\right.$$

kde w je vzdálenost bodu na tečně od její stopy Q na válci $x^2 + y^2 = a^2$. Na čáře Γ jest $w = -a\, tg \frac{\gamma}{2} \cos \varphi$.

Půdorys čáry $w = konst$

$$x + i y = a e^{i(\varphi - \gamma)} + w \sin \gamma e^{i\varphi}$$

je prodloužená neb zkrácená epicykloida

$$R = c,\ r = a - c,\ g = - w \sin \gamma$$

(R poloměr kruhu pevného, r poloměr kruhu hybného, g rámě). Čára sama leží na rotačním paraboloidu

$$(19) \qquad x^2 + y^2 + 2 \frac{a+c}{a} w z = a^2 + \left(\frac{a+c}{a} w\right)^2 \text{ (počátek } V);$$

těmito vlastnostmi jsou charakterisovány čáry bodů P na ploše tečen, pro něž $Q P = w = konst.$

Podobně bychom shledali, že čáry (P) určené podmínkou $Q' P = w' = konst$ mají za půdorysy prodloužené či zkrácené hypocykloidy o parametrech $R = c,\ r = a + c,\ g = - w' \sin \gamma$, a rovněž leží na paraboloidech.

Paramétr w_0 bodu Q' při vyjádření (18) je dán rovnicí

$$w_0 \sin \gamma = - 2 a \cos \varphi.$$

Dělicí poměr ($Q Q' P$) pro libovolný bod P na tečně φ má hodnotu

$$(Q Q' P) = \frac{w}{w_0 - w};$$

aby ten byl nezávislý na φ, třeba by $\frac{w}{w_0}$ byla veličina stálá, takže parametrická rovnice čáry (P), která dělí úseky $Q Q'$ ve stálém poměru, bude tvaru

$$w = \lambda \cos \varphi.$$

Z třetí rovnice (18) vychází, že na této čáře také poměr $z : w$ je stálý, a rovnice (19) podává výsledek tvaru

$$(20) \qquad x^2 + y^2 + k z^2 = a^2 \text{ (počátek } V),$$

kde k je konstanta závislá na λ. Tyto čáry leží tedy na rotačních plochách (20); jejich půdorysy jsou prodloužené neb zkrácené epicykloidy.

Buď dána plocha (20) a hledejme její průseč s plochou tečen; při libovolném w platí identita (19), a tak nám rovnice (19) a (20) dávají nejprvé

$$k z^2 - 2 \frac{a+c}{a} w z + \left(\frac{a+c}{a} w\right)^2 = 0,$$

t. j. při označení

$$(20^a) \qquad 1 \pm \sqrt{1-k} = \mu:$$

$$\frac{a+c}{a} w = \mu z.$$

Vložíme-li to do třetí rovnice (18), vyjde

$$w = -\frac{\mu\, a\, tg \frac{\gamma}{2}}{1 + (1 - \mu) \cos \gamma} \cos \varphi \tag{20^b}$$

jako parametrická rovnice proniku plochy (20) s plochou tečen.

Vzhledem k dvěma hodnotám μ platí tedy věta:

„Rotační plochy 2. stupně se středem V a osou Vz, jichž hlavní kruh má poloměr a, protínají plochu tečen sférické šroubovice ve dvou čarách; tyto dělí tětivy stanovené válcem (a) na tečnách ve stálém poměru a mají za půdorysy epicykloidy prodloužené či zkrácené."

Pro $\mu = 1$, kdy plocha (20) je koule, splynou obě čáry se základní křivkou Γ. Plochy (20) jsou hyperboloidy jednoploché pro k záporné, ellipsoidy vejčité pro k mezi 0 a 1; ellipsoidy sploštěné plochu tečen neprotínají.

Nárysy těchto čar jsou racionální čáry 3. stupně v případě $a = 2c$. V tomto případě nárysná stopa plochy tečen má parametrickou rovnici $w = -\frac{a}{\sqrt{3}} \sec \varphi$; je to hyperbola (počátek souřadnic V)

$$(x + z\sqrt{3})\, x + 2c^2 = 0, \quad y = 0,$$

a je zároveň dvojnou čarou plochy tečen. Hyperbolický válec směru Oy protíná plochu tečen ještě v racionální čáře 8. stupně, jejíž parametrická rovnice zní

$$w = -\frac{a}{\sqrt{3}} \sec \varphi \sec 2\varphi .$$

Ustanovíme ještě čáru, v niž přejde sférická šroubovice Γ po rozvinutí její plochy tečen v rovinu. Transformovaná rovinná čára buď G. Oblouk s na Γ měřený od bodu A má hodnotu

$$s = a\, tg\, \gamma\, (1 - \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi),$$

a

$$s = a\, tg\, \gamma\, (3 + \cos \varphi) \quad (\pi < \varphi \leq 2\pi);$$

zákon se mění v úvratnících. Poloměr křivosti jest $\varrho = a \sin \varphi$; rozvinutím v rovinu nemění se délka oblouku ani křivost jeho, a tak má čára G stejný oblouk s a poloměr křivosti ϱ, jako měla čára Γ v příslušných bodech.

Svírá-li tečna čáry G s osou x úhel τ, máme

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau};$$

hodnoty

$$ds = a\, k \sin \varphi\, d\varphi, \quad \varrho = a \sin \varphi \quad (k = tg\, \gamma)$$

dávají dle toho

$$d\tau = k\, d\varphi,$$

tedy zvolíme-li vhodně osu úseček v rovině čáry G,

$$\tau = k\,\varphi.$$

Rovnice ta platí obecně, poněvadž změnou intervallu pro φ změní se současně znamení $d\,s$ a ϱ. Souřadnice x a y čáry G budou hověti differenciálním vztahům

$$d\,x = \cos\tau\,d\,s,\; d\,y = \sin\tau\,d\,s,\; d\,s = a\,k\sin\varphi\,d\,\varphi\,,$$

tedy

$$d\,x = \frac{a\,k}{2}\,[\sin(k+1)\,\varphi - \sin(k-1)\,\varphi]\,d\,\varphi,$$

$$d\,y = \frac{a\,k}{2}\,[\cos(k-1)\,\varphi - \cos(k+1)\,\varphi]\,d\,\varphi,$$

a integrace podá vyjádření čáry G ve tvaru

$$(21)\qquad \left|\begin{aligned} x &= \frac{a\,k}{2}\left[\frac{\cos(k-1)\,\varphi}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\,\varphi}{k+1}\right], \\ y &= \frac{a\,k}{2}\left[\frac{\sin(k-1)\,\varphi}{k-1} - \frac{\sin(k+1)\,\varphi}{k+1}\right];\; k = tg\,\gamma. \end{aligned}\right.$$

V případě $k = 1$ ($\gamma = 45^0$) nahradí se u výrazu pro x nekonečný člen pravé strany konečnou hodnotou na př. $\frac{1}{2}$, u výrazu pro y má první člen závorky hodnotu φ. V tomto případě je rozbalená šroubovice obyčejná cykloida vznikající valením kruhu poloměru $\frac{a}{4}$ po přímce.

Pro $k > 1$ jest čára transformovaná epicykloidou

$$R = \frac{a\,k}{k^2-1} = -\frac{a}{2}\,tg\,2\,\gamma,\quad r = \frac{a\,k}{2\,(k+1)}\,,$$

odvalené úhly na kruhu pevném $(k-1)\,\varphi$ a na kruhu hybném $2\,\varphi$.

V případě $k < 1$ je čára hypocykloida s prvky

$$R = \frac{a}{2}\,tg\,2\,\gamma,\quad r = \frac{a\,k}{2\,(k+1)}\,,$$

a odvalenými úhly $(1-k)\,\varphi$ a $2\,\varphi$.

Epicykloida (21) jest evolutou epicykloidy s prvky základními

$$R_0 = k\,R,\; r_0 = k\,r,$$

vzdálenost její vrcholu od úvratníku čáry G (který jest jeho střed křivosti) obnáší

$$(R_0 + 2\,r_0) - R = (k^2-1)\,R = a\,k.$$

Epicykloida (R_0, r_0) odpovídá na ploše orthogonální trajektorii tečen sférické šroubovice, a tedy je to řez plochy tečen s rovinou $z = konst.$

Na tečnu šroubovice v bodě A naneseme délku $a\,k = a\,tg\,\gamma$; výška koncového bodu nad rovinou $O\,x\,y$ obnáší $a\,k\cos\gamma = a\sin\gamma = \sqrt{a^2-c^2}$, t. j. koncový bod sestrojené délky leží v rovině $V\,x\,y$ střední epicykloidy.

Totéž platí o hypocykloidě a cykloidě; obecně se vyjadřuje výsledek větou:

„Při rozvinutí plochy tečen sférické šroubovice Γ v rovinu, kterým tato přechází v čáru G (21), transformuje se střední epicykloida v její evolventu

$$(22)\qquad \begin{aligned} x_0 &= \frac{a k^2}{2}\left[\frac{\cos(k-1)\varphi}{k-1} + \frac{\cos(k+1)\varphi}{k+1}\right], \\ y_0 &= \frac{a k^2}{2}\left[\frac{\sin(k-1)\varphi}{k-1} + \frac{\sin(k+1)\varphi}{k+1}\right]; \; k = tg\,\gamma. \end{aligned}$$

V případě $k = 1$ (cykloida) se u výrazu x_0 první člen závorky nahradí číslem $\frac{3}{2}$.

Délka oblouku na střední epicykloidě má hodnotu $a\,k^2 \sin\varphi$.

Zvolíme-li libovolnou epicykloidu v rovině se základními prvky R_0 a r_0, poskytnou její normály ohnutím roviny podél nich nakrojené rozvinutelnou plochu; při tom existuje případ, kdy tato je stejného spádu, t. j. kdy pravoúhlé trajektorie přímek jsou čáry rovinné, vespolek rovnoběžné, při čemž společná normála jejich rovin svírá s přímkami plochy stálý úhel γ určený rovnicí

$$tg\,\gamma = k = 1 + \frac{2\,r_0}{R_0};$$

úvratnice plochy je čára, v niž transformací přešla evoluta, a je to sférická šroubovice ležící na kouli poloměru

$$a = \frac{k\,(R_0 + 2\,r_0) - R_0}{k^2}.$$

Také případ, kdy konstanta γ má hodnotu jinou než právě udanou, vede na čáry šroubové, nikoli však sférické.

Předpokládejme, že jsme vyšli z epicykloidy

$$(E_0)\qquad x_0 + i\,y_0 = (R_0 + r_0 - r_0\,e^{i\beta})\,e^{i\alpha},\quad R_0\,\alpha = r_0\,\beta,$$

jejíž normály jsou povrchové přímky rozvinutelné plochy po rozvinutí v rovinu.

Vyšiňme plochu z roviny, tak aby čára (E_0) padla zcela do roviny $O\,x\,y$, kde zaujme tvar (E); přímky její budou svírati s osou $O\,z$ úhel stálý, který značme γ. Nový tvar plochy má úvratnici Γ, na níž buď M libovolný bod, příslušný k parametru β; buď P_0 stopa povrchové přímky $M\,P_0$ na rovině $x\,y$, P pak půdorys bodu M. Je pak $P_0\,M = \varrho$ zároveň poloměr křivosti čáry (E_0) v příslušném bodě, a jeho průmět $P_0\,P$ je poloměr křivosti čáry (E), poněvadž tato protíná kolmo přímky $P_0\,M$, které jsou tečny čáry Γ, a jejich půdorysy jsou tedy normály čáry E;

průsek normály $P_0 P$ s normálou nekonečně blízkou je průmět P bodu M na úvratnici.

Máme tedy pro poloměr křivosti p čáry (E) výraz

$$p = \varrho \sin \gamma.$$

Prvek oblouku $d s = d s_0$ je společný oběma tvarům čáry (E_0) t. j. čáře (E_0) a čáře (E); dle známých vlastností epicykloid jest na E_0

$$\varrho = 4 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0 + 2 r_0} \sin \frac{\beta}{2}, \quad d s_0 = 2 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \sin \frac{\beta}{2} d \beta.$$

Značí-li nyní τ úhel, jejž svírá tečna čáry (E) s osou $O x$, bude

$$d \tau = \frac{d s}{p} = \frac{d s_0}{\varrho \sin \gamma} = G d \beta,$$

kde položeno

$$G = \frac{R_0 + 2 r_0}{2 R_0 \sin \gamma}.$$

Můžeme osy tak voliti, aby bylo $\tau = G \beta$, načež rovnice

$$d x + i d y = d s e^{i \tau}$$

charakterisující čáru (E) zní:

$$d x + i d y = 2 r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \sin \frac{\beta}{2} e^{i G \beta} d \beta,$$

tedy po integraci

$$x + i y = r_0 \frac{R_0 + r_0}{R_0} \left(\frac{e^{i \left(G - \frac{1}{2}\right) \beta}}{G - \frac{1}{2}} - \frac{e^{i \left(G + \frac{1}{2}\right) \beta}}{G + \frac{1}{2}} \right).$$

Poněvadž $G > \frac{1}{2}$, je tato čára (E), která je pravoúhlou trajektorií plochy, a zároveň její stopou $z = 0$, epicykloidou. Její evoluta, epicykloida s ní podobná, jest půdorysem čáry Γ, úvratnice plochy. Máme tedy pro šroubovou čáru Γ jako půdorys epicykloidu, a čára leží na rotačním ellipsoidu, jehož osa je v $O z$, jak to ukazuje výpočet zcela podobný začátku čl. 5. Čára Γ takto vzniklá je šroubovice bikonická.

„Nakrojíme-li rovinu podél všech normál libovolné epicykloidy, aby se stala ohebnou, a přetvoříme-li pak rovinu v plochu rozvinutelnou tím způsobem, aby původní epicykloida padla opět do určité (základní) roviny, zaujme její evoluta polohu určité šroubovice bikonické Γ. Při tom původní epicykloida přešla opět v epicykloidu, a její evoluta je průmětem čáry Γ."

Směr tečny čáry (21) je dán kosinusy $\cos k \varphi$, $\sin k \varphi$; parametrické vyjádření bodu, v nějž přejde bod plochy tečen příslušný k parametrům φ, v (16), zní:

$$(23) \qquad X + i\,Y = \frac{a\,k}{2}\left(\frac{e^{i\,(k-1)\,\varphi}}{k-1} - \frac{e^{i\,(k+1)\,\varphi}}{k+1}\right) + v\,e^{i\,k\,\varphi}.$$

Vložíme-li sem hodnotu v pro střední epicykloidu

$$v = a\,k\,\cos\varphi,$$

vyjde bezprostředně výsledek (22).

Pro čáru (Q) máme

$$v = \frac{a - c}{\sin\gamma}\cos\varphi;$$

po transformaci bude

$$X + i\,Y = (m - n\,e^{2\,i\,\varphi})\,e^{(k-1)\,i\,\varphi},$$

$$m = \frac{a\,(1 - \cos\gamma)\,(1 + \sin\gamma)}{\sin 2\,\gamma\,(tg\,\gamma - 1)},$$

$$n = \frac{a\,(1 - \cos\gamma)\,(1 - \sin\gamma)}{\sin 2\,\gamma\,(tg\,\gamma + 1)}.$$

„Rozvinutím plochy tečen v rovinu přechází čára (Q) této plochy v prodlouženou neb zkrácenou epicykloidu ($tg\,\gamma > 1$), vztažně hypocykloidu ($tg\,\gamma < 1$).“

Parametry v a w jsou vázány vztahem

$$w - v = -\frac{a - c}{\sin\gamma}\cos\varphi;$$

odtud soudíme, že veškery čáry charakterisované vztahem ($Q\,Q'\,P$) = *konst.* se transformují v kotálnice.

Na konec budiž učiněna zmínka o vytvoření sférické šroubovice Γ jako obalové čáry její oskulačních kruhů k. Sférický střed kruhu k je v bodě m, poněvadž osa křivosti čáry Γ je přímka $V\,m$; střed křivosti S leží na $V\,m$ a je pak poloměr křivosti $S\,M = \varrho = a\sin\varphi$, v pravoúhlém trojúhelníku $V\,S\,M$ tedy bude $V\,S = a\cos\varphi$ a úhel $m\,V\,M = S\,V\,M$ má hodnotu φ; rovina $m\,V\,M$ dotýká se kužele podél $m\,V$, a protíná kouli (a) v hlavním (největším) kruhu $m\,M$, který se dotýká v bodě m kruhu (c). Délka oblouku $m\,M = a\,\varphi$ je sférický poloměr kruhu k a rovná se délce $c\,\psi$ oblouku $A\,m$ na kruhu (c).

Lze tedy na dané kouli (a) s daným kruhem (c) rýsovati čáru I podobně jako se rýsuje evolventa kruhu (c) v rovině: V bodech m kruhu (c) vedeme hlavní kruhy tečné a nanášíme na ně oblouky $m\,M$ rovné délkám oblouků $A\,m$ na kruhu (c).

Těmito body M vytvořená čára jest obalovou čarou kruhů k (oskulačních), které mají sférické středy m a za sférické poloměry délky oblouků $A\,m$ na (c). — Můžeme přejíti při stálém c k limitě pro $a = \infty$, čímž čára Γ přejde v evolventu kruhu (c).

*

7. **V následujících odstavcích bude hlavní pozornost věnována případu $a = 2c$; tuto sférickou čáru stupně 6., která má spád 30°, studoval Angelo Buffone,*) zejména po stránce algebraické. Úvahy naše mají však s jeho výsledky styky jen nepatrné.**

Parametrické vyjádření této čáry dávají rovnice (1*) pro $a = 2c$ ve tvaru

$$(1) \qquad x + iy = \frac{c}{2}(3 - e^{2i\varphi})\, e^{i\varphi}, \quad z = c\sqrt{3}\,(1 - \cos\varphi)\,;$$

půdorys čáry je nefroida Huygensova, kterou vytvoří bod kruhu poloměru $\frac{c}{2}$ valeného po kruhu (c) poloměru c, při čemž počáteční poloha bodu opisujícího je bod A ($x = c$, $y = z = 0$).**) Tato racionální čára stupně 6. je základnou válce směru Oz, který vytíná čáru Γ na kouli

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + (z - c\sqrt{3})^2 = 4c^2;$$

vlastně vytíná tento válec na ní čáry dvě, vespolek souměrné vůči střední rovině $z = c\sqrt{3}$; druhá z nich se liší výrazem

$$z - c\sqrt{3} = +c\sqrt{3}\cos\varphi,$$

a neprochází bodem A, nýbrž bodem A_1' ($x = -c$, $y = z = 0$).

Rovnice

$$(1^0) \qquad \begin{aligned} x &= \frac{c}{2}(3\cos\varphi - \cos 3\varphi) = c\,(3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi) \\ z - c\sqrt{3} &= -c\sqrt{3}\cos\varphi, \quad y = 2c\sin^3\varphi \end{aligned}$$

podávají pro nárys

$$(3) \qquad 3\sqrt{3}\,c^2 x = 2\zeta^3 - 9c^2\zeta, \quad \zeta = z - c\sqrt{3},$$

který je tedy racionální čára stupně 3.

Tento válec stupně 3. určuje s koulí (2) naši čáru úplně.

Rovnice základní v obecném případě pišme ve tvaru

$$(1^1) \qquad \begin{aligned} x &= a\sin\varphi\sin\psi + c\cos\varphi\cos\psi, \\ y &= -a\sin\varphi\cos\psi + c\cos\varphi\sin\psi. \end{aligned}$$

Pro kužel promítající čáru Γ ze středu A máme vyjádření

$$\frac{X - c}{Z} = \frac{x - c}{z}, \quad \frac{Y}{Z} = \frac{y}{z};$$

jeho řez s rovinou střední $Z = \sqrt{a^2 - c^2}$ tedy bude

*) Ang. Buffone, Studio di un ellica sferica ed algebrica (Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XXXIV.; 1896).

**) V tomto článku bude počátkem souřadnic — pokud jinak nebude zvlášť vytčeno — opět bod O, střed základního kruhu (c).

$$X - c = \frac{x - c}{1 - \cos\varphi}, \quad Y = \frac{y}{1 - \cos\varphi};$$

první rovnici lze psáti

$$X = \frac{x - c\cos\varphi}{1 - \cos\varphi}.$$

V obecném případě tyto rovnice

$$X = \frac{a\sin\varphi\sin\psi - c\cos\varphi\,(1 - \cos\psi)}{1 - \cos\varphi},$$

$$Y = \frac{-a\sin\varphi\cos\psi + c\cos\varphi\sin\psi}{1 - \cos\varphi}$$

nedávají výsledek přehledný. V případě našem $a = 2c$ však znějí

$$X = 2c\,(1 + \cos\varphi)\cos\varphi, \quad Y = 2c\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Centrální průmět ze středu A sf. šroubovice 30^0 spádu do roviny střední $z = c\sqrt{3}$ je tedy kardioida, úpatnice kruhu opsaného kolem středu $(x = 2c,\ y = 0)$ poloměrem $2c$, vzatá pro pól ležící na Oz (střed čáry).

Nejvyšším bodem čáry je $\varphi = \pi$, druhý úvratník její A'. Promítáme-li z něho šroubovici Γ do střední roviny, obdržíme opět kardioidu

$$X = 2c\,(1 - \cos\varphi)\cos\varphi, \quad Y = 2c\,(1 - \cos\varphi)\sin\varphi,$$

která jest úpatnicí kruhu opsaného poloměrem $2c$ ze středu $(-2c,\ 0)$ pro pól ve středu čáry.

