Matyáš Lerch
O dvou plochách stupně čtvrtého

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 22 (1913), č. 36, 1–141

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501602

O dvou plochách stupně čtvrtého.

Podává **M. Lerch** v Brně.

S 15. obr. v textu.

(Předloženo dne 20. června 1913.)

I.

1. Nechť se rotační kužel otáčí kolem svého vrcholu A tak, aby jeho osa zůstávala v dané rovině $O\,x\,y$; rovina vedená pevnou přímkou $O\,z$ (kolmou na $O\,x\,y$) kolmo na osu kužele protíná jej v kruhu Γ; souhrn těchto kruhů naplňuje určitou plochu stupně čtvrtého, jejíž body M mají vlastnost, že přímka $A\,M$ svírá s rovinou $M\,O\,z$ stálý úhel, z kteréžto příčiny sluje *isogonální*) plochou* bodu A a přímky $O\,z$.

Položme osu $O\,x$ pravoúhlé soustavy souřadnic do přímky $O\,A$, a buďte souřadnice bodu A $(x = a,\ y = z = 0)$.

Strana kužele $A\,K$ ležící v rovině $O\,x\,y$ svírá s rovinou $K\,O\,z$ kolmou na osu kužele $A\,\sigma$ týž úhel ϑ jako s její stopou $O\,K$; úhel $O\,K\,A = \vartheta$ je stálý a bod K opisuje určitý kruh (K) procházející body A, O; buď B jeho střed. Bod K jakožto průsek strany kužele s rovinou $K\,O\,z$ náleží kruhu Γ a jest jeho stopou na rovině $O\,x\,y$; střed kruhu Γ je patrně průsek σ osy kužele $A\,\sigma$ s přímkou $O\,K$, a tedy opisuje tento střed kružnici $(O\,A)$ nad průměrem $O\,A$.

Odtud jednoduchá konstrukce kruhů na ploše isogonální*): V rovině $O\,x\,y$ vedeme kruh (K) hovící podmínce $\sphericalangle\, O\,K\,A = \vartheta = \text{konst.}$, a v rovinách svazku $O\,z$ sestrojíme kruhy Γ mající své středy na kruhu $(O\,A)$ a protínající kruh (K).

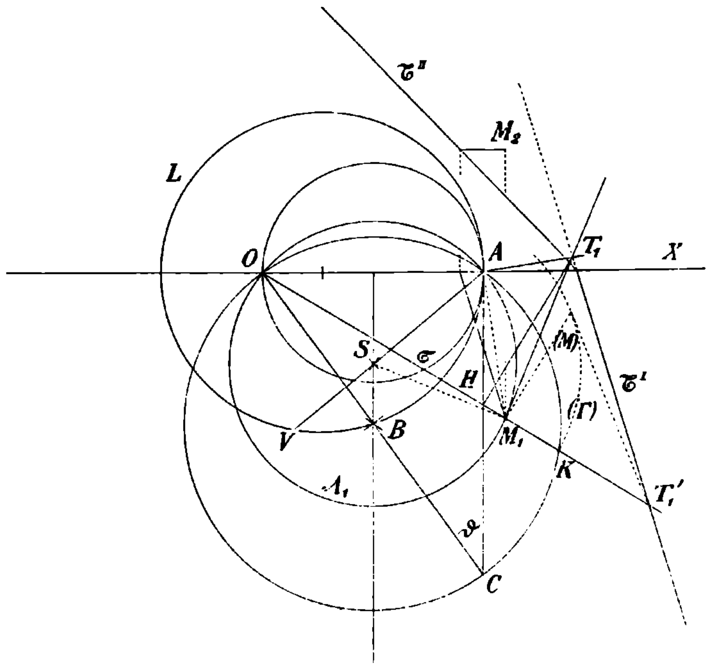
Analytické vyjádření bodů plochy isogonální obdržíme takto: Znamenejme φ úhel $X\,O\,K$ určující polohu roviny sečné $K\,O\,z$, čímž určen

*) L. Heffter, Über gewisse Flächen vierter Ordnung (Isogonalflächen). Journal f. d. reine u. angew. Mathematik, 115.

*) Heffter, l. c.

uh Γ, a na tomto kruhu vytkněme libovolný bod M udáním úhlu $\alpha = K \sigma M$, který poloměr $O M$ svírá s rovinou $O x y$.

V obrazci 1. znázorňuje (Γ) kruh Γ po sklopení do půdorysu $x y$ kolem přímky $O K$, půdorys bodu M je pata M_1 kolmice $(M)\, M_1$ spuštěné s bodu (M) na přímku $O K$; délka $M_1\,(M)$ udává výšku nárysu z.