Kužel promítající čáru z její středu V

$$\frac{X}{Z - c\sqrt{3}} = \frac{x}{z - c\sqrt{3}}, \quad \frac{Y}{Z - c\sqrt{3}} = \frac{y}{z - c\sqrt{3}}$$

má na rovině Oxy stopu $Z = 0$

$$X = \frac{x}{\cos\varphi}, \quad Y = \frac{y}{\cos\varphi},$$

t. j. dle rovnic (1^0)

$$X = 3c - 2c\cos^2\varphi = c + 2c\sin^2\varphi,$$

$$Y = 2c\frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi};$$

v polárních souřadnicích s pólem A, osou Ax, zní rovnice této čáry

$$\varrho = 2c\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = 2c\sec\varphi - 2c\cos\varphi,$$

t. j.

„ze středu V promítá se sf. šroubovice 30^0 spádu do základní roviny v cissoidu Diokletovu, jejíž úvratník jest v O, osa Ox a asymptota $x = 2c$".

Veďme dále bodem M přímku rovnoběžnou s $A\,V$ (tětivou úvratníků); rovnice její jsou

$$Y = y,\ Z = z - \sqrt{3}\,(X - x),$$

a stopa na rovině střední $Z = c\sqrt{3}$

$$c\sqrt{3} - z = -\sqrt{3}\,(X_0 - x),\ Y_0 = y$$

má souřadnice

$$X_0 = x + \frac{z - c\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\,c\,sin^2\,\varphi\,cos\,\varphi\,,$$

$$Y_0 = 2\,c\,sin^3\,\varphi\,;$$

polární rovnice této racionální čáry stupně 6. zní

$$\varrho = 2\,c\,sin^2\,\varphi,$$

a je známa pode jménem Doppeleilinie,*) kterýžto název přeložíme slovem dvojovála.

Její rovnice zní

$$(x^2 + y^2)^3 = 4\,c^2\,y^4.$$

„Promítající válec sférické šroubovice 30° spádu rovnoběžný s tětivou úvratníků seče střední rovinu $V\,x\,y$ v dvojovále.“

Tečna dvojovály je kosoúhlý průmět tečny čáry Γ, ostatně můžeme strojiti normálu planimetricky na základě polární subnormály

$$\varrho' = 2\,c\,sin\,2\,\varphi.$$

Pro poloměr křivosti podává elementární vzorec

$$R = \frac{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\,\varrho'^2 - \varrho\varrho''}$$

hodnotu

$$R = \frac{2}{3}\,c\,sin\,\varphi\,\frac{(sin^2\,\varphi + 4\,cos^2\,\varphi)^{3/2}}{1 + cos^2\,\varphi}\,,$$

zejmena jest

$$\text{pro } \varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$$

$$\text{resp. } R = 0, \frac{13\sqrt{13}}{42}\,c\,, \frac{5\sqrt{5}}{9}\,c\,, \frac{7\sqrt{21}}{30}\,c\,, \frac{2}{3}\,c\,.$$

Pro tečnu dvojovály nalezneme snadno

$$3\,X\,sin\,2\,\varphi - (1 + 3\,cos\,2\,\varphi)\,Y = 4\,c\,sin^3\,\varphi,$$

---

*) F. Münger, Dissertace; Bern 1894. Intermédiaire des Math. 9 (1902), p. 335. H. Wieleitner, Spez. ebene Kurven (1908), str. 71. Gino Loria, Spez. eb. Kurven, str. 311 (1902).

takže křivka ta je též 6. třídy. Z rovnice čáry plyne, že má čtyřnásobný bod O a úvrat v úběžných bodech kruhových se společnou tečnou; jiných singulárních bodů čára nemá. Předpokládejme, že bod O je rovnomocným se soustavou α bodů dvojných a β bodů vratných; vyjádří-li se, že čára jest rodu 0, máme nejprvé

$$0 = \frac{5 \cdot 4}{2} - 2 - (\alpha + \beta)\,, \text{ t. j. } \alpha + \beta = 8\,,$$

dále okolnost, že třída křivky je rovněž 6., dává

$$6 = 6 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - (2\,\alpha + 3\,\beta), \text{ t. j. } 2\,\alpha + 3\,\beta = 18\,;$$

je tedy $\alpha = 6$, $\beta = 2$:

Singularita bodu O pro dvojoválu platí za spojení šesti bodů dvojných s dvěma body vratnými.

Pro normálu dvojovály nalezneme bezprostředně

$$(n) \qquad X\,(1 + 3\cos 2\,\varphi) + 3\,Y \sin 2\,\varphi = 8\,c \sin^2 \varphi \cos \varphi\,;$$

její úsek na Oy je tedy

$$\frac{4}{3}\,c \sin \varphi\,.$$

Derivováním dle φ vychází rovnice přímky

$$(n') \qquad -X \sin 2\,\varphi + Y \cos 2\,\varphi = \frac{4}{3}\,c \sin \varphi\,(3 \cos^2 \varphi - 1)\,,$$

na níž leží střed křivosti; jeho souřadnice se vypočtou z těchto rovnic a jsou

$$x = -\,c \cos \varphi\,\frac{\sin^2 2\,\varphi}{1 + \cos^2 \varphi}\,, \quad y = \frac{4}{3}\,c \sin \varphi\,\frac{1 + 3 \cos^4 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi}\,,$$

takže evoluta je 6. třídy a 10. stupně.

Pravou stranu rovnice (n') lze psáti

$$\frac{2}{3}\,c \sin \varphi\,(3 \cos 2\,\varphi + 1)\,,$$

a je zřejmo, že přímka (n') obsahuje bod

$$(N) \qquad X = -\frac{1}{3}\,c \sec \varphi, \quad Y = 2\,c \sin \varphi\,,$$

mimo to prochází bodem

$$X = -\,2\,c \cos \varphi, \quad Y = -\frac{4}{3}\,c \sin \varphi \cdot \sec 2\,\varphi\,,$$

a má směr $2\,\varphi$. Těmito vlastnostmi je přímka (n') konstruktivně určena a tím získána konstrukce středu křivosti.

XXXIII.

Týž leží také na přímce

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \frac{2}{3} \frac{\varrho}{1 + \cos^2 \varphi} .$$

V obr. 2. znázorněna polovice nefroidy Γ_1 vznikající na základě kruhu poloměru $O A = c$. Její konstrukce se zjednoduší takto: Na kruhu (c) zvolíme bod μ_1 příslušný k úhlu $X O \mu_1 = \varphi$ (na přímce $O \varphi$) a bod m příslušný k úhlu $\psi = 2 \varphi$. Z bodu μ_1 spustíme kolmici $\mu_1 S_1$ na $O m$ a prodloužíme ji na opačnou stranu do M_1: $\mu_1 M_1 = S_1 \mu_1$. Důkaz toho vyplývá z obecné konstrukce pro libovolnou sf. šroubovici.

Dle té vedeme délku $m O m' = a$, načež opíšeme poloměrem a oblouk $m \overline{M}$ se středem m', na nějž naneseme délku arc. $m \overline{M} =$ arc. $m A$. V našem případě $a = 2 c$ padne m' do druhého konce průměru $m m'$, úhel $m m' \overline{M} = \varphi$ a bude tedy $m' \overline{M} \parallel O \mu_1$, takže přímka $m' \overline{M}$ obsahuje bod A.

Přímka $\overline{M} m$ protíná kruh (c) v bodě μ, který zde značen μ_1, a je pak půdorys M_1 bodu M čáry Γ na přímce $\mu_1 S_1 \perp O m$, a na přímce: $M M_1 \parallel O m$.

Z konstrukce plyne $m \mu_1 = \mu_1 \overline{M}$ (na základě podobnosti trojúhelníků $m O \mu_1$ a $m m' \overline{M}$), je tedy též očividně $S_1 \mu_1 = \mu_1 M_1$; tím naše konstrukce dokázána. Přímka $M_1 \mu_1 S_1$ je normála průmětu Γ_1, střed křivosti σ je střed délky $S_1 \mu_1$ (dle obecné věty o středu křivosti epicykloidy a hypocykloidy dělí totiž σ tětivu v poměru $1 : 3$).

Bod S_1 je půdorys středu křivosti, $S_1 M_1$ poloměr křivosti prostorové čáry Γ jako v obrazci původním.

Pro nárys M_2 třeba znáti výšku, jež v našem případě jest

$$z = 2 M_1 \overline{M} \sin \gamma = 2 \overline{m S_1} . \sin \gamma ;$$

naneseme na $A V_2$ délku $A \mu_2 = 2 \overline{m S_1}$, načež bude $\mu_2 M_2 \parallel O X$.

Víme, že plocha hlavních normál protíná válec $x^2 + y^2 = c^2$ ve dvou čarách, z nichž jedna jest ellipsa (P) na rovině $z + x \, tg \, \gamma = \sqrt{a^2 - c^2}$, t. j.

$$z + x \sqrt{3} = c \sqrt{3}.$$

Tato rovina prochází tětivou úvratníků $A V A'$ a je kolmá na $O x z$. Její nárysná stopa je tedy přímka $A V_2$. Bod ellipsy (P) na hlavní normále $M S$ znamenali jsme μ; jeho půdorys je totiž právě uvažovaný bod μ_1 a nárys je bod μ_2 na $A V_2$. Obdržíme tedy také konstrukci bodu M_2 na základě konstrukce bodu μ ellipsy (P).

Můžeme též vyjíti z bodu μ_2; určíme příslušný půdorys μ_1 na kruhu (c), načež se další část doplní jako výše.

Povrchová přímka $A' M$ kužele (A', Γ) protíná rovinu $V x y$ v bodě M'; jeho půdorys M_1' leží na průvodiči $O \varphi$ t. j. na $O \mu_1$ (podobně obsahuje tato přímka také bod dvojovály). Kardioida, kterou tento bod M_1' opisuje, je jak známo také konchoida kruhu opsaného poloměrem c kolem středu A_1', takže bude stále $m'' M_1' = 2 c$.

Bod cissoidy — v obrazci nekreslený — leží na paprsku $m'A \equiv A\,\varphi$.

Na přímce $O\,\mu_1$ leží také půdorys bodu Q, v němž tečna čáry Γ seče válec $x^2 + y^2 = a^2$. Body tyto tvoří ellipsu, již na válci tom vytíná rovina kolmá na $O\,x\,z$

$$z + \frac{x}{\sqrt{3}} = c\sqrt{3}; \tag{8}$$

nárysná stopa 8^{II} této roviny spojuje bod V_2 s bodem $x = 3\,c$ na $O\,x$.

*

8. V případě sférické šroubovice $a = 3\,c$ máme vyjádření

$$\begin{cases} x + i\,y = c\,(2\,e^{2i\varphi} - e^{4i\varphi}), \; \psi = 3\,\varphi, \\ z = \sqrt{8}\,c\,(1 - \cos\varphi). \end{cases} \tag{4}$$

Body $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ a $\varphi = \dfrac{3\,\pi}{2}$ splývají ve dvojný bod čáry $(-3\,c, 0, c\sqrt{8})$.

Půdorys je kardioida s úvratníkem A $(c, 0, 0)$, střed V má souřadnice $(0, 0, c\sqrt{8})$; čára Γ je stupně 8. a tvoří úplnou průseč koule s válcem kardioidy; má dva body úvratní na ose $A\,z$, příslušné k úhlům $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ $(z = 0$ a $z = 4\,c\sqrt{2})$.

Rovnice centrálního průmětu ze středu A do roviny $V\,x\,y$, které v obecném případě zněly (čl. 7.)

$$x = \frac{a \sin\varphi \sin\psi - c\cos\varphi\,(1 - \cos\psi)}{1 - \cos\varphi},$$

$$y = \frac{-a\sin\varphi\cos\psi + c\cos\varphi\sin\psi}{1 - \cos\varphi},$$

budou v našem případě $a = 3\,c$, spojeny v imaginární vazbu,

$$\frac{x + i\,y}{c} = \frac{(\cos\varphi - 3\,i\sin\varphi)\,e^{3i\varphi} - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi};$$

klade-li se $e^{i\varphi} = u$, zní to

$$\frac{x + i\,y}{c} = \frac{2\,u^5 - 4\,u^3 + u^2 + 1}{(u - 1)^2} = 2\,u^3 + 4\,u^2 + 2\,u + 1,$$

čili

$$x - c + i\,y = 4\,c\,(1 + \cos\varphi)\,e^{2i\varphi}. \tag{5}$$

Polární souřadnice uvažovaného průmětu (pól A_0 na $A\,z$, osa $A_0\,x$) jsou tedy

$$\varrho = 4\,c\,(1 + \cos\varphi), \; \omega = 2\,\varphi; \tag{5*}$$

polární rovnice

$$\varrho = 4\,c\left(1 + \cos\frac{\omega}{2}\right)$$

ukazuje, že čára je konchoidou růžice.

XXXIII.

Průmět do téže (střední) roviny ze středu ležícího ve druhém bodě vratním $\varphi = \pi$ má rovnici v téže soustavě souřadnic polárních

$$\varrho = 4\,c\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right);$$

obě čáry splývají, neboť rovnice přecházejí jedna v druhou záměnou ω za $\omega + 2\,\pi$.

Průměty bodů čáry Γ z obou úvratníků do roviny střední $V\,x\,y$ padají tedy na různé větve téže čáry.

Znamenáme-li na okamžik $4\,c = b$, máme nejprvé

$$(\varrho - b)^2 = b^2 \cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{b^2}{2}(1 + \cos\omega)$$

$$\varrho^2 - 2\,b\,\varrho + \frac{b^2}{2} = \frac{b^2}{2}\cos\omega.$$

V pravoúhlých souřadnicích (počátek A_0 na $A\,z$, osy směru $O\,x$, $O\,y$) bude $\varrho\cos\omega = x$, tedy

$$\left(\varrho^2 + \frac{b^2}{2}\right)\varrho = 2\,b\,\varrho^2 + \frac{b^2}{2}x,\quad \varrho^2 = x^2 + y^2$$

a odtud rovnice v pravoúhlých souřadnicích

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 8\,c^2)^2 = 64\,c^2(x^2 + y^2 + c\,x)^2.$$

Proveďme inversi vůči kruhu pomyslného poloměru

$$x = \frac{-8\,c^2}{x_0^2 + y_0^2}x_0,\quad y = \frac{-8\,c^2}{x_0^2 + y_0^2}y_0;$$

transformovaná čára bude stupně 4.

$$(x_0^2 + y_0^2 + 8\,c^2)^2 = (x_0^2 + y_0^2)(x_0 - 8\,c)^2,$$

v polárních souřadnicích

$$\varrho_0 = \frac{-2\,c}{1 - \cos\frac{\omega}{2}} = -c\,\operatorname{cosec}^2\frac{\omega}{4}.$$

Realný dvojný bod ($\omega = \pi$, $3\,\pi$) $x = 2\,c$, $y = 0$, pomyslné dvojné body z rovnic

$$x_0 - 8\,c = 0,\quad x_0^2 + y_0^2 + 8\,c^2 = 0.$$

Pro normálu čáry (5) nalezneme rovnici (počátek na $O\,z$)

$$(X - c)(\sin\varphi + 4\sin 2\,\varphi + 3\sin 3\,\varphi) - Y(\cos\varphi + 4\cos 2\,\varphi + 3\cos 3\,\varphi) =$$
$$= 8\,c\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Zavedením parametru $u = e^{i\varphi}$ bychom shledali, že evoluta je 5. třídy.

XXXIII.

Střed křivosti čáry (5)' leží na přímce

$$(\mathfrak{N}') \qquad (X - c)(\cos\varphi + 8\cos 2\varphi + 9\cos 3\varphi)$$
$$+ Y(\sin\varphi + 8\sin 2\varphi + 9\sin 3\varphi) = 8c(\cos\varphi + \cos 2\varphi);$$

pro tu určíme bod P_0:

$$X_0 - c = t_0 \sin 2\varphi, \; Y_0 = -t_0 \cos 2\varphi$$

$\left(\text{průvodič } A\,P_0 \text{ svírá s osou } A\,x \text{ úhel } 2\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, kde

$$t_0 = -c\,\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi}.$$

Dále obsahuje táž přímka bod

$$X_1 = t_1 \sin 2\varphi, \; Y_1 = -t_1 \cos 2\varphi, \; t_1 = -c\,\frac{(8 + 9\cos\varphi)\cos 2\varphi}{4\sin\varphi}.$$

Ještě určíme průmět čáry (4) z její dvojného bodu do základny; rovnice promítající přímky jsou

$$\frac{X + 3c}{Z - c\sqrt{8}} = \frac{x + 3c}{-\sqrt{8}\,c\cos\varphi}, \; \frac{Y}{Z - c\sqrt{8}} = \frac{y}{-\sqrt{8}\,c\cos\varphi},$$

kde dle (4)

$$x = 2c\cos 2\varphi - c\cos 4\varphi, \; y = 2c\sin 2\varphi - c\sin 4\varphi.$$

Stopa promítající přímky na rovině $O\,x\,y$, t. j. $Z = 0$ je dána tedy rovnicemi

$$X + 3c = \frac{x + 3c}{\cos\varphi} = 4c\cos\varphi\,(1 + 2\sin^2\varphi),$$
$$Y = 4c\sin\varphi\,(1 - \cos 2\varphi),$$

čili

$$(6) \qquad X + 3c = 6c\cos\varphi - 2c\cos 3\varphi, \; Y = 6c\sin\varphi - 2c\sin 3\varphi;$$

tyto rovnice dávají průmět čáry Γ ($a = 3c$) z její dvojného bodu ($-3c$, 0, $c\sqrt{8}$) do roviny $O\,x\,y$. Průmětem tím je nefroida vytvořená kotálením kruhu poloměru $2c$ po pevném kruhu poloměru $4c$, jeho střed ($-3c$, 0) leží v půdoryse dvojného bodu čáry.

*

9. Přeložme počátek souřadnic opět do bodu V; rovnice hlavní normály v parametrech φ a v zněly (3*) str. 19.

$$(n) \qquad \begin{aligned} x &= c\cos(\psi - \varphi) - v\sin\psi, \\ y &= c\sin(\psi - \varphi) + v\cos\psi, \\ z &= -\sqrt{a^2 - c^2}\cos\varphi; \; a\varphi = c\psi. \end{aligned}$$

Vyjadřme podmínku, aby tato normála protínala danou přímku

$$(p) \qquad x = mz + p, \; y = nz + q.$$

Vložíme-li do těchto rovnic hodnoty z rovnic (n), obdržíme dvé rovnic mezi proměnnými φ a v; vyloučením v vychází

$$\begin{vmatrix} c\cos(\psi-\varphi)+m\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi-p, & -\sin\psi \\ c\sin(\psi-\varphi)+n\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi-q, & \cos\psi \end{vmatrix}=0$$

čili po rozvedení determinantu

$$(1)\qquad c\cos\varphi+(m\cos\psi+n\sin\psi)\sqrt{a^2-c^2}\cos\varphi \\ -p\cos\psi-q\sin\psi=0\,;$$

tato rovnice určuje polohu bodů na šroubové čáře Γ, jichž hlavní normály protínají přímku (p), a slouží tedy k stanovení průseků přímky té s plochou hlavních normál.

V případě sférické šroubovice 30° spádu ($a=2c$) se po zavedení parametru $u=e^{i\varphi}$ přepíše tato rovnice na

$$2cu^2(u^2+1)+c\sqrt{3}(u^2+1)[(m-ni)u^4+(m+ni)] \\ -2u[(p-qi)u^4+(p+qi)]=0$$

čili po seřazení dle mocnin u,

$$(2)\quad c\sqrt{3}(m-ni)u^6-2(p-qi)u^5+c[2+(m-ni)\sqrt{3}]u^4+ \\ +c[2+(m+ni)\sqrt{3}]u^2-2(p+iq)u+c(m+ni)\sqrt{3}=0.$$

Značíme-li $u_1 u_2 \ldots u_6$ kořeny této rovnice a literami $\mathfrak{f}_1=\Sigma u_\nu$, $\mathfrak{f}_2=\Sigma u_\mu u_\nu, \ldots$ jich základní úkony souměrné, obdržíme z rovnice (2) především

$$(3)\qquad \mathfrak{f}_3=0,\ \mathfrak{f}_4-\mathfrak{f}_6=\mathfrak{f}_2-1.$$

Tyto dvě rovnice mezi parametry $u_1 \ldots u_6$ vyjadřují podmínku, aby hlavní normály šesti bodů u_ν měly společnou sečnu. Čtyři z těchto normál možno voliti dle libosti, a budou míti určitou společnou sečnu; rovnice (3) pak vyjadřují, že tato protíná také normály zbývajících dvou bodů, a slouží k stanovení těchto dvou bodů jako společného páru dvou involucí.

Obecně sice mají čtyři přímky společné sečny dvě; z těch v našem případě hlavních normál čáry Γ jedna splývá s úběžnou přímkou roviny xy, a zbývá jen jedna skutečná sečna společná pro čtyři hlavní normály.

Pro tři dané hlavní normály existuje ∞^1 přímek je protínajících (tvoří paraboloid hyperbolický) a každá z těchto společných sečen protíná ještě tři hlavní normály. Takovým způsobem vzniká na ploše hlavních normál kubická involuce přímek.