Obr. 1.

Polární souřadnice půdorysu M_1 bodu M pro pól O a osu $O x$ jsou úhel φ a průvodič $O M_1$; patrně

$$O M_1 = \overline{O \sigma} + \overline{\sigma K} \cos \alpha, \quad z = \overline{M_1\,(M)} = \overline{\sigma K} \,.\, \sin \alpha.$$

Tu pak z trojúhelníků $O A \sigma$, $O A K$ plyne

$$\overline{O \sigma} = a \cos \varphi, \ \overline{O K} = \frac{a}{\sin \vartheta} \sin (\vartheta + \varphi),$$

tedy odečtením

$$\overline{\sigma K} = a \operatorname{cotg} \vartheta \sin \varphi.$$

Předcházející vzorce tedy dávají

$$(1) \qquad \overline{O M_1} = a \cos \varphi + c \cos \alpha \sin \varphi, \quad z = c \sin \alpha \sin \varphi,$$

při čemž kladeno

$$(1^0) \qquad c = a \operatorname{cotg} \vartheta,$$

takže c je pořadnice bodu C na kruhu (K) příslušná k úsečce $x = a$.

Pravoúhlé souřadnice bodu M na ploše isogonální určeného parametry φ a α znějí tedy

$$(2) \quad \begin{cases} x = (a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi) \cos\varphi \\ y = (a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi) \sin\varphi \\ z = c \sin\alpha \sin\varphi. \end{cases}$$

Povrchové kruhy Γ mají rovnici $\varphi =$ konst.

2. Z rovnic (2) máme postupně

$$(3) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = (a \cos\varphi + c \sin\varphi \cos\alpha)^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2\varphi + c^2 \sin^2\varphi + 2\, a\, c \cos\alpha \sin\varphi \cos\varphi \\ (x - a)^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + c^2) \sin^2\varphi. \end{cases}$$

Násobením prvního a třetího těchto výrazů vychází vzhledem k hodnotě y dle (2):

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 2\, a\, x + a^2)\, (x^2 + y^2) = (a^2 + c^2)\, y^2$$

čili*)

$$(4) \quad [(x - a)^2 + y^2 + z^2]\, (x^2 + y^2) = \frac{a^2}{\sin^2\vartheta}\, y^2 = (a^2 + c^2)\, y^2.$$

Plocha isogonální přímky a bodu je tedy stupně 4.; prochází jednoduše imaginárním kruhem v nekonečnu, a obsahuje nekonečně vzdálené přímky imaginárních rovin

$$x \pm i\, y = 0.$$

Stopa plochy na rovině $O\, x\, y$ je patrně kruh (K) a kruh s ním souměrný vůči $O\, x$. Rovnice kruhu (K) zní

$$x^2 + y^2 - a\, x - c\, y = 0,$$

soustava obou kruhů dává

$$(x^2 + y^2 - a\, x)^2 = c^2\, y^2;$$

z rovnice (4) pak obdržíme pro $z = 0$ rovnici tutéž

$$(x^2 + y^2)^2 - 2\, a\, x\, (x^2 + y^2) + a^2\, x^2 = c^2\, y^2.$$

Plocha isogonální má dále vlastnost, že její průsečnice s rovinami různoběžnými s osou $O\, z$ procházejí kruhovými body v nekonečnu, a stejnou vlastnost mají jejich průměty do roviny $O\, x\, y$ (půdorysy).

Rovnice (4) vyjadřuje metrický vztah

$$\overline{A\, M} = \pm \frac{a \sin\varphi}{\sin\vartheta}.$$

Zvolíme-li bod A za pól, přímku $A\, z \parallel O\, z$ za osu polární a rovinu $A\, x\, z$ za rovinu polární, a znamenáme-li průvodič polární $A\, M = \varrho$, polární úhel $M\, A\, z = \Theta$ (polární dálka), a úhel poledníkový ω, znějí transformační rovnice

$$x = a + \varrho \sin\Theta \cos\omega, \quad y = \varrho \sin\Theta \sin\omega, \quad z = \varrho \cos\Theta,$$

*) Heffter, l. c.

načež rovnice plochy obdrží tvar

$$\varrho^2 \sin^2\Theta + 2\, a\, \varrho \sin\Theta \cos\omega + a^2 = (a^2 + c^2) \sin^2\Theta \sin^2\omega$$

aneb

$$\varrho \sin\Theta = -a \cos\omega \pm \sin\omega \sqrt{c^2 \sin^2\Theta - a^2 \cos^2\Theta}.$$

Rotační kužely s vrcholem A, osou $A\,z$ (t. j. $\Theta =$ konst.) protínají plochu isogonální ve dvou různých křivkách, které poznáme jako Eudoxovy hyppopédy.