Je-li jedna z povrchových přímek plochy hlavních normál její přímka dvojná Vy ($\varphi=\frac{\pi}{2}$ a $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ čili $u=\pm i$), odpovídá její průsek s přímkou p dvěma parametrům $u=i$ a $u=-i$, a zbývají jen 4 hlavní normály, jež přímku mohou protínati. U zbývajících parametrů $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$ máme symetrické úkony základní $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2\, \mathfrak{g}_3\, \mathfrak{g}_4$, a bude

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{g}_4 + (i - i)\,\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2$$
$$\mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4, \; \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + 1,$$

takže druhá z rovnic (3) jest identicky splněna, a zbývá pro čtveřinu $u_1 \ldots u_4$ podmínka jediná $\mathfrak{f}_3 = 0$, t. j.

$$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1 = 0 \tag{4}$$

čili

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_1 u_2 u_3 + u_1 u_2 u_4 + u_1 u_3 u_4 + u_2 u_3 u_4 = 0.$$

„Hlavní normály ve 4. bodech hovících podmínce (4) mají společnou sečnu, která protíná též přímku dvojnou $V y$ plochy hl. normál.“

Vraťme se k přímce (p); její průseky s plochou hl. normál hoví rovnici (2). Znamenáme-li

$$A = c\,(m - n\,i)\,\sqrt{3}, \; B = c\,(m + n\,i)\,\sqrt{3},$$

podává rovnice (2)

$$A\,\mathfrak{f}_1 = 2\,(p - i\,q), \quad A\,\mathfrak{f}_5 = 2\,(p + i\,q),$$
$$A\,\mathfrak{f}_2 = A + 2\,c, \; A\,\mathfrak{f}_4 = B + 2\,c, \; A\,\mathfrak{f}_6 = B,$$

a odtud vychází

$$A = \frac{2\,c}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \; B = \frac{2\,c\,\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \; m - n\,i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\mathfrak{f}_2 - 1},$$
$$m + n\,i = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \; p - i\,q = \frac{c\,\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \; p + i\,q = \frac{c\,\mathfrak{f}_5}{\mathfrak{f}_2 - 1}.$$

a rovnice přímky (p) bude lze psáti

$$\left|\begin{aligned} x + i\,y &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathfrak{f}_6}{\mathfrak{f}_2 - 1}\,z + \frac{c\,\mathfrak{f}_5}{\mathfrak{f}_2 - 1}, \\ x - i\,y &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\mathfrak{f}_2 - 1}\,z + \frac{c\,\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2 - 1}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Tyto rovnice určují přímku protínající šest hlavních normál čáry Γ, které hoví podmínkám (3).

Společná sečna hl. normál čtveřiny (4) má tedy zvláště rovnice

$$\left|\begin{aligned} x + i\,y &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_2}\,z + c\,\frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_2}, \\ x - i\,y &= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\mathfrak{g}_2}\,z + c\,\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2}; \end{aligned}\right. \tag{4a}$$

přímka ta leží skutečně na rovině — ježto $\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1 = 0$ —

$$x = \frac{\mathfrak{g}_4 + 1}{\mathfrak{g}_2 \sqrt{3}}\,z,$$

která obsahuje dvojnou přímku $V y$ plochy hl. normál.

XXXIII.

Na ploše hlavních normál naší čáry Γ ($a = 2c$) přísluší libovolné přímce (u) oskulační paraboloid; můžeme určiti jeho povrchovou přímku druhé soustavy, která protíná přímku dvojnou Vy. Dáme totiž splynouti hodnotám $u_1\, u_2\, u_3$ ve společnou hodnotu u; společné sečny tří přímek tak přejdou v povrchové přímky oskulačního paraboloidu, a ta z nich, která protíná přímku Vy, hoví podmínce (4), přísluší-li k parametru $u_0 = u_4$.

Rovnice (4) podává

$$u_0 = -\frac{u^3 + 3u}{3u^2 + 1},$$

načež se symetrické funkce vypočtou takto:

$$\mathfrak{g}_1 = 3u + u_0 = \frac{8u^3}{3u^2 + 1},$$

$$\mathfrak{g}_2 = 3u^2 + 3u_0 u = \frac{6u^2(u^2 - 1)}{3u^2 + 1},$$

$$\mathfrak{g}_3 = (3u_0 + u)u^2 = -\frac{8u^3}{3u^2 + 1},$$

$$\mathfrak{g}_4 = -u^4 \frac{u^2 + 3}{3u^2 + 1};$$

$$\frac{\mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_2} = -\frac{u^2(u^2 + 3)}{6(u^2 - 1)}, \quad \frac{\mathfrak{g}_3}{\mathfrak{g}_2} = -\frac{4u}{3(u^2 - 1)}, \quad \frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2} = \frac{4u}{3(u^2 - 1)}.$$

Povrchová přímka druhé soustavy na oskulačním paraboloidu, která protíná přímku Vy, má tedy rovnice

$$x + iy = -\frac{u^4(u^2 + 3)}{3\sqrt{3}\,u^2(u^2 - 1)}z - \frac{4cu}{3(u^2 - 1)},$$

$$x - iy = \frac{3u^2 + 1}{3\sqrt{3}\,u^2(u^2 - 1)}z + \frac{4cu}{3(u^2 - 1)},$$

čili v realném tvaru

$$(q) \quad \left| \begin{aligned} x &= -\frac{\sin 3\varphi + 3\sin\varphi}{6\sqrt{3}\sin\varphi}z, \\ y &= \frac{\cos 3\varphi + 3\cos\varphi}{6\sqrt{3}\sin\varphi} + \frac{2c}{3\sin\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Tyto přímky q, které leží na různých oskulačních paraboloidech plochy hlavních normál naší čáry Γ ($a = 2c$) a protínají přímku Vy, tvoří sborcenou plochu (q).

Nárysná stopa přímky q

$$z = -\frac{c\sqrt{3}}{\cos^3\varphi}, \quad x = c\,\frac{1 + 2\cos^2\varphi}{3\cos^3\varphi}, \quad y = 0$$

opisuje racionální čáru 3. stupně, která je dvojnou čarou plochy (q).

Směrný kužel plochy (q) vedený z vrcholu V obsahuje křivku

$$x = \frac{c}{2}(3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi),$$

$$y = -\frac{c}{2}(3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi),$$

$$z = -3\sqrt{3}\, c \sin \varphi,$$

která je šroubovou na válci směru Vz, ana její tečna má cosinusy směrné

$$\frac{1}{2}\cos 2\varphi,\ \frac{1}{2}\sin 2\varphi,\ -\frac{1}{2}\sqrt{3},$$

a leží na rotačním ellipsoidu (počátek souřadnic V)

$$\frac{x^2 + y^2}{4c^2} + \frac{z^2}{36c^2} = 1;$$

čára tato je šroubovice bikonická. Pro sborcenou plochu (q) známe tři řídící čáry, t. j. přímku Vy, dvojnou čáru kubickou v nárysně, a úběžnou čáru na kuželi, kterým se z vrcholu V promítá šroubovice bikonická.

Půdorys této šroubovice splývá s půdorysem čáry Γ, pouze význam parametrů je jiný; půdorysem bodu šroubovice bikonické je půdorys bodu $\varphi - \frac{\pi}{2}$ na čáře Γ.

Vraťme se k rovnici (2) pro případ, že přímka p je směru Oz, tedy $m = n = 0$. Tu odpadnou dva kořeny $u = 0$ a $u = \infty$ a zbývá rovnice stupně 4.

$$(p - iq)\, u^4 - c\,(u^3 + u) + p + iq = 0.$$

„Čtveřiny hlavních normál, jichž společná sečna je kolmá na rovinu základní, odpovídají parametrům hovícím podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_2 = 0."$$

Společná sečna má rovnice

$$x = c\,\frac{\mathfrak{g}_4 + 1}{2\,\mathfrak{g}_1},\quad y = c\,\frac{\mathfrak{g}_4 - 1}{2i\,\mathfrak{g}_1}.$$

Z podmínky $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$ plyne, že tyto veličiny jsou rovny svým sdruženým, a tedy jsou realné, předpokládaje realnou čtveřinu.

Má-li společná sečna šesti hlavních normál procházeti bodem V, musí $p = q = 0$, a rovnice (2) přejde v kubickou o neznámé u^2, normály se kupí v páry (φ, $\varphi + \pi$), t. j. jsou po dvou rovnoběžny.

Znamenáme-li parametry tří normál $u_1\, u_2\, u_3$, budou normály v bodech $-u_1$, $-u_2$, $-u_3$ s prvními rovnoběžny; jest identicky $\mathfrak{f}_3 = 0$, a zbývá jen splniti druhou podmínku (3), načež normály mají společnou sečnu.

Znamenejme souměrné úkony prvků $u_1\, u_2\, u_3$ literami $\mathfrak{g}_1\, \mathfrak{g}_2\, \mathfrak{g}_3$, prvky opačné mají souměrné úkony $-\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $-\mathfrak{g}_3$. Je pak

$$\mathfrak{f}_4 = -2\,\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2^2,\ \mathfrak{f}_6 = -\mathfrak{g}_3^2,\ \mathfrak{f}_2 = 2\,\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1^2,$$

a podmínky (3) přecházejí v rovnici

$$\mathfrak{g}_2^2 - 2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_3^2 = 2\,\mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1^2 - 1$$

čili

$$(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3)^2 + (1 - \mathfrak{g}_2^2) = 0.$$

Rovnici tu lze psáti

$$(1 + u_1^2)\,(1 + u_2^2)\,(1 + u_3^2) = 0,$$

a je splněna jen pro $u_\nu^2 + 1 = 0$. Klademe-li $u_3^2 + 1 = 0$, určují hlavní normály bodů u_1, u_2 s přímkou (u_3) $V\,y$ paraboloid, na němž leží $V\,y$ a tedy také bod V, a druhá jeho povrchová přímka bodem V procházející řeší problém.

Předpokládejme, že se přímka (p) dotýká plochy hlavních normá ve třech bodech; bude $u_4 = u_1$, $u_5 = u_2$, $u_6 = u_3$; znamenáme-li souměrné úkony prvků $u_1\,u_2\,u_3$ literami $\mathfrak{g}$, obdržíme

$$\mathfrak{f}_1 = 2\,\mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_1^2 + 2\,\mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{f}_3 = 2\,\mathfrak{g}_3 + 2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{f}_4 = 2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_2^2,$$
$$\mathfrak{f}_5 = 2\,\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_3^2,$$

načež rovnice (3) dávají

$$\mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2 = 0,\ \mathfrak{g}_2^2 + 2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_3^2 = \mathfrak{g}\,^2 + 2\,\mathfrak{g}_2 - 1;$$

druhá se přepíše na základě první na tvar

$$(\mathfrak{g}_2 - 1)^2 = \mathfrak{g}_1^2\,(\mathfrak{g}_2 + 1)^2.$$

Máme tedy jen jednu neodvisle proměnnou $\mathfrak{g}_2$, načež

$$\mathfrak{g}_1 = \pm\frac{\mathfrak{g}_2 - 1}{\mathfrak{g}_2 + 1},\ \mathfrak{g}_3 = -\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_2.$$

Vložením hodnot, jež odtud vycházejí pro veličiny $\mathfrak{f}_\nu$, do rovnic (5), obdržíme součinitele v rovnicích přímky jako racionální funkce parametru $\mathfrak{g}_2$, stupně čtvrtého; a sice obdržíme tak dvě řady přímek trojnásob tečných, vzhledem k dvojímu znamení při $\mathfrak{g}_1$.

*

10. V případě $a = 3\,c$ má hlavní normála rovnice (počátek V)

$$(n)\qquad x \cos 3\,\varphi + y \sin 3\,\varphi = c \cos \varphi\,,\ z = -\,c\,\sqrt{8} \cos \varphi\,;$$

pro eliminaci φ máme

$$\cos 3\,\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi\,,\ \sin 3\,\varphi = (4 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi$$

a rovnice plochy hlavních normál bude

$$x\,z\,(z^2 - 6\,c^2) - y\,(z^2 - 2\,c^2)\sqrt{8\,c^2 - z^2} = 2\,c^3 z\,.$$

XXXIII.

Normály dvojného bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ splývají ve dvojnou přímku Vx $(y = 0,\ z = 0)$; dále jsou dvojnými přímkami hlavní normály bodů $\varphi = \frac{\pi}{3}$ a $\varphi = \frac{5\pi}{3}$

$$x = -\frac{c}{2},\quad z = -c\sqrt{2},$$

rovněž normály

$$\varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ a } \varphi = \frac{4\pi}{3}$$

$$x = -\frac{c}{2},\quad z = c\sqrt{2}.$$

Z rovnice plochy soudíme dále, že křivka 3. stupně

$$y = 0,\quad x(z^2 - 6c^2) = 2c^3$$

(nárysná stopa plochy) je dvojnou čarou této plochy 8. stupně.

Rovina $x = -\frac{c}{2}$ obsahuje dvě dvojné přímky a seče plochu normál ještě v čáře stupně 4.; z rovnice se tu skutečně odštěpí faktor $z^2 - 2c^2$ a zbývá

$$\frac{c}{2} z + y\sqrt{8c^2 - z^2} = 0,$$

rovnice čáry stupně 4.

Rovina $x = c$ seče plochu ve dvou přímkách $z = \pm c\sqrt{8}$ (které jsou rovnoběžny s Oy, vycházejí z úvratníků čáry Γ, a přísluší hodnotám $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$ jako hl. normály) a mimo to v čáře stupně 6.

$$cz\sqrt{8c^2 - z^2} + y(z^2 - 2c^2) = 0.$$

Hlavní normály v bodech $\varphi = \varphi_0 + \frac{\nu\pi}{3}$ $(\nu = 0, 1, \ldots 5)$ jsou vespolek rovnoběžny, takže povrchové přímky plochy se řadí do skupin po šesti rovnoběžkách, vždy po třech ve společné rovině normální čáry Γ.

Pro průseky plochy normál s danou přímkou

$$x = mz + p,\quad y = nz + q$$

máme dle (1) čl. 9

$$c\cos\varphi + (m\cos 3\varphi + n\sin 3\varphi)\, c\sqrt{8}\cos\varphi - p\cos 3\varphi - q\sin 3\varphi = 0,$$

čili pomocí parametru $u = e^{i\varphi}$:

$$c\sqrt{2}(m - in)u^8 - (p - iq)u^7 + c\sqrt{2}(m - in)u^6 + cu^5 +$$
$$+ cu^3 + c\sqrt{2}(m + in)u^2 - (p + iq)u + c\sqrt{2}(m + in) = 0.$$

Souměrné úkony kořenů jsou tedy vázány vztahy

$$\mathfrak{f}_2 = 1,\ \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{f}_5,\ \mathfrak{f}_4 = 0,\ \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{f}_8.$$

Ty vyjadřují podmínku, aby osm hlavních normál čáry Γ ($a = 3\,c$) mělo společnou sečnu.

Uvažujme zvláště přímky v rovině $x = -\frac{c}{2}$; ty protínají přímky dvojné příslušné k úhlům φ

$$\frac{\pi}{3},\ \frac{5\,\pi}{3};\ \frac{2\,\pi}{3},\ \frac{4\,\pi}{3}$$

a příslušné parametry u hoví rovnici

$$u^4 + u^2 + 1 = 0.$$

Zbývajících čtvero průseků plochy s přímkou přísluší parametrům $u_1\, u_2\, u_3\, u_4$, jichž souměrné úkony znamenejme $\mathfrak{g}_\nu$. Bude pak

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + 1,\ \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{f}_4 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2 + 1,$$
$$\mathfrak{f}_5 = \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{f}_8 = \mathfrak{g}_4;$$

hořejší podmínky se redukují na dvě

$$\mathfrak{g}_2 = 0,\ \mathfrak{g}_4 = -1.$$

Takovéto čtveřiny snadno se geometricky realisují: Z libovolného bodu spustíme čtvero normál na ellipsu

$$x = \mathfrak{a} \cos \varphi,\ y = \mathfrak{b} \sin \varphi,\ (\mathfrak{a} > \mathfrak{b});$$

jich paty přísluší parametrům φ_ν, pro něž veličiny $u_\nu = e^{i\varphi}$ hoví rovnicím $\mathfrak{g}_2 = 0$, $\mathfrak{g}_4 = -1$.

Body příslušné témuž $\psi \equiv 3\,\varphi$ mod. $2\,\pi$, t. j. body $\varphi + \frac{2\,\nu\,\pi}{3}$ ($\nu = 0, 1, 2$), leží na téže rovině, která se dotýká kužele (V, c) podél přímky $V\,m$; je to společná rovina normální $\mathfrak{N}$ našich bodů, které znamenejme M, M_1, M_2. Tyto body leží na kruhu poloměru a a středu V, v němž rovina $\mathfrak{N}$ seče kouli, na které se čára Γ nachází. Bod V je tedy středem kruhu opsaného o trojúhelník $M\,M_1\,M_2$.

Z rovnic pro souřadnice bodu M (počátek V)

$$x = 2\,c \cos 2\,\varphi - c \cos 4\,\varphi$$
$$y = 2\,c \sin 2\,\varphi - c \sin 4\,\varphi$$
$$z = -c\,\sqrt{8} \cos \varphi$$

vychází však

$$x + x_1 + x_2 = 0, \ldots$$

takže V je těžiště trojúhelníka našeho. Tento je tedy rovnostranný.

„Na sférické šroubovici $a = 3\,c$ tvoří body φ, $\varphi + 120^0$, $\varphi = 240^0$ rovnostranný trojúhelník vepsaný kruhu poloměru a; střed trojúhelníka je bod V, jeho rovina je tečnou rovinou kužele (V, c) a společnou normální rovinou ve vrcholech; hlavní normály v těchto bodech jsou vespolek rovnoběžny."

XXXIII.

Trojúhelník příslušný k úhlu $\varphi + \pi$ má s tímto společný půdorys a hlavní normály čáry Γ v jeho vrcholech jsou s předešlými rovnoběžny; roviny obou trojúhelníků protínají se v přímce VH rovnoběžné s tečnami základního kruhu (c) v bodech m a m', příslušných k úhlům $\psi = 3\varphi$ a $\psi' = 3(\varphi + \pi)$.

Znamenejme M' bod čáry Γ příslušný k úhlu $\varphi' = \varphi + \frac{2\pi}{3}$, bod M příslušný k úhlu φ; v rovině normální jim společné, která se dotýká kužele základního podél přímky mV, máme kruh mMM' se středem V; volme v ní osy souřadnic pravoúhlých $Vm \equiv V\xi$, $VH \equiv V\eta$, poslední tak, aby úhel $mVH = \frac{\pi}{2}$ byl měřen ve směru kladných φ. V této rovině přímka MM' je kolmá na směr $\varphi + 60^0$ a má rovnici

$$\xi \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + \eta \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} = \frac{3c}{2},$$

poněvadž vzdálenost její je vzdálenost strany vepsaného trojúhelníka od středu kruhu. Přímka MM' je strana tohoto trojúhelníka a její průsek H s přímkou VH $(\xi = 0)$ jest její průsek s příslušnou stranou druhého trojúhelníka rovnostranného v rovině určené stranou kužele $m'V$. Poloha bodu H tedy je určena vzdáleností

$$VH = \eta = \frac{3c}{2\sin(\varphi + 60^0)};$$

mimo to má vektor VH směr $\psi - \frac{\pi}{2} = 3\varphi - \frac{\pi}{2}$, tedy souřadnice bodu H jsou

$$x = VH \cdot \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3c}{2} \frac{\sin 3\varphi}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)},$$

$$y = VH \cdot \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3c}{2} \frac{\cos 3\varphi}{\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)};$$

geometrické místo bodu H je tedy zvláštní čára t. zv. klasová (épis, Ährenkurve)*) v rovině Vxy

$$x + iy = \frac{3c}{2} i \frac{e^{i\omega}}{\sin\frac{\omega}{3}}, \quad \omega = 3\varphi + \pi.$$

Tuto čáru tedy vyplní průseky stran pravidelných trojúhelníků jichž roviny se dotýkají základního kužele v stranách diametrálně protilehlých.

*) Teixeira, II. díl, str. 237; H. Wieleitner, Spez. ebene Kurven, str. 12

Pro střed strany $M M'$ rovnostranného trojúhelníka nalezneme v souřadnicích s počátkem V

$$x + i y = -\frac{c}{2}(2 e^{2 i \vartheta} - e^{4 i \vartheta}),$$

$$z = -\frac{c}{2} \sqrt{8} \cos \vartheta, \quad \vartheta = \varphi + \frac{\pi}{3}.$$

Středy stran rovnostranných trojúhelníků $\left(\varphi, \ \varphi + \frac{2\pi}{3}, \ \varphi + \frac{4\pi}{3}\right)$ naplňují tedy sférickou šroubovici podobnou, s týmž základním kuželem, a polovičních rozměrů, při čemž základní úvratník leží na opačné straně roviny $O y z$.

*

11. Rovnice oskulační roviny

$$X \cos \psi + Y \sin \psi - tg\, \gamma\, (Z - z) = c \cos \varphi$$

v případě $a = 2c$ a pro počátek V se zjednoduší na

$$X \cos 2\varphi + Y \sin 2\varphi - Z \sqrt{3} = 4 c \cos \varphi; \tag{1}$$

v komplexním parametru

$$t = e^{i\varphi}$$

tato rovnice nabývá tvaru

$$(X - i Y)\, t^4 - 2 Z \sqrt{3}\, t^2 - 4 c\, (t^3 + t) + (X + i Y) = 0. \tag{1^a}$$

Při stálém $X\ Y\ Z$ podává tato rovnice jakožto své kořeny parametry bodů $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$, jichž oskulační roviny procházejí daným bodem. Jest tedy sf. šroubovice Γ 30° spádu čarou 4. třídy.

Parametry dotykových bodů oskulačních rovin procházejících týmž bodem hoví tedy rovnici

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3, \tag{2}$$

která plně charakterisuje tuto vlastnost; a sice oskulační roviny čtyř bodů, pro něž symetrické úkony parametrů $t_\nu = e^{i\varphi_\nu}$ hoví rovnici (2), protínají se v bodě (počátek souřadnic V):

$$x = 2c \frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{\mathfrak{f}_1}, \quad y = 2c \frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{i \mathfrak{f}_1}, \quad z = -\frac{2c}{\sqrt{3}} \frac{\mathfrak{f}_2}{\mathfrak{f}_1}, \tag{2^1}$$

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{4c}{x - i y}, \quad \mathfrak{f}_2 = -2\sqrt{3} \frac{z}{x - i y}, \quad \mathfrak{f}_4 = \frac{x + i y}{x - i y}. \tag{2^2}$$

Ustanovme společnou sečnu hlavních normál v bodech této čtveřiny; připojme ještě dva body t_5 a t_6, a zaveďme symetrické úkony $\mathfrak{F}_\nu$ šesti veličin $t_1 \ldots t_6$. Bude nám třeba zvoliti t_5, t_6 tak, aby platily rovnice (3) článku 9:

$$\mathfrak{F}_3 = 0, \quad \mathfrak{F}_4 - \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{F}_2 - 1. \tag{α}$$

Při označení $\mathfrak{g}_1 = u_5 + u_6$, $\mathfrak{g}_2 = u_5 u_6$ máme pak identicky

$$\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_2, \; \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2,$$
$$\mathfrak{F}_4 = \mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_2, \; \mathfrak{F}_6 = \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_2,$$

a rovnice (α) ve spojení s podmínkou (2) dávají

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_2 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_2 = -\mathfrak{f}_1 \\ (\mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_2 + 1)(\mathfrak{g}_2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Druhé rovnici vyhovíme hodnotou $\mathfrak{g}_2 = 1$, takže máme

$$\mathfrak{g}_2 = 1, \; \mathfrak{g}_1 = -\frac{2\,\mathfrak{f}_1}{\mathfrak{f}_2},$$

načež

$$\mathfrak{F}_2 - 1 = \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{g}_1 = \frac{\mathfrak{f}_2^2 - 2\,\mathfrak{f}_1^2}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1 = \frac{\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2)}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_5 = \mathfrak{f}_4 \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_3 \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{f}_1 \frac{\mathfrak{f}_2 - 2\,\mathfrak{f}_4}{\mathfrak{f}_2},$$

$$\mathfrak{F}_6 = \mathfrak{f}_4,$$

a podle rovnic (5) čl. 9 znějí rovnice společné sečny hlavních normál naší čtveřiny

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} X + i\,Y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{\mathfrak{F}_6}{\mathfrak{F}_2 - 1} Z + c \dfrac{\mathfrak{F}_5}{\mathfrak{F}_2 - 1}, \\[2ex] X - i\,Y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\mathfrak{F}_2 - 1} Z + c \dfrac{\mathfrak{F}_1}{\mathfrak{F}_2 - 1}; \end{cases}$$

po dosazení hodnot máme tedy

$$X + i\,Y = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{f}_2 \mathfrak{f}_4 Z + c\,\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2\,\mathfrak{f}_4)}{\mathfrak{f}_2^2 - 2\,\mathfrak{f}_1^2},$$

$$X - i\,Y = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{f}_2 Z + c\,\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - 2)}{\mathfrak{f}_2^2 - 2\,\mathfrak{f}_1^2}.$$

Podle našich hodnot (2^2) — v nichž $x\,y\,z$ je průsečný bod oskulačních rovin — bude

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_4 + 1) = -\frac{4\,z\,x}{(x - i\,y)^2}, \; \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathfrak{f}_2(\mathfrak{f}_4 - 1) = -\frac{4\,z\,y\,i}{(x - i\,y)^2}$$

$$\mathfrak{f}_1(1 - \mathfrak{f}_4) = -\frac{8\,c\,i\,y}{(x - i\,y)^2},$$

$$\mathfrak{f}_1(\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 - 1) = -\frac{8\,c\,(x + z\sqrt{3})}{(x - i\,y)^2},$$

$$\mathfrak{f}_2^2 - 2\,\mathfrak{f}_1^2 = 4\,\frac{3\,z^2 - 2\,a^2}{(x - i\,y)^2}.$$

a tedy vyjde pro rovnice společné sečny hlavních normál tvar

$$
(3) \qquad \begin{cases} (3 z^2 - 2 a^2) X + x z Z + 2 c^2 (x + z \sqrt{3}) = 0\,, \\ (3 z^2 - 2 a^2) Y + y z Z + 2 c^2 y = 0\,. \end{cases}
$$

Tyto rovnice v běžných souřadnicích X, Y, Z udávají přímku, která protíná hlavní normály čáry Γ sestrojené ve čtyřech bodech, jichž roviny oskulační procházejí bodem x, y, z.

Identifikujíce tyto rovnice s rovnicemi přímky

$$
(4) \qquad X = m Z + p, \; Y = n Z + q,
$$

obdržíme 4 rovnice o třech neznámých x, y, z; jich vyloučením vychází pak vztah

$$
(4^*) \qquad (3 c^2 n^2 - 2 q^2)(p n - q m) + \sqrt{3}\, c^2 n^2 q = 0
$$

jakožto podmínka, aby mezi šesti hlavními normálami protínajícími přímku (4) byly čtyři, jichž paty mají oskulační roviny o společném průseku.

„Rovnice (4*) charakterisuje komplex přímek stupně třetího, které se jeví jako společné sečny hlavních normál čáry Γ $(a = 2c)$ vedených ve čtveřinách bodů, jichž oskulační roviny procházejí společným bodem.“

Souřadnice $x_0\, y_0\, z_0$. $x_1\, y_1\, z_1$ dvou bodů na přímce komplexu toho hoví rovnici v podstatě shodné s (4*)

$$
[3 c^2 (y_1 - y_0)^2 - 2 (y_0 z_1 - y_1 z_0)^2] (x_0 y_1 - x_1 y_0) + \\ + \sqrt{3}\, c^2 (y_1 - y_0)^2 (y_0 z_1 - y_1 z_0) = 0\,.
$$

Podržíme-li bod $x_0\, y_0\, z_0$ jako stálý, probíhají přímky komplexu tímto bodem vedené racionální kužel 3. stupně; pro body na rovině $y_0 = 0$ rozpadá se kužel tento ve tři roviny, z nichž jedna jest rovina $O x z$.

Vraťme se ještě k rovnici (β); je třeba ještě vyšetřiti druhý případ, kdy

$$
(\delta) \qquad \mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_2 + 1 = 0.
$$

Tu zůstává $\mathfrak{g}_2$ libovolné a rovnice (β) se redukují na jednu

$$
(\delta') \qquad \mathfrak{f}_2\, \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{f}_1\, \mathfrak{g}_2 = - \mathfrak{f}_1.
$$

Z rovnic (2^1) plyne pro tyto čtveřiny $(\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_4 + 1)$

$$
z + \frac{1}{\sqrt{3}} x = 0,
$$

t. j. uvažovaný případ nastane pro body na rovině oskulační bodů $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$, která protíná plochu tečen v ellipse. Rovnice čtveřiny zní

$$
t^4 - 1 - \mathfrak{f}_1 (t^3 + t) + \mathfrak{f}_2 (t^2 + 1) = 0,
$$

a má dva kořeny stálé $t^2 + 1 = 0$, t. j. $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; oskulační roviny těchto bodů splývají, zbývající dvě roviny příslušejí k parametrům z rovnice

$$t^2 - \mathfrak{f}_1 t + \mathfrak{f}_2 - 1 = 0.$$

Dvojice parametrů $t^2 - \mathfrak{g}_1 t + \mathfrak{g}_2 = 0$ doplňuje tyto poslední ve čtveřinu, jež vzniká ze sečen plochy hl. normál, protínajících přímku dvojnou $V y$; podle (4) čl. 9 vyjde vztah

$$(\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1) + [\mathfrak{g}_2 \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}_1 (\mathfrak{f}_2 - 1)] = 0,$$

jenž přirozeně se kryje s podmínkou (δ').

*

V čl. 9 jsme zjistili, že přímky rovnoběžné s osou $O z$ protínají plochu hlavních normál ve čtyřech bodech, ležících na normálách čtveřiny charakterisované vztahy $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_2 = 0$; společná sečna prochází bodem

$$x_0 = c\,\frac{\mathfrak{f}_4 + 1}{2\,\mathfrak{f}_1}, \quad y_0 = c\,\frac{\mathfrak{f}_4 - 1}{2\,i\,\mathfrak{f}_1}.$$

Pro tyto body je splněna tedy podmínka (2) čl. 11, takže oskulační roviny v patních bodech těchto normál se protínají v jednom bodě; ježto $\mathfrak{f}_2 = 0$, podávají rovnice (2^1) pro tento bod

$$x = 4\,x_0, \; y = 4\,y_0, \; z = 0.$$

„Vedeme-li tedy ve čtyřech bodech čáry Γ ($a = 2\,c$), jichž hlavní normály mají společnou sečnu na sobě kolmou, roviny oskulační, protínají se tyto v bodě P roviny střední $V x y$, průvodič $V P$ protíná sečnu společnou a jest jí štěpen v poměru 1 : 3.“

Problém stanovení průseků plochy normál s přímkou směru $O z$ ($x = x_0$, $y = y_0$) je v podstatě planimetrický a spočívá v sestrojení čtyř normál z daného bodu k Huygensově nefroidě. Poněvadž evoluta této čáry je rovněž nefroida, běží tedy o tečny nefroidy z daného bodu, a nefroida je čára 4. třídy.

Známe-li dvě normály nefroidy Γ_1 z daného bodu, buďte parametry jich pat t_3, t_4, kterým přiřaďme body na základním kruhu (c) v rovině $O x y$; zbývající dvě normály odpovídají bodům t_1, t_2, téhož kruhu, a rovnice $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_2 = 0$ je určují jako společný pár dvou involucí:

Rovnice $\mathfrak{f}_2 = 0$ dává

I. $$t_1 t_2 + (t_1 + t_2)(t_3 + t_4) + t_3 t_4 = 0,$$

kdežto rovnici $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_3$ lze psáti

I. $$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} + \frac{t_3 t_4 - 1}{t_3 + t_4} = 0.$$

Pohodlně se strojí páry involuce II.; tětivy základního kruhu (c), přímky $\overline{t_1 t_2}$ a $\overline{t_3 t_4}$ protínají osu $O\,y$ v bodech symetricky položených vůči středu kruhu.

Pro involuci I. známe pár $t_1 + t_2 = 0$, jenž leží na symetrále bodů t_3 a t_4. Druhý pár téže involuce sestrojíme, podrobujíce jej podmínce: $t_1 t_2 = -1$; jeho prvky jsou kořeny rovnice

$$t - \frac{1}{t} = \frac{1 - t_3 t_4}{t_3 + t_4};$$

pro $t = e^{i\varphi}$ tedy vychází takto

$$\sin\varphi = \frac{1 - t_3 t_4}{2\,i\,(t_3 + t_4)},$$

čímž snadno sestrojíme přímku $\parallel O\,x$ obsahující příslušný pár involuce I.

Přímka spojující středy obou involucí protíná kruh ve dvou bodech, jež určují parametry φ pro paty zbývajících dvou normál.

Ostatně obdržíme pro střed involuce I. přímo jeho souřadnice ve tvaru

$$x = -\frac{c}{2}\,\frac{1 + t_3 t_4}{t_3 + t_4},\quad y = \frac{c}{2\,i}\,\frac{1 - t_3 t_4}{t_3 + t_4}.$$

Vedeme přímku spojující protějšky bodů $t_3 t_4$ (t. j. body $\varphi_3 + \pi$, $\varphi_4 + \pi$ kruhu (c)); její pól pro kruh $x^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$ je střed involuce I.

*

Vyjádříme ještě podmínky, aby skupina bodů čáry naší ležela na rovině. Rovnici roviny pišme ve tvaru

$$A\,(x + i\,y) + B\,(x - i\,y) + C\,z + D = 0,$$

v souřadnicích s počátkem V. Na sférické šroubovici $a = 2\,c$ jest při $t = e^{i\varphi}$

$$x + i\,y = \frac{c}{2}\,(3\,t - t^3),\quad x - i\,y = \frac{c}{2}\left(\frac{3}{t} - \frac{1}{t^3}\right),$$

a obdržíme pro parametry průseků rovnici stupně 6.

$$A\,t^6 - (3\,A - C\sqrt{3})\,t^4 - (3\,B - C\sqrt{3})\,t^2 - 2\,\frac{D}{c}\,t^3 + B = 0;$$

symetrické funkce kořenů $\mathfrak{f}_\nu$ hoví tedy podmínkám

(5) $$\mathfrak{f}_1 = 0,\ \mathfrak{f}_5 = 0,\ \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_4 = 3\,(\mathfrak{f}_6 - 1).$$

Tyto tři rovnice vyjadřují okolnost, že 6 bodů čáry Γ leží na společné rovině. Jsou-li známy veškery základní úkony $\mathfrak{f}_\nu$, můžeme psáti rovnici roviny obsahující tyto body takto:

(5ª) $$(1 + \mathfrak{f}_6)\,x + i\,(1 - \mathfrak{f}_6)\,y + \frac{3 + \mathfrak{f}_2}{\sqrt{3}}\,z + \frac{c\,\mathfrak{f}_3}{2} = 0.$$

Uvažujme nyní čtveřinu bodů, jichž parametry jsou dány rovnic

$$t^4 - \mathfrak{g}_1 t^3 + \mathfrak{g}_2 t^2 - \mathfrak{g}_3 t + \mathfrak{g}_4 = 0,$$

a hledejme podmínku, aby tyto body ležely na rovině.

Zbývající dva průseky s rovinou $u_5 u_6$ určují výrazy

$$\mathfrak{h}_1 = u_5 + u_6, \quad \mathfrak{h}_2 = u_5 u_6,$$

načež rovnice (5) znějí

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}_1 = 0, \quad \mathfrak{g}_4 \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{g}_3 \mathfrak{h}_2 = 0,$$

$$3 + \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4 + (\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_3)\, \mathfrak{h}_1 + (1 - \mathfrak{g}_2 - 3\,\mathfrak{g}_4)\, \mathfrak{h}_2 = 0.$$

Vyloučením $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ nacházíme odtud

$$3 + \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_4 + (\mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1)\, \mathfrak{g}_1 + (1 - \mathfrak{g}_2 - 3\,\mathfrak{g}_4)\, \frac{\mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4}{\mathfrak{g}_3} = 0 \tag{6}$$

jakožto podmínku, aby čtyři body čáry ležely na téže rovině.

Předpokládejme zvláště $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$, t. j. že oskulační roviny naší čtveřiny se protínají v témž bodě; rovnice (6) se zjednoduší na

$$3 + \mathfrak{g}_2 - (\mathfrak{g}_2 + 3\,\mathfrak{g}_4)\, \mathfrak{g}_4 = 0.$$

Dosadíme-li sem hodnoty (2^2)

$$\mathfrak{g}_2 = -2\sqrt{3}\, \frac{z}{x - i\,y}, \quad \mathfrak{g}_4 = \frac{x + i\,y}{x - i\,y},$$

kde $x\,y\,z$ je průsečný bod rovin oskulačních, obdržíme

$$y\,(z - x\sqrt{3}) = 0.$$

Body v prostoru, z nichž vycházejí oskulační roviny čáry Γ ($a = 2\,c$) dotýkající se čáry ve čtyřech bodech na společné rovině, náležejí dvěma rovinám:

I. $\qquad y = 0,$

II. $\qquad z = x\sqrt{3}.$

Dotyková čtveřina v prvním případě ($y = 0$) je charakterisována rovnicemi $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4 = 1$, případ druhý odpovídá podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3, \quad 3 + \mathfrak{g}_2 + 3\,\mathfrak{g}_4 = 0.$$

V obou případech jsou hořejší veličiny $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$

$$\mathfrak{h}_1 = -\mathfrak{g}_1, \quad \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{g}_4,$$

tedy

$$\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_1^2 + \mathfrak{g}_4, \quad \mathfrak{f}_3 = \mathfrak{g}_3 - \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 \mathfrak{g}_4, \quad \mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4^2,$$

tudíž liší se oba případy:

I. Oskulační roviny procházející bodem (x, 0, z) dotýkají se čáry Γ ve čtyřech bodech, jež leží na rovině

$$x^2 X + (2\,x^2 - x\,z\sqrt{3} - 8\,c^2)\, \frac{Z}{\sqrt{3}} + 2\,c^2\,(x + z\sqrt{3}) = 0, \tag{7}$$

při čemž počátkem souřadnic je stále bod V.

Otáčí-li se rovina kolem přímky rovnoběžné s osou $O\,y$, opisuje přiřaděný bod kuželosečku v rovině $O\,x\,z$. Opisuje-li tento bod přímku v rovině $O\,x\,z$, obaluje přiřaděná mu rovina rovněž kuželosečku.

II. V druhém případě máme hodnoty

$$\mathfrak{f}_6 = \mathfrak{g}_4^2,\ \mathfrak{f}_3 = 4\,\mathfrak{g}_1\,(1 + \mathfrak{g}_4),\ 3 + \mathfrak{f}_2 = -(2\,\mathfrak{g}_4 + \mathfrak{g}_1^2),$$

a rovnice roviny (5^a) po dosazení hodnot (2^2) bude

$$(8) \qquad (x^2 - y^2)\,X + 2\,x\,y\,Y - (x^2 + y^2 + 8\,c^2)\,\frac{Z}{\sqrt{3}} + 8\,c^2\,x = 0;$$

je to rovina obsahující čtyři body čáry Γ, jejichž oskulační roviny se protínají v bodě x, y, z na rovině $z = \sqrt{3}\,x$.

Ve zvláštním případě $y = 0$ splývá tato rovnice s (7) pro $z = x\sqrt{3}$; a sice soudíme z rovnice té

$$x^2 X - \frac{x^2 + 8\,c^2}{\sqrt{3}}\,Z + 8\,c^2\,x = 0,$$

že

„oskulační roviny vycházející z bodů přímky $y = 0$, $z = x\sqrt{3}$ dotýkají se čáry Γ v bodech ležících na tečné rovině hyperbolického válce

$$Z^2 - X\,Z\sqrt{3} = 6\,c^2.$$

Čtveřiny dotykových bodů těchto hoví podmínkám

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_4 = 1,\ \mathfrak{g}_2 = -4,$$

takže tvoří involuci o jednom stupni volnosti.

Oskulační roviny vycházející z bodů nárysny $y = 0$ dají se lehce konstruktivně stanoviti, poněvadž příslušná rovnice je reciproká:

$$t^4 + 1 + \mathfrak{g}_2\,t^2 = \mathfrak{g}_1\,(t + t^3),\quad t = e^{i\varphi};$$

ostatně tu (1) dává při $Y = 0$ přímo rovnici 2. stupně pro $\cos\varphi$.

*

Předpokládejme, že z šesti průseků křivky Γ s rovinou tři body splynou ($t_4 = t_5 = t_6$); zbývají pak 3 další body t_1, t_2, t_3, symetrické úkony buďte značeny $\mathfrak{h}$, společná hodnota splývajících kořenů buď t_0. Máme pak z prvních dvou rovnic (5)

$$\mathfrak{h}_1 = -3\,t_0,\ 3\,\mathfrak{h}_3 = -\mathfrak{h}_2\,t_0,$$

třetí z nich pak dá po dosazení těchto hodnot vztah

$$3 - 6\,t_0^2 + 3\,t_0^4 + \mathfrak{h}_2\,(1 - 2\,t_0^2 + t_0^4) = 0,$$

t. j. $\mathfrak{h}_2 + 3 = 0$. Tudíž jest $\mathfrak{h}_3 = t_0$.

Kubická rovnice pro zbývající tři průseky čáry Γ s rovinou oskulační bodu t_0 zní dle toho

$$t^3 + 3\,t_0\,t^2 - 3\,t - t_0 = 0.$$

Připojíme-li k těmto třem bodům jako čtvrtý bod $t_0 = t_4$, bude čtveřina $t_1 t_2 t_3 t_4$ zahrnovati různé průseky čáry s rovinou oskulační a symetrické funkce prvků budou

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 + t_0 = -2\,t_0,\quad \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{h}_3 + \mathfrak{h}_2 t_0 = -2\,t_0,$$

takže jest $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$; oskulační roviny všech čtyř bodů procházejí jedním bodem, t. j.

„Oskulační rovina Ω libovolného bodu sférické šroubovice 30° spádu protíná čáru v dalších třech bodech; jich oskulační roviny protínají se v určitém bodě roviny Ω.

Symetrické úkony parametrů čtveřiny znějí

$$\mathfrak{g}_1 = -2\,t_0,\quad \mathfrak{g}_2 = -3\,(1 + t_0^2),\quad \mathfrak{g}_4 = t_0^2;$$

píšeme t za t_0 a užijeme rovnic (2^1):

$$x = -2\,c\,\frac{t^2+1}{2\,t},\quad y = -2\,c\,\frac{t^2-1}{2\,i\,t},\quad z = -2\sqrt{3}\,c\,\frac{1+t^2}{2\,t}$$

čili po zavedení úhlu φ $(t = e^{i\varphi})$

$$x = -2\,c\cos\varphi,\quad y = -2\,c\sin\varphi,\quad z = -2\,c\sqrt{3}\cos\varphi.$$

„Geometrické místo průseku oskulační roviny čáry Γ $(a = 2\,c)$ s oskulačními rovinami jejích zbývajících tří bodů na čáře jest ellipsa

$$x^2 + y^2 = a^2,\quad z = x\sqrt{3}.\text{“}$$

Pro průsečíky oskulační roviny bodu t_0 s čarou nalezli jsme

$$t_1 + t_2 + t_3 = -3\,t_0,\quad t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -3,\quad t_1 t_2 t_3 = t_0.$$

Realným bodům odpovídá paramétr t unimodulární; poněvadž součet komplexních veličin má modul menší než součet modulů sčítanců, nemohou veličiny t_ν vesměs míti modul 1, a tedy

„ze tří průseků roviny oskulační s křivkou Γ vždy dva jsou pomyslné“.

*

Rovnici naši

$$3\,t - t^3 = 3\,t_0\,t^2 - t_0$$

uveďme ve spojení s rovnicí pro půdorys čáry

$$x + i\,y = \frac{c}{2}\,(3\,t - t^3),\quad t = e^{i\varphi};$$

obdržíme

$$x + i\,y = -\frac{c}{2}\,t_0 + \frac{3\,c}{2}\,t_0\,t^2;$$

odtud plyne, že body nefroidy příslušné k parametrům $t_1 t_2 t_3$, t. j. půdorysy průseků čáry Γ s oskulační rovinou bodu t_0 leží na kruhu poloměru $\frac{3c}{2}$, se středem

(9)' $$x + iy = -\frac{c}{2} t_0 = -\frac{c}{2} e^{i\varphi_0}.$$

Body $t_1\, t_2\, t_3$ leží na oskulačním kruhu bodu t_0; ten se promítá do základní roviny v ellipsu, jejíž střed je půdorys S_1 středu křivosti, a jejíž jeden vrchol je půdorys bodu t_0; rovina oskulační Ω svírá se základní rovinou stálý úhel 30^0, a tedy polouosy ellipsy jsou v poměru $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Jeden z reálných průseků kruhu (9) posledně uvažovaného a ellipsy leží mimo půdorys čáry Γ, druhý podává půdorys realného průseku roviny Ω s čarou Γ. Zbývající dva pomyslné průseky kruhu a ellipsy jsou půdorysy pomyslných průseků roviny Ω s čarou Γ.

*

Průsečnice dvou rovin oskulačních nazývá se osa křivky. Aby se dvě osy (t_1, t_2), (t_3, t_4) protínaly, k tomu třeba, aby oskulační roviny bodů $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ procházely týmž bodem, tedy podmínka analytická zní $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$. Tu lze psáti

(10) $$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} + \frac{t_3 t_4 - 1}{t_3 + t_4} = 0,$$

a možno ji geometricky interpretovati pomocí bodů φ_ν na kruhu (c) příslušných k parametrům t_ν $(= e^{i\varphi_\nu})$. Přímky $\overline{\varphi_1\, \varphi_2}$ a $\overline{\varphi_3\, \varphi_4}$ protínají osu Oy v bodech souměrných vůči O.

Osy (t_1, t_2), které protínají pevnou osu a které tedy hoví rovnici $(\omega = konst)$

(10¹) $$\frac{t_1 t_2 - 1}{t_1 + t_2} = i \sin \omega \quad \text{čili} \quad \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \sin \omega,$$

tvoří plochu 2. stupně; mezi nimi jsou dvě tečny čáry Γ, a sice v bodech $\varphi = \omega$ a $\varphi = \pi - \omega$.

Aby se tečny v bodech t a u protínaly, máme dle (10) [pro $t_1 = t_2 = t$, $t_3 = t_4 = u$]

$$(t^2 - 1)\, u + (u^2 - 1)\, t = 0 \text{ čili } (t u - 1)\,(t + u) = 0.$$

t. j. danou tečnu (t) čáry Γ protínají tečny dvě; jich parametry jsou $-t$ a $\frac{1}{t}$, t. j. tečnu bodu φ protínají tečny bodů $\varphi + \pi$ a $-\varphi$, a žádné jiné. Tytéž tečny protínají také tečnu bodu $\pi - \varphi$. Tečny bodů φ a $-\varphi$ se protínají na nárysné hyperbole, tečny φ a $\varphi + \pi$ jsou vespolek rovnoběžny.

*

XXXIII.

Splynou-li hodnoty $t_1 t_2 t_3$, jeví se průsečík oskulačních rovin jako jejich bod dotykový s čarou. Rovnice $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_3$, píšeme-li $t_1 = t_2 = t_3 = t$, $t_4 = t_0$, podává

$$3\,t + t_0 = t^3 + 3\,t^2\,t_0\,;$$

tato rovnice vyjadřuje, že daným bodem t prochází jen jedna oskulační rovina, a sice jest její bod dotykový t_0. Pro dané t_0 máme tu rovnici, jíž hoví parametry tří průseků u čáry Γ s rovinou oskulační bodu t_0.

Pro dané t strojíme t_0 takto: Na kruhu (c) vedeme tečnu v bodě t; ta protne Oy v bodě σ; bod σ' s ním symetrický spojíme s bodem t; přímka $\sigma' t$ protíná kruh (c) v druhém bodě t_0, jemuž na čáře Γ odpovídá hledaný bod.

*

12. Z rovnice roviny oskulační sférické šroubovice ($a = 2\,c$)

$$x \cos 2\,\varphi + y \sin 2\,\varphi - z\sqrt{3} = 4\,c \cos \varphi$$

(počátek soustavy v bodě V) vychází hodnoty pro Plückerovy souřadnice roviny oskulační

$$(1) \qquad u = -\frac{\cos 2\,\varphi}{4\,c \cos \varphi}\,, \quad v = -\frac{\sin 2\,\varphi}{4\,c \cos \varphi}\,, \quad w = \frac{\sqrt{3}}{4\,c \cos \varphi}\,.$$

Rozvinutelná plocha tečen je charakterisována dvěma rovnicema, jež vyjdou po eliminaci φ:

$$(2) \qquad u^2 + v^2 - \frac{1}{3}\,w^2 = 0, \quad w^2 - u\,w\sqrt{3} - \frac{3}{8\,c^2} = 0.$$

Každá z nich representuje určitou čáru 2. třídy, a sice přísluší první rovnice úběžné křivce plochy kuželové

$$(2^a) \qquad x^2 + y^2 - 3\,z^2 = 0,$$

která je kužel doplňkový našeho základního kužele (polárního) (V, c). Jeho stopa na Oxy má poloměr $3\,c$.

Abychom určili druhou kuželosečku (2), znamenejme na okamžik

$$k = \frac{3}{8\,c^2}\,;$$

rovnici lze psáti

$$u = \frac{w^2 - k}{w\sqrt{3}}\,,$$

a po dosazení této hodnoty do rovnice roviny obalující bude tato zníti

$$(a) \qquad (w^2 - k)\,x + v\,w\sqrt{3}\,y + w^2\sqrt{3}\,z + w\sqrt{3} = 0.$$

Zde dlužno anulovati částečné derivace vůči w a v, t. j.

$$2\,w\,x + v\sqrt{3}\,y + 2\,w\sqrt{3}\,z + \sqrt{3} = 0,$$

$$w\sqrt{3}\,y = 0.$$

Druhá rovnice vyžaduje $y = 0$, načež se první redukuje na

$$2\,w\,(x + z\sqrt{3}) + \sqrt{3} = 0,$$

kdežto rovnice (a) se zjednoduší na

$$w^2\,(x + z\sqrt{3}) + w\sqrt{3} = k\,x\,;$$

z posledních těchto dvou rovnic pak nám eliminace w podá

(2[b]) $$x\,(x + z\sqrt{3}) + 2\,c^2 = 0,\ y = 0.$$

Druhá čára (2) je tedy hyperbola v rovině $O\,x\,z$. Je to dvojná čára plochy tečen sf. šroubovice Γ ($a = 2\,c$); střed hyperboly je bod V, její vrchol jest A, poloosy jsou a a $\frac{a}{\sqrt{3}}$; jedna asymptota jest osa $V\,z$, druhá asymptota je stopa oskulační roviny bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$; na hyperbole mimo to leží bod $x = 2\,c$ na $O\,x$.

Oskulační roviny čáry Γ zahalují nekonečně mnoho ploch druhé třídy; jich rovnice mají tvar

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{3}\,w^2 + \lambda\,(w^2 - u\,w\sqrt{3} - k) = 0, \quad \left(k = \frac{3}{8\,c^2}\right),$$

kde λ je libovolná stálá. Diskriminant této rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} & 0 & -\frac{1}{3} + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\,k \end{vmatrix} = \frac{3}{4}\,k\,\lambda\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2$$

vymizí mimo pro $\lambda = 0$ ještě jen pro $\lambda = \frac{2}{3}$. Tím obdržíme třetí kuželosečku na ploše tečen

(3) $$u^2 + v^2 + \frac{1}{3}\,w^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,u\,w - \frac{1}{a^2} = 0,$$

čili

(3*) $$\left(u - \frac{w}{\sqrt{3}}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{a^2}\,.$$

Abychom obdrželi rovnice v souřadnicích bodových, dlužno připojiti rovnici

a) $$u\,x + v\,y + w\,z + 1 = 0$$

a rovnice o differenciálech

$$\left(u-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)\left(d\,u-\frac{d\,w}{\sqrt{3}}\right)+v\,d\,v=0,$$
$$x\,d\,u+y\,d\,v+z\,d\,w=0.$$

Po eliminaci $d\,v$ musí tyto dvě rovnice býti identické vůči literám $d\,u$, $d\,w$, t. j.

$$v\,x-y\left(u-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)=0,$$

$$v\,z\sqrt{3}+y\left(u-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)=0,$$

což dává podmínku

$$x+z\,\sqrt{3}=0,$$

a dále

(*b*)
$$\frac{u-\frac{1}{\sqrt{3}}\,w}{x}=\frac{v}{y}=\alpha\,.$$

Rovnice (*a*) užitím prvního vztahu nabývá tvaru

$$x\left(u-\frac{w}{\sqrt{3}}\right)+v\,y+1=0\,,$$

z něhož po dosazení hodnot (*b*) vychází

$$\alpha\,(x^2+y^2)+1=0\,,$$

kdežto rovnice (3*) dává

$$a^2\,(x^2+y^2)=\frac{1}{a^2}\,.$$

Eliminací α vychází konečně vztah

$$x^2+y^2=a^2.$$

Oskulační roviny čáry Γ jsou tedy ještě tečnami ellipsy (počátek V)

(3ª)
$$x^2+y^2=a^2,\ x+z\,\sqrt{3}=0\,,$$

která pak leží na její ploše tečen. Parametrické vyjádření této čáry

(3ᵇ)
$$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=-\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\varphi$$

bylo již výše nalezeno. Rovina této kuželosečky je dvojná rovina oskulační $\varphi=\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\,\pi}{2}\,.$

„Rovina oskulační obsahuje bod φ této ellipsy (3ᵇ) a její tečnu.“

Dále je oskulační rovina rovnoběžna s tečnou rovinou kužele (2ª) vedenou podél přímky

$$\frac{x}{\cos 2\,\varphi}=\frac{y}{\sin 2\,\varphi}=z\,\sqrt{3}\,;$$

což ostatně je jen jiný tvar známé nám věty, že přímka Vm jest osou křivosti čáry Γ.

Stopy tečny ellipsy na válci (a) se bezprostředně určí a tak nám předešlá věta dává jednoduchou konstrukci stop roviny oskulační.

Z rovnic tečny vychází [(18) čl. 6.] parametrické vyjádření nárysné hyperboly

$$x = \frac{c}{\cos\varphi}, \quad z = -\frac{c}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Z rovnic těch je zřejmo, že část hyperboly příslušná k intervallu $-c < x < c$ je hluchá (parasite), t. j. není tvořena stopami tečen reálných.

*

Na základě parametrického vyjádření plochy tečen

$$(4) \qquad \left| \begin{aligned} x &= a\cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sqrt{3}\cos 2\varphi \\ y &= a\sin\varphi + \frac{\lambda}{2}\sqrt{3}\sin 2\varphi \\ z &= -\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\varphi + \frac{\lambda}{2}, \quad \text{(počátek } V), \end{aligned} \right.$$

určíme ještě průseky její s přímkou

$$x = mz + p, \quad y = nz + q.$$

Vložíme do těchto rovnic hodnoty (4) a vyloučíme λ; rovnici tak vzniklou

$$\begin{vmatrix} a\cos\varphi + \frac{am}{\sqrt{3}}\cos\varphi - p, & \sqrt{3}\cos 2\varphi - m \\ a\sin\varphi + \frac{an}{\sqrt{3}}\cos\varphi - q, & \sqrt{3}\sin 2\varphi - n \end{vmatrix} = 0$$

lze psáti

$$a\,n\cos 3\varphi - a\,m\sin 3\varphi - 2\sqrt{3}\,q\cos 2\varphi + 2\sqrt{3}\,p\sin 2\varphi -$$
$$- a(3m + 2\sqrt{3})\sin\varphi + 3an\cos\varphi - 2(pn - qm) = 0.$$

Po zavedení parametru $t = e^{i\varphi}$ přejde tato podmínka na tvar

$$(5) \qquad \left| \begin{aligned} & a(n + im)t^6 - 2\sqrt{3}(q + ip)t^5 + a(3n + 3im + 2i\sqrt{3})t^4 \\ & -4(pn - qm)t^3 + a(3n - 3im - 2i\sqrt{3})\,t^2 \\ & -2\sqrt{3}(q - ip)t + a(n - im) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pro symetrické úkony kořenů $\mathfrak{f}$, odtud vychází nejprvé

$$(n + im)\,\mathfrak{f}_2 = 3(n + im) + 2i\sqrt{3}$$
$$(n + im)\,\mathfrak{f}_4 = 3(n - im) - 2i\sqrt{3}$$
$$(n + im)\,\mathfrak{f}_6 = n - im,$$

takže vyjde

$$(5^a)\qquad \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_4 = 3\,\mathfrak{f}_6 + 3,\quad \mathfrak{f}_2 - 3 = \frac{2\,i\,\sqrt{3}}{n + i\,m}\,.$$

Dále nám identita

$$\begin{vmatrix} q + i\,p & n + i\,m \\ q - i\,p & n - i\,m \end{vmatrix} = 2\,i\,(p\,n - q\,m)$$

podá vztah

$$(5^b)\qquad \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_6 - \mathfrak{f}_5 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{f}_3\,(\mathfrak{f}_2 - 3)\,.$$

Podmínky (5^a) (5^b) charakterisují šestičlenné skupiny tečen čáry Γ mající společnou sečnu.

Zvolíme-li čtyři tečny, existují dvě přímky je protínající; zbývající dva průseky sečny s plochou tečen určují symetrické úkony $\mathfrak{h}_1 = t_5 + t_6$, $\mathfrak{h}_2 = t_5\,t_6$, a dosazením výrazů $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2, \ldots$ ($\mathfrak{g}_r$ jsou symetrické úkony čtveřiny dané) obdržíme z (5^a) a (5^b) dvě rovnice pro neznámé $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, z nichž jedna je stupně druhého, a které tedy mají dvě řešení, příslušná ke dvěma společným sečnám dané čtveřiny tečen.

Ve zvláštním případě, kdy přímka sekoucí je rovnoběžná s $O\,z$, máme $m = n = 0$, a rovnice (5) přejde v rovnici stupně 4.; souměrné úkony parametrů t hoví podmínkám $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0$, $\mathfrak{g}_2 = 0$.

V rovnicích (4) pišme μ za $\frac{\lambda}{2}\sqrt{3}$ ·

$$x = a\cos\varphi + \mu\cos 2\varphi,\quad y = a\sin\varphi + \mu\sin 2\varphi\,,$$
$$z\sqrt{3} = \mu - a\cos\varphi\,.$$

Z prvních dvou plyne

$$x^2 + y^2 = a^2 + \mu^2 + 2\,a\,\mu\cos\varphi\,,$$

tedy s použitím třetí rovnice

$$x^2 + y^2 = a^2 + \mu^2 + 2\,\mu\,(\mu - z\sqrt{3})\,,$$

t. j.

$$(\alpha)\qquad \mu^2 - 2\,\mu\,\frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{3}\,.$$

Rovnice

$$x = a\cos\varphi + 2\,\mu\cos^2\varphi - \mu$$

dává

$$(\beta)\qquad x = \frac{2\,\mu}{a^2}\,(\mu - z\sqrt{3})^2 - z\sqrt{3}\,;$$

dle (α) však

$$(\mu - z\sqrt{3})^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9\,z^2 - a^2}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}$$

a tedy (β) zní

$$x + z\sqrt{3} = -\frac{8\mu^2 z}{a^2\sqrt{3}} + 2\mu\frac{x^2 + y^2 + 9z^2 - a^2}{3a^2};$$

s použitím rovnice (α) to zní

$$(\gamma) \qquad 2\mu(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) = 3a^2 x + \frac{z}{\sqrt{3}}(8x^2 + 8y^2 + a^2).$$

Položme

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = S,$$

$$(x^2 + y^2 + 2c^2)z\sqrt{3} - \frac{z^3}{\sqrt{3}} + 6c^2 x = P,$$

i podá nám rovnice (γ)

$$\left(\mu - \frac{z}{\sqrt{3}}\right)S = P;$$

tu pak výraz

$$\mu\left(\mu - \frac{2z}{\sqrt{3}}\right)S^2 = \left(P + S\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\left(P - S\frac{z}{\sqrt{3}}\right)$$

má dle (α) hodnotu

$$\frac{x^2 + y^2 - a^2}{3}S^2,$$

a jeho srovnání s pravou stranou dává rovnici plochy tečen ve tvaru*)

$$(6) \qquad P^2 = \frac{1}{3}S^3 \quad (\text{počátek } V);$$

při tom $S = 0$, $P = 0$ jsou rovnice úvratnice Γ.

Plocha $P = 0$ je geometrické místo kruhů v rovinách $z = konst$, které protínají přímku $z + x\sqrt{3} = 0$, $y = 0$, a mají své středy na hyperbole $xz = -c^2\sqrt{3}$, $y = 0$. Na této ploše leží mimo to přímka Vy; roviny vedené nárysnou přímkou ji sekou v hyperbolách.

Povrchové kruhy přejdou v nullové v bodech A, A' ($\varphi = \pi$)

$$x = \pm c, \quad z = \mp c\sqrt{3},$$

jež leží na hyperbole středů a na přímce v nárysu.

Průseč plochy tečen s libovolnou plochou 2. stupně, která se dotýká základní koule (a) podél kruhu, rozpadá se ve dvě čáry stupně šestého, ležící na dvou různých plochách stupně třetího. Neboť rovnice uvažované plochy 2. stupně má tvar $S = L^2$, kde L je výraz lineární, a průseč této plochy s plochou (6) hoví jedné z rovnic

$$P = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}L^3.$$

*

*) A. Buffone, l. c.

Plochy 2. třídy naší ploše tečen vepsané

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{3} w^2 + \lambda (w^2 - u w \sqrt{3} - k) = 0 \quad \left(k = \frac{3}{8 c^2}\right)$$

mají společný střed v bodě V a rovinu $V x z$ za rovinu hlavní.

Pól příslušný k rovině $(u_0 v_0 w_0)$ má rovnici

$$u u_0 + v v_0 - \frac{1}{3} w w_0 + \lambda \left(w w_0 - \frac{u w_0 + w u_0}{2} \sqrt{3} - k\right) = 0,$$

a tedy u tečné roviny $u_0 v_0 w_0$ je dotykový bod

$$x = - \frac{u_0 - \frac{\lambda}{2}\sqrt{3}\, w_0}{k \lambda}, \quad y = - \frac{v_0}{k \lambda},$$

$$z = \frac{\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) w_0 + \frac{\lambda}{2}\sqrt{3}\, u_0}{k \lambda};$$

vložíme-li sem hodnoty (1) za u_0, v_0, w_0, obdržíme

$$x = \frac{2 c}{3} \frac{\frac{3}{2} \lambda + \cos 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi}, \quad y = \frac{2 c}{3} \frac{\sin 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi},$$

$$z = \frac{2 c}{3} \sqrt{3} \frac{\frac{1}{3} - \lambda - \frac{\lambda}{2} \cos 2 \varphi}{\lambda \cos \varphi},$$

jakožto parametrické vyjádření dotykové čáry plochy tečen sf. šroubovice s vepsanou plochou 2. třídy.

Výrazy budou o něco přehlednější při $\lambda = \frac{2}{3} \mu$:

(7⁰)
$$x = c \frac{\mu + \cos 2 \varphi}{\mu \cos \varphi}, \quad y = c \frac{\sin 2 \varphi}{\mu \cos \varphi},$$
$$z = \frac{c}{\sqrt{3}} \frac{1 - 2 \mu - \mu \cos 2 \varphi}{\mu \cos \varphi},$$

vepsaná plocha má rovnici

(7) $$u^2 + v^2 + \frac{2 \mu - 1}{3} w^2 - \frac{2 \mu}{\sqrt{3}} u w - \frac{\mu}{4 c^2} = 0.$$

Dotyková čára (7⁰) je racionální, 4. stupně, její nárys je hyperbola.

V souřadnicích bodových má tato plocha rovnici

(7*) $$(2 \mu - 1) \mu x^2 - \mu (\mu - 1)^2 y^2 + 3 \mu z^2 + 2 \mu^2 x z \sqrt{3} + (\mu - 1)^2 a^2 = 0,$$

takže vepsané plochy 2. stupně tvoří řadu stupně třetího.

Pro čáru dotykovou (7^0) nalezneme hravě rovnici hyperbolického válce, kterým se promítá do nárysny·

$$(x + z\sqrt{3})(\mu x + z\sqrt{3}) = \frac{(1-\mu)^3}{\mu^2} 2c^2.$$

Tato čára 4. stupně se čítá při stanovení průseče vepsané plochy (7*) s plochou tečen jako křivka stupně 8., a musí ještě býti křivka stupně 4. společná oběma plochám. Tato se skládá ze čtyř tečen příslušných k parametrům φ určeným rovnicí

$$\cos^2 \varphi = \frac{\mu - 1}{\mu},$$

jak bezprostředně vychází z rovnic (4) a (7*).

Na vepsané ploše (7*) druhého stupně tvoří tečny φ a $\pi - \varphi$ dvě přímky povrchové jedné soustavy, tečny $-\varphi$ a $\varphi + \pi$ pak dvě přímky soustavy druhé. Při tom jsou přímky druhého páru s přímkami prvními rovnoběžny (φ a $\varphi + \pi$, $\pi - \varphi$ a $-\varphi$), a vzaty v jiném pořádku je protínají (φ a $-\varphi$, $\varphi + \pi$ a $\pi - \varphi$) ve dvou bodech nárysné hyperboly.

Rovina určená rovnoběžnýma tečnama φ a $\varphi + \pi$ má rovnici (počátek V)

$$\text{č8)} \quad x(3\sin\varphi + \sin 3\varphi) - y(3\cos\varphi + \cos 3\varphi) + 2z\sqrt{3}\sin\varphi = 0$$

a prochází tedy středem V; je to rovina určená středem V a tečnou φ áry Γ. Rovina ta při proměnném φ obaluje kužel, kterým se čára Γ promítá ze středu V, a který jsme výše (čl. 7.) určili.

Tečny φ a $-\varphi$ protínají se v nárysně, rovina jimi určená je kolmá na Oxz a její rovnice splývá s rovnicí nárysu tečny:

$$9) \quad x - z\sqrt{3}\cos 2\varphi = 3c\cos\varphi + c\cos 3\varphi.$$

Plochy 2. stupně procházející uvažovanými přímkami tvoří svazek, v němž jedna plocha se rozpadá ve dvě roviny (8) (pro φ a $-\varphi$), jiná sestává ze dvou rovin (9) (pro φ a $\varphi + \pi$), t. j. svazek ploch uvažovaný má rovnici

$$(7^1) \quad \left| \begin{aligned} &(3x\sin\varphi + x\sin 3\varphi + 2z\sqrt{3}\sin\varphi)^2 - y^2(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2 \\ &- \nu\,[(x - z\sqrt{3}\cos 2\varphi)^2 - c^2(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2] = 0; \end{aligned} \right.$$

mezi těmito plochami, a sice pro $\mu = \frac{1}{\sin^2\varphi}$, nachází se naše vepsan plocha (7*). Porovnáme poměry součinitelů při y^2 se členem stálým:

$$\frac{(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2}{\mu(\mu - 1)^2} = \frac{c^2\nu(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)^2}{(\mu - 1)^2 a^2},$$

t. j. bude*)

$$\nu = \frac{4}{\mu} = 4\sin^2\varphi.$$

---

*) Přehlednější tvar této rovnice objeví se ve článku 13.

Délka hlavní polouosy na Vy obnáší $a \sin \varphi$; dáno-li φ, známe tak u vepsané plochy 2. stupně střed V, jeden vrchol (na Vy) a 4 přímky, čímž jest konstruktivně určena.

Hlavní řez plochy vepsané s rovinou Oxz je hyperbola, jejíž jedna asymptota je ve stopě roviny ellipsy, t. j. $x + z\sqrt{3} = 0$.

*

Oskulační rovina bodu A ($\varphi = 0$) má rovnici

$$x - z\sqrt{3} = 4c = 2a \quad (\text{počátek } V);$$

její průseč s plochou tečen odpovídá na základě rovnic (4) parametru

$$\frac{\lambda}{2}\sqrt{3} = -2a \frac{1 - \cos\varphi}{1 - \cos 2\varphi};$$

pro souřadnice průmětu vypočteme

$$x = 2c - 2c\cos^2\varphi \frac{1 - \cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad y = 2c \frac{(1 - \cos\varphi)^2}{\sin\varphi}.$$

Zavedeme-li parametr reálný

$$t = tg \frac{\varphi}{2},$$

obdržíme následující parametrické vyjádření průseče plochy tečen s oskulační rovinou bodu A (t. j. pro její průmět)·

$$(10) \qquad x - 2c = -c\frac{(1 - t^2)^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{4ct^3}{1 + t^2}.$$

Pro průsečíky této čáry s přímkou

$$A(x - 2c) + By + Cc = 0$$

nalezneme rovnici

$$-A(1 - 2t^2 + t^4) + 4Bt^3 + C(1 + t^2) = 0,$$

která stanoví jich parametry. Symetrické funkce parametrů hoví rovnicím

$$(11) \qquad \mathfrak{f}_3 = 0, \quad \mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_2 = 3,$$

které přímočaré čtveřiny naší křivky úplně charakterisují. Jinak vyjádřeno, tyto čtveřiny tvoří na křivce involuci 4. stupně o dvojí volnosti

$$(t^4 + 3) - \mathfrak{f}_1 t^3 + \mathfrak{f}_2 (t^2 + 1) = 0.$$

Tato má neutrální body dvojné $t_1 = t_2 = \pm i\sqrt{3}$, kterým přísluší úvratníky čáry

$$x = 10c, \quad y = \pm 6i\sqrt{3}\,c.$$

Podobně $t = 0$ (bod A) podává úvratní bod čáry, což ostatně zřejmo z rovnic

$$x - c = k_1 t^2 + k_2 t^4 + \dots$$
$$y = l_1 t^3 + l_2 t^5 + \dots$$

platných pro malá t.

5*

Tečna uvažovaného řezu je průseč jeho roviny s rovinou oskulační

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - z\sqrt{3} = 4c\cos\varphi;$$

s použitím rovnice roviny

$$x - z\sqrt{3} = 4c$$

obdržíme pro průmět tečny

(12) $$x(1-\cos 2\varphi) - y\sin 2\varphi = 4c(1-\cos\varphi),$$

což při parametru $t = tg\,\frac{\varphi}{2}$ zní

(12ᵃ) $$2tx - (1-t^2)y = 2ct(1+t^2),$$

takže čára je třetí třídy.

Tečny vedené z téhož bodu hoví rovnici

$$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0 \quad (\mathfrak{g}_1 = t_1 + t_2 + t_3,\ \mathfrak{g}_3 = t_1 t_2 t_3).$$

Dotykové body budou ležeti na přímce, lze-li určiti veličinu t tak, aby pro čtveřinu $t_1\,t_2\,t_3\,t$ platily rovnice (11), t. j.

(α) $$\mathfrak{g}_3 + t\,\mathfrak{g}_2 = 0,\ \mathfrak{g}_3 t = 3 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 t;$$

vyloučením t vychází pro hledané skupiny podmínka

$$\mathfrak{g}_3^2 + 3\,\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_2^2 - \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{g}_3 = 0 \text{ čili } 2\,\mathfrak{g}_1^2 + 3\,\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_2^2 = 0.$$

Vložíme-li sem hodnoty z (12ᵃ) plynoucí

$$\mathfrak{g}_1 = \frac{y}{2c},\ \mathfrak{g}_2 = \frac{c-x}{c},$$

— kde (x, y) je průsečík tečen — obdržíme rovnici

(13) $$2(x-c)^2 + y^2 = 6c(x-c),$$

která charakterisuje ellipsu, z jejíchž bodů vycházejí k čáře (10) tečny dotýkající se čáry ve třech bodech na přímce.

Přímková čtveřina $(\mathfrak{f}_r)$ určuje koefficienty v rovnici přímky vztahy

$$A\,\mathfrak{f}_1 = 4B,\ A(2+\mathfrak{f}_2) = -C,$$

t. j. přímka má rovnici

(14) $$x + \frac{1}{4}\mathfrak{f}_1 y - (\mathfrak{f}_2 + 4)c = 0.$$

V našem případě jest

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{g}_1 + t,\ \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_1 t,$$

a podmínky (α) vzhledem ke splněné podmínce $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_3 = 0$ dávají

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 t,\ 3 + \mathfrak{g}_2 + 2\,\mathfrak{g}_1 t = 0,$$

t. j.

$$\mathfrak{g}_2 = \frac{-3}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{g}_1 = \frac{-3t}{1+2t^2}\,,$$

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{2t^3-2t}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{f}_2 = -\frac{3(1+t^2)}{1+2t^2}\,.$$

Dosazením hodnot těchto

$$\mathfrak{f}_1 = \frac{2(t^3-t)}{1+2t^2}\,,\quad \mathfrak{f}_2 + 4 = \frac{1+5t^2}{1+2t^2}$$

do rovnice (14) nacházíme pro přímku obsahující tři dotykové body tečen o společném průseku

(15) $$2x(1+2t^2) + y(t^3-t) = 2c(1+5t^2)\,.$$

Přímka ta obaluje tedy rovněž čáru 3. třídy; je-li znám její čtvrtý průsek t s křivkou, stanoví se přímka konstruktivně na základě očividné okolnosti, že prochází bodem

$$x = 2c,\ y = \frac{2c}{t} = 2c\,cotg\,\frac{\varphi}{2}\,.$$

Pro parametry tří přímek (15) procházejících společným bodem platí vztah

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 + 1 = 0\,.$$

Konstrukce přímek těch je snadno proveditelna a sice kvadratická, leží-li bod buď na čáře (10) aneb na přímce $x = 2c$.

Rovnici tečny (12) možno psáti

$$x\sin\varphi - y\cos\varphi = 2c\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,;$$

pata kolmice spuštěné z bodu O na tuto přímku má polární souřadnice

$$\varrho = 2c\,tg\,\frac{\varphi}{2}\,,\quad \omega = \varphi - \frac{\pi}{2}\,;$$

přeložíme-li polární osu do záporného směru osy $O\,y$, bude (pro pól O) polární rovnice úpatnice průmětu uvažovaného řezu zníti

$$\varrho = 2c\,tg\,\frac{\Theta}{2} = a\,\frac{1-\cos\Theta}{\sin\Theta}\,,\quad \Theta = \varphi.$$

Tato úpatnice je tedy přímá strofoida, kterou na základě posledního vzorce strojíme tak, že na libovolný paprsek svazku O naneseme od jeho průseku K s přímkou $x = a$ délku KP rovnou pořadnici bodu K.

Máme tedy výsledek tento·

„Oskulační rovina sférické šroubovice Γ ($a = 2c$) v bodě A protíná její plochu tečen v racionální čáře 4. stupně 3. třídy, jejíž půdorys je protiúpatnice přímé strofoidy.

*

XXXIII.

Uvažujme nyní průseč plochy tečen s oskulační rovinou bodu $\varphi = \vartheta$. Průseč oskulačních rovin (ϑ) a libovolné jiné (φ)

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - z\sqrt{3} = 4c \cos \varphi,$$
$$x \cos 2\vartheta + y \sin 2\vartheta - z\sqrt{3} = 4c \cos \vartheta$$

má půdorys daný rovnicí

$$(16) \qquad x \sin (\varphi + \qquad - y \cos (\varphi + \vartheta) = a \frac{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}}{\cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}}.$$

kterážto přímka je tečnou půdorysu hledaného řezu. Uvažujme úpatnici této čáry z pólu O; její polární souřadnice mají hodnoty

$$(17) \qquad \varrho = a \frac{\sin \frac{\varphi + \vartheta}{2}}{\cos \frac{\varphi - \vartheta}{2}}, \quad \omega = \varphi + \vartheta - \frac{\pi}{2}.$$

Položíme-li $\Theta = \omega + \frac{\pi}{2}$, měníce osu, máme polární rovnici

$$\varrho = a \frac{\sin \frac{\Theta}{2}}{\cos \left(\frac{\Theta}{2} - \vartheta\right)} = a \frac{\cos \vartheta - \cos (\Theta - \vartheta)}{\sin (\Theta - 2\vartheta)};$$

dvojná rovina oskulační $\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ poskytne patrně dvojný bod úpatnice; souřadnice dvojného bodu úpatnice budou

$$\Theta = \frac{\pi}{2} + \vartheta, \quad \varrho = a.$$

Otočme nyní polární osu do polohy $\Theta = 2\vartheta$, kladouce nový polární úhel $= \psi = \Theta - 2\vartheta$; bod dvojný má souřadnice

$$\varrho = a, \quad \psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta,$$

rovnice čáry zní

$$(17^a) \qquad \varrho = a \frac{\cos \vartheta - \cos (\psi + \vartheta)}{\sin \psi}.$$

Znamenejme $\vartheta' = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, rovnici ($17^a$) lze pak psáti

$$\varrho = \frac{a \cos \vartheta}{\sin \psi} - \frac{a \sin (\vartheta' - \psi)}{\sin \psi}.$$

Veďme vektor OB směru $\psi = \frac{\pi}{2}$, délky $\overline{OB} = a \cos \vartheta$, dále vektor $\overline{OC} = a$ směru $\psi = \vartheta'$, takže BC stojí kolmo na OB.

Přímka BC protíná libovolný paprsek $\psi \equiv OK$ v bodě K; v trojúhelníku OCK máme strany $OC = a$, CK s protilehlými úhly ψ a $\vartheta' - \psi$, takže

$$\frac{a \sin(\vartheta' - \psi)}{\sin \psi} = CK,$$

mimo to jest $OK = \dfrac{a \cos \vartheta}{\sin \psi}$; bod P úpatnice ležící na průvodiči OK tedy je stanoven rovnicí

$$OP = \varrho = OK - CK,$$

což jest známá konstrukce strofoidy s řídící přímkou BC, hlavním bodem O a dvojným bodem C.

Vůči původním osám Ox, Oy je poloha bodu dvojného

$$(C) \qquad \varrho = a, \ \omega = \vartheta,$$

přímka OB má polohu $\omega = 2\vartheta$, rovnice řídící přímky BC je tedy

$$(18) \qquad x \cos 2\vartheta + y \sin 2\vartheta = a \cos \vartheta;$$

řídící přímky těchto strofoid obalují nefroidu

$$(18^a) \qquad x + iy = \frac{c}{2}(3 + e^{2i\vartheta})\, e^{i\vartheta},$$

shodnou s nefroidou Γ_1, otočenou o 90^0, která je tedy homothetická se střední epicykloidou.

Promítneme tedy do Oxy stopu oskulační roviny bodu $\varphi = \vartheta$ (roviny řezu) na rovině střední Vxy, a vedeme přímku, jež půlí průvodiče průmětu; tato přímka jest řídící přímkou strofoidy.

Tečny strofoidy ve dvojném bodě mají směr $\psi = \dfrac{\vartheta'}{2}, \dfrac{\vartheta'}{2} + \dfrac{\pi}{2}$, a ježto $\omega = \psi + 2\vartheta - \dfrac{\pi}{2}$, má normála jedné z tečen směr $\omega = \vartheta - \dfrac{\vartheta'}{2}$, rovnice tečny má tvar

$$x \cos\left(\vartheta - \frac{\vartheta'}{2}\right) + y \sin\left(\vartheta - \frac{\vartheta'}{2}\right) = konst;$$

konstantu určíme z podmínky, aby přímka procházela bodem dvojným

$$x = a \cos \vartheta, \ y = a \sin \vartheta;$$

tak vyjde jako rovnice tečny v bodě dvojném

$$x \cos\left(\frac{3\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + y \sin\left(\frac{3\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = a \cos\left(\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Klademe-li $\dfrac{\vartheta}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \alpha$, můžeme tuto rovnici psáti

$$x \cos 3\alpha + y \sin 3\alpha = -a \sin \alpha;$$

XXXIII.

přímka ta je tečnou kardioidy

$$x + i\,y = -\frac{i\,a}{3}\,(2 - e^{2\,i\,\alpha})\,e^{2\,i\,\alpha},\ 2\,\alpha = \vartheta + \frac{\pi}{2}\,,$$

kdežto druhá tečna ve dvojném bodě strofoidy obaluje kardioidu

$$x + i\,y = \frac{i\,a}{3}\,(2 - e^{2\,i\,\alpha})\,e^{2\,i\,\alpha},\ 2\,\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}\,.$$

Hlavní výsledek těchto úvah lze vysloviti větou:

„Plocha tečen sférické šroubovice 30^0 spádu je proťata libovolnou svojí tečnou rovinou v čáře 4. stupně a 3. třídy, která se do základní roviny promítá v protiúpatnici strofoidy, vzaté z pólu O."

Základní prvky strofoidy byly v předcházejících řádcích podrobně uvedeny.

*

13. Obraťme se nyní k osám šroubové čáry Γ $(a = 2\,c)$, t. j. průsečnicím dvou rovin oskulačních; počátek souřadnic je veskrze V.

Oskulační roviny φ a φ'

$$(0)\qquad \begin{aligned} x\cos 2\,\varphi + y\sin 2\,\varphi - z\sqrt{3} &= 4\,c\cos\varphi,\\ x\cos 2\,\varphi' + y\sin 2\,\varphi' - z\sqrt{3} &= 4\,c\cos\varphi' \end{aligned}$$

stanoví osu, jejíž průmět má rovnici

$$(1)\qquad x\sin(\varphi + \varphi') - y\cos(\varphi + \varphi') = 2\,c\,\frac{\sin\dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}}\,;$$

položíme

$$(2)\qquad \sin\omega = \frac{\sin\dfrac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos\dfrac{\varphi - \varphi'}{2}}\,,$$

načež rovnice průmětu osy $(\varphi,\ \varphi')$ zní

$$(1^*)\qquad x\sin(\varphi + \varphi') - y\cos(\varphi + \varphi') = 2\,c\sin\omega.$$

Podmínka, aby se dvě osy $(\varphi_1\,\varphi_2)$, $(\varphi_3\,\varphi_4)$ protínaly, zněla při označení $u_\nu = e^{i\,\varphi_\nu}$

$$\frac{u_1\,u_2 - 1}{u_1 + u_2} + \frac{u_3\,u_4 - 1}{u_3 + u_4} = 0\,,$$

a ta se přepíše na

$$\sin\omega + \sin\omega' = 0;\ \sin\omega = \frac{\sin\dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}\,,$$

Z rovnic v tomto případě současně platných

$$x \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - y \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 2c \sin \omega,$$
$$x \sin(\varphi_3 + \varphi_4) - y \cos(\varphi_3 + \varphi_4) = -2c \sin \omega$$

plyne sečtením

$$(\alpha) \qquad x \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} - y \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}{2} = 0.$$

Rovnici

$$\frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}}{\cos \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{2}} = 0$$

lze psáti

$$\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_4}{2} + \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_4 - \varphi_3}{2}$$
$$+ \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_1}{2} = 0.$$

Při označení

$$2\sigma = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

vyjadřuje se tedy podmínka, aby osy $(\varphi_1 \varphi_2)$, $(\varphi_3 \varphi_4)$ náležely společné rovině, vzorcem

$$(3) \qquad \sin(\sigma - \varphi_1) + \sin(\sigma - \varphi_2) + \sin(\sigma - \varphi_3) + \sin(\sigma - \varphi_4) = 0,$$

a pro souřadnice průsečíku platí

$$(4) \qquad \frac{y}{x} = tg\, \sigma.$$

Buďtež $x_0\, y_0\, z_0$ souřadnice bodu na ose (φ, φ'), jímž prochází společná kolmice této osy a přímky Oz (která měří jich nejkratší vzdálenost); pak půdorysem nejkratší vzdálenosti je kolmice spuštěná z počátku (0, 0) na průmět osy (φ, φ') a bude dle (1*)

$$x_0 = 2c \sin \omega \sin(\varphi + \varphi'), \quad y_0 = -2c \sin \omega \cos(\varphi + \varphi'),$$

načež vyjde

$$z_0 \sqrt{3} = 2c \sin \omega \sin(\varphi' - \varphi) - 4c \cos \varphi = -2c(\cos \varphi + \cos \varphi').$$

Máme tak soustavu rovnic

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} x_0 = 2c \sin \omega \sin(\varphi + \varphi'), \quad y_0 = -2c \sin \omega \cos(\varphi + \varphi'), \\[2ex] z_0 = -\dfrac{2c}{\sqrt{3}}(\cos \varphi + \cos \varphi'); \quad \sin \omega = \dfrac{\sin \frac{\varphi + \varphi'}{2}}{\cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}}. \end{array} \right.$$

Poněvadž tu

$$z_0 = -\frac{4c}{\sqrt{3}} \cos\frac{\varphi+\varphi'}{2} \cos\frac{\varphi-\varphi'}{2},$$

máme

$$\frac{x_0}{z_0} = -\sqrt{3} \sin\omega \frac{\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}},$$

t. j.

(5⁰) $$\frac{x_0}{z_0} = -\sqrt{3} \sin^2\omega.$$

Stálé hodnotě ω odpovídají osy protínající určitou osu pevnou a takové tvoří hyperboloid; opsaný válec směru Oz stanoví na něm dotykovou čáru, jejíž body mají od osy Oz vzdálenost minimalní; je to čára bodů $x_0 y_0 z_0$; z rovnice (5^0) a (5) plyne, že čára ta leží na rovině kolmé na nárysnu

$$x_0 + z_0 \sqrt{3} \sin^2\omega = 0,$$

a na kruhovém válci

$$x_0^2 + y_0^2 = 4c^2 \sin^2\omega.$$

Osa (φ, φ') obsahuje bod $(x_0 y_0 z_0)$ (5) a hoví rovnici (1); nalezneme pro ni parametrické vyjádření

(6) $$\begin{aligned} x &= x_0 + v\cos(\varphi+\varphi') \\ y &= y_0 + v\sin(\varphi+\varphi') \\ z &= z_0 + \frac{v}{\sqrt{3}}\cos(\varphi-\varphi'), \end{aligned}$$

kde v určuje polohu bodu na ose.

Odtud vypočteme

(7) $$x + z\sqrt{3}\sin^2\omega = v\cos^2\omega,$$

(8) $$x^2 + y^2 = 4c^2\sin^2\omega + v^2;$$

čáry $v =$ ***konst*** na hyperboloidu $\omega =$ ***konst*** jsou tedy ellipsy na kruhových válcích směru Oz.

Vyloučením ω plyne z posledních dvou rovnic

(9) $$4c^2 x + (z\sqrt{3} + v)(x^2 + y^2 - v^2) = 4c^2 v;$$

tedy body $v =$ ***konst*** na různých osách naplňují plochu stupně třetího; pro $v = 0$ zvláště máme plochu 3. stupně

(9⁰) $$(x^2 + y^2) z + \frac{4c^2}{\sqrt{3}} x = 0,$$

která je souhrn bodů, jež na osách čáry Γ zaujímají polohu nejbližší k ose Oz. Možno ji bráti za souhrn ellips, podél nichž se různé hyperboloidy

$\omega = konst$ dotýkají vepsaných kruhových válců. Tyto ellipsy leží na rovinách $\frac{x}{z} = konst$; roviny $z = konst$ protínají plochu v kruzích.

Vyloučíme-li z rovnic (7) a (8) literu v, vznikne rovnice hyperboloidu $\omega = konst$

$$(10) \qquad (x + z\sqrt{3}\, sin^2\omega)^2 = cos^4\omega\, (x^2 + y^2 - 4\, c^2\, sin^2\omega).$$

Toť tedy rovnice hyperboloidu os čáry Γ, které protínají tečnu $\varphi = -\omega$; druhá řada os jsou přímky druhé soustavy a protínají tečnu $\varphi = \omega$.

Vedle os hovících podmínce

$$\frac{sin\,\frac{\varphi + \varphi'}{2}}{cos\,\frac{\varphi - \varphi'}{2}} + \frac{sin\,\frac{\varphi'' + \varphi'''}{2}}{cos\,\frac{\varphi'' - \varphi'''}{2}} = 0$$

protínají se také osy (φ, φ'), (φ'', φ'''), které leží na společné rovině oskulační, na př. $\varphi''' = \varphi'$; takové nazveme osami komplanárními.

Libovolná osa (φ_1, φ_2) protne plochu (10) ve dvou bodech, jimiž procházejí 4 osy, povrchové to přímky hyperboloidu; dvě z nich leží na oskulační rovině φ_1, druhé dvě na oskulační rovině φ_2.

Parametry bodů u, u', jichž oskulační roviny stanoví osu na hyperboloidu $(\pm\,\omega)$, hoví rovnici

$$(\alpha) \qquad \frac{u\,u' - 1}{u + u'} = i\, sin\,\omega, \text{ resp. } - i\, sin\,\omega.$$

Na druhém hyperboloidu $(\pm\,\omega_1)$ máme pak osy (u_1, u_1')

$$(\beta) \qquad \frac{u_1\,u_1' - 1}{u_1 + u_1'} = i\, sin\,\omega_1, \text{ resp. } - i\, sin\,\omega_1;$$

uvažujme na něm pouze přímky jedné soustavy (ω_1). V průsečném bodě hyperboloidů platí $u_1' = u'$, kde u' hoví jedné z podmínek (α) a první podmínce (β). Můžeme však se omeziti na průseky pouze řady (ω) s řadou (ω_1), poněvadž druhé řady dávají tytéž body.

Zvolíme-li u' za neodvisle proměnnou, obdržíme u, u_1 z rovnic (α) a (β), načež průsek osy (u, u_1) s oskulační rovinou u' je hledaný bod průsečné čáry. Tak obdržíme souřadnice na průsečnici hyperboloidů (ω) a (ω_1) vyjádřeny jako racionálné funkce u'.

Z rovnic typu (10) pro ω a ω_1 obdržíme však přímo, dělíme-li $cos^4\,\omega$, a odečteme rovnice tak vzniklé:

$$(x + z\sqrt{3}) \left(x + z\sqrt{3} + \frac{2\,x}{tg^2\,\omega + tg^2\,\omega_1} \right) = - \frac{4\,c^2\,cos^2\,\omega\, cos^2\,\omega_1}{tg^2\,\omega + tg^2\,\omega_1},$$

což jest rovnice hyperbolického válce, který prochází průsečnicí obou hyperboloidů. Jedna jeho rovina asymptotická je dvojná rovina oskulační $x + z\sqrt{3} = 0$, a jeho osa jest Vy.

Střed hyperboloidu (10) je V a jedna jeho osa jest Vy, s vrcholy $y = \pm 2c \sin\omega$; tečné roviny v těchto vrcholech protínají plochu jeho ve dvou přímkách ležících každá na jedné z rovin

$$x + z\sqrt{3} = 0,\quad x + z\sqrt{3}\,\frac{\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega} = 0\,.$$

Rovina $x = 2\varepsilon c \sin\omega$ $(\varepsilon = \pm 1)$ protíná hyperboloid v přímkách $x + z\sqrt{3}\sin^2\omega = \pm y$ a dotýká se ho v bodě $y = 0$, $x + z\sqrt{3}\sin^2\omega = 0$, jenž leží na dotykové čáře s vepsaným kruhovým válcem směru Oz.

Hlavní řez ellipsoidu (10) má rovnici

$$y = 0,\ (x + z\sqrt{3})\left(x + z\sqrt{3}\,\frac{\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega}\right) - 4c^2\,\frac{\cos^4\omega}{1+\cos^2\omega}$$

a je tedy hyperbolou, jejíž jedna asymptota je

$$x + z\sqrt{3} = 0$$

společná s hyperbolou nárysnou plochy tečen.

Pro polohu os této hyperboly nám elementární vzorec podává

$$tg\,2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\cos 2\omega}$$

značí-li α úhel, jejž osa hyperboly svírá s přímkou Ox.

*

V případě, kdy úhel ω není realný, t. j. kdy na hyperboloidu neleží realných tečen čáry Γ, nám definice

$$\sin\omega = \frac{\sin\dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}{\cos\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}$$

podá trigonometrické funkce úhlu ω, rovněž graficky přístupné. Na kruhu (c) uvažujme body φ_1, φ_2 jak obvykle, jich spojivá přímka prochází pevným bodem σ na Oy. Tímto bodem σ vedeme rovnoběžku s Ox, která protne kruh (c) v realných bodech φ_1, φ_2, poněvadž σ jest jeho bod vnitřní. Pro tyto zvláštní body máme

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2}\,,\quad \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \vartheta\,,$$

značí-li ϑ úhel mezi směry $O\varphi_1$ a Oy; vyjde tedy

$$\sin\omega = \sec\vartheta\,,$$

načež se funkce úhlu ω vyjádří snadno funkcemi realného úhlu ϑ a tím se stanou konstrukce jednoduše provednými.

Abychom určili stopu osy (φ, φ') na dvojné rovině oskulační, vložme do rovnic (0) hodnotu $z\sqrt{3} = -x$; výsledky se zkrátí $\cos\varphi$, $\cos\varphi'$ a zbude

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 2c$$
$$x\cos\varphi' + y\sin\varphi' = 2c\,,$$

z čehož řešením plynou souřadnice stopy

$$y = 2c\sin\omega,\ x = 2c\frac{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}\,;\ \frac{y}{x} = tg\,\frac{\varphi+\varphi'}{2}\,. \tag{11}$$

Viděli jsme ostatně již výše, že dvojná rovina obsahuje dvě přímky hyperboloidu (ω), a že tyto leží na rovinách $y = \pm 2c\sin\omega$.

Tečna $t_{\prime\prime}$ šroubové čáry Γ v bodě φ, v němž $\sin\varphi \neq \pm\sin\omega$, protíná jen ty povrchové přímky hyperboloidu (10), které jsou komplanární osy s tečnou $t_{\prime\prime}$, t. j. které leží na oskulační rovině Ω bodu φ. Tato rovina obsahuje přímku hyperboloidu, jest jeho tečnou rovinou a současně se dotýká rozvinutelné plochy; pohybuje-li se zůstávajíc tečnou rovinou plochy, opíše její dotykový bod s hyperboloidem na tomto jistou křivku. Rozvinutelná plocha je pak obalovou plochou tečných rovin v bodech řečené křivky, a tato plocha rozvinutelná musí tuto křivku obsahovati. Náš hyperboloid (10) je tedy plocha 2. stupně vepsaná ploše tečen, jaké jsme uvažovali v čl. 12. Máme tak výsledek·

„Plochy 2. stupně vepsané ploše tečen šroubové čáry Γ $(a = 2c)$ jsou hyperboloidy, jichž obě soustavy přímek jsou osami čáry Γ."

Leží na nich čtvero tečen této čáry.

Rovnice (10) není než přehledněji psaná rovnice (7^1) čl. 12 pro hodnotu $\omega = \varphi$.

*

Osy čáry Γ tvoří kongruenci. Rovina, která není oskulační pro křivku Γ, nemůže obsahovati více než dvé přímek této kongruence; tyto by nebyly komplanární, a přímky p_2, p_3 protínajíce tutéž osu p_1 by náležely téže řadě na hyperboloidu, což vyloučeno.

„Oskulační roviny čáry Γ obsahují nekonečně mnoho přímek kongruence os, jiné roviny obsahují takové přímky dvě, a sice jsou to povrchové přímky na vepsaném hyperboloidu, který se roviny dotýká."

Jsou-li u, v, w Plückerovy souřadnice roviny, můžeme snadno udati hyperboloid, který se jí dotýká, a příslušný parametr ω. V rovnici (7) čl. 12. značí μ hodnotu

$$\mu = \frac{1}{\sin^2\omega}\,,$$

a pro tuto hodnotu je splněna rovnice (7) čl. 12. souřadnicemi roviny; bude tedy

$$sin^2 \omega = \frac{2}{3} \frac{\frac{3}{8c^2} + uw\sqrt{3} - w^2}{u^2 + v^2 - \frac{1}{3}w^2}.$$

Dotykový bod plochy vepsané s rovinou (u, v, w) má rovnici

$$U\left(u - \frac{\mu}{\sqrt{3}} w\right) + Vv + W\left(-\frac{\mu}{\sqrt{3}} u + \frac{2\mu - 1}{3} w\right) = \frac{\mu}{4c^2};$$

jím procházejí hledané přímky kongruence, ležící na rovině (u, v, w).

Daným bodem prochází obecně šest os, jež jsou průsečnice šesti párů, v něž se druží 4 roviny oskulační vedené oním bodem.

Buď p libovolná osa čáry Γ, Ω jedna z obou rovin oskulačních, které jí procházejí; rovina Ω seče plochu tečen v čáře 3. třídy (Ω), která se musí dotýkati přímky p; tečna p' v soumezném bodě této čáry protíná p, a je tedy dotykový bod přímky p s čarou (Ω) ohniskem kongruence; totéž platí o druhé oskulační rovině procházející přímkou p.

„Osy čáry Γ dotýkají se plochy tečen ve dvou bodech (určených řezy s oběma rovinama oskulačníma, jež příslušnou osu stanoví), které jsou ohnisky kongruence.“

„Rozvinutelné plochy tvořené z přímek kongruence os pozůstávají z oskulačních rovin čáry Γ.“

*

Směrné kosinusy osy (φ, φ') jsou úměrny veličinám

$$cos(\varphi + \varphi'), \ sin(\varphi + \varphi'), \frac{1}{\sqrt{3}} cos(\varphi - \varphi');$$

podmínka, aby dvě osy $(\varphi_1 \varphi_2)$ a $(\varphi_3 \varphi_4)$ stály na sobě kolmo, zní tedy

$$cos(\varphi_1 + \varphi_2) cos(\varphi_3 + \varphi_4) + sin(\varphi_1 + \varphi_2) sin(\varphi_3 + \varphi_4)$$
$$+ \frac{1}{3} cos(\varphi_1 - \varphi_2) cos(\varphi_3 - \varphi_4) = 0,$$

čili

(12¹) $$6 cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \varphi_4) + cos(\varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 - \varphi_4) + cos(\varphi_1 + \varphi_4 - \varphi_2 - \varphi_3) = 0.$$

V parametrech $u = e^{i\varphi}$ se to vyjádří rovnicí

(12²) $$6(u_1^2 u_2^2 + u_3^2 u_4^2) + (u_1^2 + u_2^2)(u_3^2 + u_4^2) = 0;$$

znamenejme $u_\nu^2 = v_\nu$, takže v_ν je paramétr opěrného bodu m_ν (stopy osy křivosti), i bude tato podmínka zníti

(12³) $$6(v_1 v_2 + v_3 v_4) + (v_1 + v_2)(v_3 + v_4) = 0.$$

Přímka $\overline{v_1 v_2}$, která spojuje body v_1, v_2 na kruhu (c), měj rovnic

$$\mathfrak{A}\, x + \mathfrak{B}\, y + \mathfrak{C} = 0;$$

snadno shledáme, že platí vztahy

$$v_1 + v_2 = -\frac{2\,\mathfrak{C}}{c\,(\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B})}\,, \quad v_1 v_2 = \frac{\mathfrak{A} + i\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B}}\,; \tag{13}$$

podobné vztahy jsou pro koefficienty rovnice tětivy $v_3 v_4$

$$\mathfrak{A}'\, x + \mathfrak{B}'\, y + \mathfrak{C}' = 0,$$

a rovnice (12^3) se tak přepíše na

$$6\left(\frac{\mathfrak{A} + i\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B}} + \frac{\mathfrak{A}' + i\,\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}' - i\,\mathfrak{B}'}\right) + \frac{4\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'}{c^2\,(\mathfrak{A} - i\,\mathfrak{B})\,(\mathfrak{A}' - i\,\mathfrak{B}')} = 0$$

čili

$$3\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}\,\mathfrak{B}') + \frac{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'}{c^2} = 0\,. \tag{14}$$

Hodnotě v odpovídají dvě hodnoty u, tedy dvojici (v_1, v_2) přísluší čtyři osy čáry Γ, vespolek rovnoběžné; rovnice (14) vyjadřuje podmínku, aby dvě čtveřiny os byly na sobě kolmy.

Rovnice (14) ukazuje, že přímky $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{C}'$ jsou spolu harmonicky sdruženy vůči kuželosečce

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \frac{\mathfrak{C}^2}{3\,c^2} = 0\,, \tag{15}$$

která je kruh pomyslného poloměru

$$x^2 + y^2 + 3\,c^2 = 0\,. \tag{15*}$$

Takto je každé ose (čtveřině os) čáry Γ přiřazena tětiva kruhu (c), spojující stopy os křivosti příslušných k rovinám oskulačním osu určujícím; dvě osy čáry Γ jsou pak na sobě kolmy, jsou-li representační tětivy harmonicky sdruženy vůči kruhu (15).

Necháme-li osu $(u_3\, u_4)$ pevnou, probíhají representační tětivy $\overline{v_1 v_2}$ svazek, jehož střed je pól tětivy $\overline{v_3 v_4}$ vůči kruhu (15), body v_1, v_2 tedy tvoří involuci, a odpovídá jim involuce čtveřin os čáry Γ.

Převeďme náš výsledek na parametry u_ν; buďte rovnice tětiv

$\overline{u_1 u_2}$ $\qquad A\,x + B\,y + C = 0\,,$

$\overline{u_3 u_4}$ $\qquad A'\,x + B'\,y + C' = 0;$

pak bude dle (13)

$$u_1^2 + u_2^2 = (u_1 + u_2)^2 - 2\,u_1\,u_2 = \frac{4\,C^2}{c^2\,(A - i\,B)^2} - 2\,\frac{A^2 + B^2}{(A - i\,B)^2}$$

t. j.

$$u_1^2 + u_2^2 = \frac{2}{c^2}\,\frac{2\,C^2 - c^2\,(A^2 + B^2)}{(A - i\,B)^2}\,;$$

rovnice (12^2) pak zní

$$6\left[\left(\frac{A+iB}{A-iB}\right)^2+\left(\frac{A'+iB'}{A'-iB'}\right)^2\right]$$

$$+\frac{4}{c^4}\,\frac{2C^2-c^2(A^2+B^2)}{(A-iB)^2}\cdot\frac{2C'^2-c^2(A'^2+B'^2)}{(A'-iB')^2}=0$$

čili po úpravě

$$(16)\qquad (A^2-B^2)(A'^2-B'^2)+4ABA'B'$$

$$+\frac{1}{3}\left(A^2+B^2-\frac{2C^2}{c^2}\right)\left(A'^2+B'^2-\frac{2C'^2}{c^2}\right)=0.$$

Tato rovnice vyjadřuje, že přímky ABC, $A'B'C'$ stanoví na kruhu (c) body, jichž parametry $\varphi_1\,\varphi_2$, $\varphi_3\,\varphi_4$ dávají osy křivky Γ na sobě kolmé. Podržíme-li osu $(\varphi_3,\ \varphi_4)$ pevnou, podává (16) rovnici kuželosečky, jejíž tečny určují osy kolmé na osu $(\varphi_3,\ \varphi_4)$.

Úběžné body čáry (16) mají rovnici

$$(A^2-B^2)(A'^2-B'^2)+4ABA'B'+\frac{1}{3}\Phi'(A^2+B^2)=0,$$

$$\Phi'=A'^2+B'^2-\frac{2C'^2}{c^2}.$$

Diskriminant zní

$$4A'^2B'^2-(A'^2-B'^2+\frac{1}{3}\Phi')(B'^2-A'^2+\frac{1}{3}\Phi')$$

$$=(A'^2+B'^2)^2-\frac{1}{9}\Phi'^2;$$

devateronásobek diskriminantu má hodnotu

$$8(A'^2+B'^2)^2+\frac{4C'^2}{c^2}\left(A'^2+B'^2-\frac{C'^2}{c^2}\right),$$

která je kladna (v případě realných φ_3 a φ_4), poněvadž platí

$$A'^2+B'^2-\frac{C'^2}{c^2}>0,$$

jakmile body $(u_3,\ u_4)$ určující osu čáry Γ jsou realné. Kuželosečka (16) je tedy hyperbola v tom případě.

Její ohniska jsou realné body na tečnách hovících podmínce

$$A^2+B^2=0.$$

Vložme $B=iA$ do rovnice (16); vyjde

$$(A'^2-B'^2+2iA'B')A^2-\Phi'\frac{C^2}{3c^2}=0,$$

odtud pak

$$\frac{A}{C} = \sqrt{\frac{\Phi'}{3c^2}} \frac{A' - iB'}{A'^2 + B'^2}, \quad \frac{B}{C} = \sqrt{\frac{\Phi'}{3c^2}} \frac{B' + iA'}{A'^2 + B'^2}.$$

Rovnice tečny bude

$$A'x + B'y + i(A'y - B'x) + (A'^2 + B'^2)\sqrt{\frac{3c^2}{\Phi'}} = 0;$$

je-li $\Phi' > 0$, t. j. protíná-li přímka $\overline{u_3 u_4}$ kružnici

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2} = 0,$$

je třetí člen realný a ohniska leží na přímce

$$A'y - B'x = 0,$$

kolmé na $\overline{u_3 u_4}$. Je-li však $\Phi' < 0$, t. j. leží-li přímka $\overline{u_3 u_4}$ zevně řečeného kruhu, bude $\sqrt{\Phi'}$ ryze pomyslné, a ohniska leží na přímce

$$A'x + B'y = 0,$$

rovnoběžné s přímkou $\overline{u_3 u_4}$.

Pro výstřednost máme odtud

$$e = c\sqrt{3}\sqrt{\frac{A'^2 + B'^2}{\pm \Phi'}}, \quad \frac{\Phi'}{A'^2 + B'^2} = 1 - \frac{2\delta^2}{c^2},$$

kde δ značí vzdálenost přímky $\overline{u_3 u_4}$ od bodu O. Tudíž

$$e = \frac{c^2\sqrt{3}}{\sqrt{|c^2 - 2\delta^2|}}.$$

Pro čáru (16) lze určiti libovolný počet tečen $\overline{u_1 u_2}$ na základě přímek $\overline{v_1 v_2}$, jež tvoří svazek. Zvláště přímky tohoto svazku, které jsou tečnami kruhu (c), vedou k párům bodů $u_1 u_2$ diametrálně protilehlých, které dávají tečny procházející středem křivky O, t. j. asymptoty. — Jsou-li úhly φ_1, φ_2 komplexní veličiny sdružené, bude osa (φ_1, φ_2) křivky Γ realnou. Je-li osa (φ_3, φ_4) určena body pomyslně sdruženými, nejsou průseky u_3, u_4 body realné, rovněž ne příslušné body v_3, v_4, ale příslušná přímka $\overline{v_3 v_4}$ bude realnou rovněž jako $\overline{u_3 u_4}$. Padne-li pól přímky $\overline{v_3 v_4}$ vůči kruhu (15*) dovnitř kruhu (c) — t. j. je-li její vzdálenost δ_1 od bodu O větší než $3c$ — budou asymptoty kuželosečky (16) pomyslny a čára sama tedy ellipsou.

Úhel $\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2} = \varphi_0$ jest realný, a je to směr přímky kolmé na $\overline{u_3 u_4}$; přímka $\overline{v_3 v_4}$ pak má svoji normálu ve směru $2\varphi_0$. Vzdálenosti δ a δ_1 těchto přímek od bodu O jsou v závislosti vyjádřené vztahem

$$c\delta_1 = 2\delta^2 - c^2,$$

vycházejícím z identity $\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1$. Tím jsou přímky $\overline{v_1 v_2}$ — t. j. jich svazek — určeny také v případě, kdy přímka $\overline{u_3 u_4}$ neprotíná kruh (c).

Čára (16) je pak ellipsou v případě $\delta > c\sqrt{2}$, a degeneruje v případě $\delta = c\sqrt{2}$, kdy pak jeden z bodů v_1, v_2 je stálým bodem kruhu (c), jakožto vrchol svazku $\overline{v_1 v_2}$.

Buď dále Δ střed tohoto svazku; paprsek jeho kolmý na přímku $O\Delta$ dává body v_1, v_2, jimž příslušejí body u_1, u_2 (vedle dalších 3 párů) určující tečnu kuželosečky (16) kolmou na (po příp. rovnoběžnou) $\overline{u_3 u_4}$, t. j. tečnu vrcholovou. Celkem vycházejí tak 4 tětivy $\overline{u_1 u_2}$, jež jsou vrcholové tečny kuželosečky. —

Na základě věty o různoběžných osách čáry Γ víme, že osy (u_1, u_2) sekoucí osu (u_3, u_4) dávají tětivy kruhové $u_1 u_2$ ve svazku σ. Osy (u_1, u_2) protínající kolmo osu (u_3, u_4) určíme tedy pomocí tečen čáry (16) vedených z bodu σ; naproti tomu osy komplanární odpovídají tečnám z bodů u_3 a u_4 na kruhu (c).

„Mezi osami čáry Γ jsou dvě, jež kolmo protínají osu danou, nečítaje v to dva páry os s danou osou komplanárních."

Určíme přímo z rovnice (16) některé tečny. První dva členy rovnice lze psáti

$$(A A' + B B')^2 - (A B' - A' B)^2;$$

čára má tudíž tečny (A, B, C) hovící rovnicím

$$A^2 + B^2 - \frac{2C^2}{c^2} = 0, \quad A A' + B B' = \pm (A B' - A' B). \tag{17^0}$$

Jsou to tečny kruhu

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2}{2} = 0 \tag{17}$$

rovnoběžné s přímkama

$$\begin{aligned} (A' + B')\,x - (A' - B')\,y &= 0,\\ (A' - B')\,x + (A' + B')\,y &= 0, \end{aligned} \tag{17^b}$$

jež jsou na sobě kolmy.

Osy kuželosečky (16)

$$A'x + B'y = 0, \quad A'y - B'x = 0$$

protínají kruh (c) v bodech, které jsou vrcholy čtverce; jeho dva páry protějších stran jsou zvrhlé kuželosečky svazku

$$\lambda\,(x^2 + y^2 - c^2) = 2 A' B' (x^2 - y^2) - 2 (A'^2 - B'^2)\, x y;$$

diskriminant této rovnice

$$c^2 \lambda\,[\lambda^2 - (A'^2 + B'^2)^2]$$

vymizí pro $\pm\lambda = A'^2 + B'^2$, což dává přímky

$$(A' \mp B')^2 x^2 + (A' \pm B')^2 y^2 \pm 2 (A'^2 - B'^2) x y = (A'^2 + B'^2) c^2$$

čili

$$[(A' \mp B') x \pm (A' \pm B') y]^2 = (A'^2 + B'^2) c^2,$$

rovnoběžné s přímkami (17^b); poněvadž jsou to strany vepsaného čtverce do kruhu (c), jsou tečnami kruhu (17), t. j.

„osy hyperboly (16), rovnoběžka a kolmice na $\overline{u_3 u_4}$ z bodu O, stanoví na kruhu (c) vrcholy čtverce, jehož strany jsou tečnami hyperboly (16)."

Šinc-li se přímka $\overline{u_3 u_4}$ zůstávajíc rovnoběžna s pevným směrem, nemění se osy hyperboly a uvedené čtyři tečny, hyperboly tvoří řadu kuželoseček (čar 2. třídy). Z těch jedna se rozpadá ve dva body úběžné na stranách čtverce, příslušná přímka $\overline{u_3 u_4}$ dotýká se kruhu (17); druhé dvě čáry rozpadají se v páry protilehlých vrcholů, bude jeden z bodů u_1, u_2 pevným dvojznačně, rovněž jeden z bodů v_1, v_2 (a sice jednoznačně), tedy střed svazku $\overline{v_1 v_2}$ leží na kruhu (c), jeho polára pro kruh (15*) padne mimo kruh (c), t. j. přímka $\overline{v_3 v_4}$ kruh (c) neprotne, rovněž tedy leží $\overline{u_3 u_4}$ mimo (c).

Vychází to také z diskriminantu rovnice (16)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3}\Phi' + A'^2 - B'^2, & 2 A' B', & 0 \\ 2 A' B', & \frac{1}{3}\Phi' - A'^2 + B'^2, & 0 \\ 0, & 0, & -\frac{2}{3 c^2}\Phi' \end{vmatrix},$$

jenž vymizí pro $\Phi' = 0$ (kdy $\overline{u_3 u_4}$ je tečnou kruhu (17)) a pro další dvě řešení pomyslná.

Připomeňme ještě, že podmínka, aby se osy (u_1, u_2) a (u_3, u_4) protínaly — pokud nejsou komplanární — se vyjadřuje vztahem

$$B C' + B' C = 0,$$

ježto z hořejších vztahů vychází

$$B = -\frac{C}{c} \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}}.$$

*

V případě, kdy kuželosečka (16) se rozpadá ve dva úběžné body, mají tětivy $\varphi_1 \varphi_2$ kruhu (c) stálý směr, totiž jsou rovnoběžny s tečnou bodu φ_3, a při tom je $\varphi_4 = \varphi_3 \pm \frac{\pi}{2}$. Tu pak osa ($\varphi_3$, φ_4) je průseč rovin s rovnoběžnými půdorysnými stopami

$$x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3 - z\sqrt{3} = 4c \cos\varphi_3$$
$$x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3 + z\sqrt{3} = \pm 4c \sin\varphi_3,$$

a tedy je rovnoběžna s rovinou Vxy.

Pro osu (φ_1, φ_2) máme podmínku $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 2\varphi_3$ (mod. 2π); béřeme-li úhly φ_1, φ_2 v mezích $-\pi$ a π, bude přesně $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_3$; pro její půdorys máme rovnici (1)

$$x \sin 2\varphi_3 - y \cos 2\varphi_3 = 2c \frac{\sin\varphi_3}{\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}},$$

t. j. zůstává kolmý na směr $\frac{\pi}{2} + 2\varphi_3$ osy (φ_3, φ_4), jak zřejmo a priori.

Proveďme transformaci souřadnic

$$X = x\cos 2\varphi_3 + y\sin 2\varphi_3,\quad Y = -x\sin 2\varphi_3 + y\cos 2\varphi_3,$$

pevná osa q (φ_3, φ_4) má rovnice

$$(q)\qquad X = 2c(\cos\varphi_3 \pm \sin\varphi_3),\quad z\sqrt{3} = -2c(\cos\varphi_3 \mp \sin\varphi_3)$$

a pro osu p (φ_1, φ_2) nalezneme

$$(p)\qquad Y = -2c\frac{\sin\varphi_3}{\cos(\varphi_1 - \varphi_3)},$$

$$X\cos 2(\varphi_1 - \varphi_3) - z\sqrt{3} = 4c\cos\varphi_3\cos(\varphi_1 - \varphi_3);$$

hodnotám neodvislým φ_1 odpovídá tak ∞^1 přímek p, jež tvoří plochu sborcenou.

Znamenejme $\varphi_1 - \varphi_3 = \alpha$, $c\cos\varphi_3 = g$, $c\sin\varphi_3 = h$, rovnice (p) znějí pak

$$(18)\qquad Y = -\frac{2h}{\cos\alpha},\quad X\cos 2\alpha - Z\sqrt{3} = 4g\cos\alpha,$$

kde α je proměnný parametr. Strikční čára je obrys v rovině XZ a je to kuželosečka

$$X_0 = \frac{g}{\cos\alpha},\quad Z_0\sqrt{3} = -g\frac{1 + 2\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$$

čili

$$(19)\qquad X_0(X_0 + Z_0\sqrt{3}) + 2g^2 = 0,\quad Y_0 + 2X_0 \operatorname{tg}\varphi_3 = 0.$$

Plocha os (18) má rovnici

$$(18^*)\qquad Y^2(X + Z\sqrt{3}) = 8h^2X + 8ghY,$$

z níž vychází, že na ploše leží přímka (prochází bodem V)

$$(20)\qquad X + Z\sqrt{3} = 0,\quad hX + gY = 0.$$

Plocha naše tedy je konoid, jehož řídící útvary jsou rovina XZ a přímka (20), mimo to hyperbola (19).

XXXIII.

Tento konoid je geometrickým místem os čáry Γ $(a = 2c)$, které stojí kolmo na daném směru $\frac{\pi}{2} + 2\varphi_3$ v rovině Vxy; řídící rovina je rovnoběžna s osou Vz a s daným směrem $2\varphi_3$, řídící přímka je průseč rovin

$$y = x\,tg\,\varphi_3, \quad x \cos 2\varphi_3 + y \sin 2\varphi_3 + z\sqrt{3} = 0,$$

t. j.

$$\frac{x}{\cos \varphi_3} = \frac{y}{\sin \varphi_3} = \frac{z}{\frac{-1}{\sqrt{3}} \cos \varphi_3}.$$

OBSAH.

Strana

1. Definice; polární plocha. Vytvoření čáry jako evolventy rotačního kužele. Ekvivalence tohoto processu s kotálením kruhu po kruhu. Hlavní normála a střed křivosti. Čára středů křivosti leží na kuželi rotačním a možno ji vytvořiti pomocí nálepu kruhového 1
2. Konstrukce čáry, její tečny, normální roviny, osy křivosti a roviny oskulační; poloměr křivosti pro čáru a její půdorys 4
3. Elementární odvození povahy půdorysu sf. šroubovice — jakožto epicykloidy. Čára středů křivosti má za půdorys růžici; parametrické vyjádření čáry středů. Délka oblouku sf. šroubovice 6
4. Záběh do theorie růžic. Růžice nalepená na rotační kužel, tak aby vrchol jeho se kryl s jejím středem, promítá se do základní roviny kužele opět v růžici.
Zvláštní případ, kdy průmětem je kruh, dává hyppopédu Eudoxovu . . 11
5. Analytické vyjádření sf. šroubovice. Poloměr křivosti nárysu. Vyjádření polohy hlavní normály, normální roviny, tečny, osy křivosti a roviny oskulační. Plocha hlavních normál; její čára strikční leží na rotačním hyperboloidu jednoplochém; po rozvinutí promítajícího válce v rovinu přechází strikční čára v ellipsu. Pronik plochy hlavních normál s válcem $x^2 + y^2 = c^2$ sestává ze dvou různých křivek. Rovnice plochy hlavních normál v případě $a = 2c$ ($\gamma = 60^0$); její řez s normální rovinou bodu A. Některé vlastnosti jistých čar 4. stupně na ploše hlavních normál 13
6. Tětivy stanovené hlavními normálami na základním válci $x^2 + y^2 = c^2$. Plocha tečen; její pronik s válcem $x^2 + y^2 = a^2$ se rozpadá ve dvě čáry (Q) a (Q'); střední epicykloida na ploše tečen, trojiny stálého poměru. Čáry $QP =$ konst. a $Q'P =$ konst. Rotační plochy 2. st. se středem V, vepsané válci (a), protínají plochu tečen v čarách $QP : Q'P =$ konst.; jich půdorysy jsou epicykloidy. Rozvinutí plochy tečen v rovinu. Definice čáry jako sférické evolventy kruhu 25
7. Některé průměty centrální a kosoúhlé čáry Γ v případě $a = 2c$: kardioida, Diokletova cissoida, dvojovála. Konstruktivní zjednodušení, jež v tomto případě nastanou 34
8. Zvláštní případ $a = 3c$. Centrální průměty z bodů vratných a z bodu dvojného 39
9. Další úvahy o ploše hlavních normál ($a = 2c$): Podmínka, aby šest hl. normál mělo společnou sečnu; stanovení zvláštní přímky na oskulačním paraboloidu 41
10. Plocha hlavních normál v případě $a = 3c$; rovnostranné trojúhelníky bodů (φ, $\varphi + 120^0$, $\varphi + 240^0$) o společné rovině normální . . 46

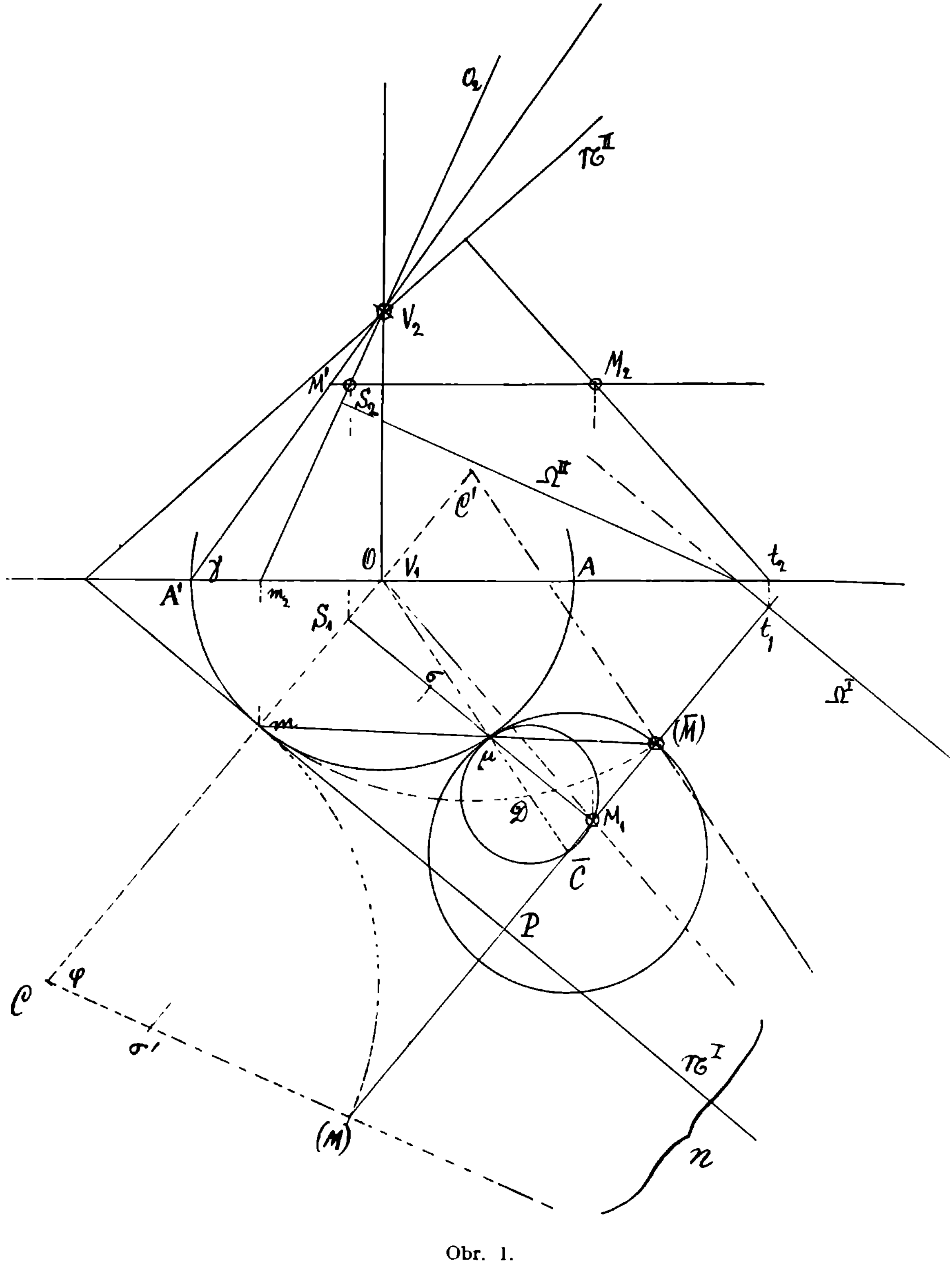
Strana

11. Oskulační rovina a plocha tečen v případě $a = 2c$. Čtveřina oskulačních rovin jdoucích společným bodem. Společné sečny hlavních normál příslušných bodů tvoří komplex 3. stupně. Jednoduchý vztah mezi průseky plochy normál s přímkou směru Oz a oskulačními rovinami příslušných bodů čáry Γ. Konstrukce normál nefroidy z průsečného bodu jiných dvou normál. Parametry průsečíků s rovinou. Zvláštní rovinné čtveřiny. Geometrické místo bodu, v němž se protínají oskulační roviny sestrojené ve třech průsecích čáry s její rovinou oskulační, jest ellipsa.
Osy čáry Γ, které sekou určitou osu, tvoří plochu 2. stupně 50

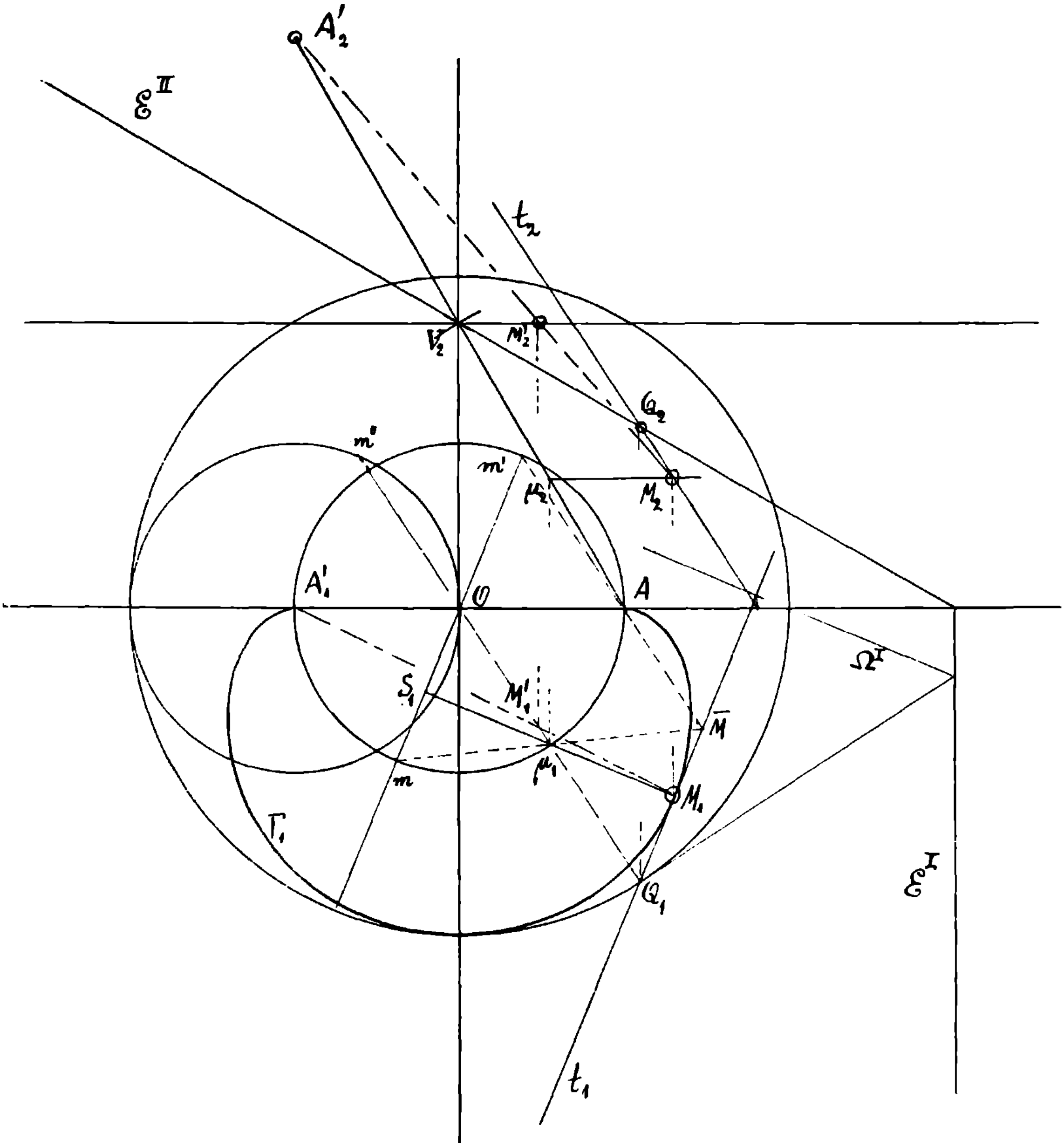
12. O ploše tečen $a = 2c$. Plochy druhého stupně vepsané ploše tečen se jí dotýkají podél čar 4. stupně a obsahují určité 4 tečny. Průseč plochy s rovinou tečnou promítá se do základní roviny v protiúpatnici strofoidy 59

13. Osy čáry šroubové $a = 2c$. Osy protínající určitou osu čáry Γ tvoří vepsaný hyperboloid. Fokální body kongruence os. Konstrukce os kolmých na danou osu. Osy kolmé na daný směr v základní rovině tvoří konoid 3. stupně . 72

Tabulka s obrazy 1. a 2.


o_2
π^{II}
V_2
M_2
M'
S_2
Ω^{II}
C'
O
V_1
A
t_2
A'
γ
m_2
S_1
t_1
σ
Ω^{I}
m
μ
$(\bar{M})$
$\mathfrak{D}$
M_1
$\bar{C}$
P
C
φ
σ'
π^{I}
(M)
n

Obr. 1.



Obr. 2.