Průseč isogonální plochy s koulí o středu A

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = g^2$$

leží na dvou rovinách svazku $O\,z$

$$g^2 x^2 = \left(\frac{a^2}{\sin^2\vartheta} - g^2\right) y^2,$$

t. j. sestává ze dvou kruhů povrchových, které se protínají ve dvou bodech osy $O\,z$.

Roviny ty jsou realné, pokud

$$g < \frac{a}{\sin\vartheta} = \sqrt{a^2 + c^2} = \overline{O\,C}.$$

Tedy celá plocha leží uvnitř koule $O\,M = O\,C$.

Dále je průseč plochy s kruhovým válcem

$$x^2 + y^2 = g^2$$

na rotačním kuželi s vrcholem A a osou $A\,y$

$$(x - a)^2 + z^2 = \left(\frac{a^2}{g^2 \sin^2\vartheta} - 1\right) y^2,$$

který jest realný při podmínce

$$g < \frac{a}{\sin\vartheta} = \overline{O\,C}.$$

Nárys průsečné čáry jest ellipsa

$$(a^2 + c^2)\left(x - \frac{a\, g^2}{a^2 + c^2}\right)^2 + g^2 z^2 = \frac{g^2 c^2}{a^2 + c^2}\,(a^2 + c^2 - g^2).$$

Při $z =$ konst. nám (4) dává průmět řezu do roviny rovnoběžné; rovnice neobsahuje členů stupně nižšího než 2., a křivka má tedy bod dvojný $x = 0$, $y = 0$, mimo to ovšem dvojné body v kruhových bodech úběžných.

Všecky řezy $z =$ konst. mají dvojné body na $O\,z$, t. j. osa $O\,z$ je dvojná přímka plochy.

V polárních souřadnicích r, φ

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi$$

zní rovnice řezu

$$r^2 - 2\,a\,r\cos\varphi + a^2 + z^2 = (a^2 + c^2)\sin^2\varphi\,;$$

pro $r = 0$ máme odtud stanoveny tečny dvojného bodu jich polárním úhlem φ

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2 + z^2}{a^2 + c^2}\,;$$

jsou realné při $|z| \leqq c$. Dělením na

$$\cos^2\varphi = \frac{c^2 - z^2}{a^2 + c^2}\,,$$

vychází

$$tg^2\varphi = \frac{a^2 + z^2}{c^2 - z^2}\,.$$

Obě tečny řezu v bodě dvojném jsou dány rovnicemi

$$x^2(z^2 + a^2) + y^2(z^2 - c^2) = 0.$$

Při proměnném z tato rovnice přísluší konoidu, který je geom. místo tečen ve dvojném bodě řezů $z =$ konst. Jinak lze tuto rovnici přehledněji psáti

$$(\alpha) \qquad z^2 = \frac{c^2 y^2 - a^2 x^2}{x^2 + y^2}\,.$$

Obecně seče kruhový válec, jehož osa prochází bodem A,

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2$$

isogonální plochu v křivce ležící na konoidu

$$z^2 = \frac{(a^2 + c^2 - k^2)\,y^2 - k^2 x^2}{x^2 + y^2}\,.$$

V případě $k = a$ splývá tento konoid s plochou (α); rovnice válce zní tu $x^2 + y^2 = 2\,a\,x$, a její použitím vychází, že řídící čára konoidu (α) je pronik kruhového válce s parabolickým

$$x^2 + y^2 = 2\,a\,x,\; z^2 + \frac{a^2 + c^2}{2\,a}\,x = c^2,$$

a leží na ploše isogonální.

Stanovme dále ohniska řezu $z =$ konst. Znamenajíce na okamžik

$$z^2 + a^2 = g^2,\; a^2 + c^2 = 4\,b^2,$$

obdržíme po zavedení souřadnic isotropických

$$x + i\,y = u,\; x - i\,y = v,$$

rovnici naší čáry ve tvaru

$$u\,v\,(u\,v - a\,u - a\,v + g^2) + b^2\,(u - v)^2 = 0,$$

čili

$$(A) \qquad u^2\,(v^2 - a\,v + b^2) - u\,(a\,v^2 + 2\,b^2\,v - g^2\,v) + b^2\,v^2 = 0.$$

Dva kořeny u této rovnice splynou, platí-li

$$v^2 (a v + 2 b^2 - g^2)^2 = 4 b^2 v^2 (v^2 - a v + b^2).$$

Nehledíme-li k řešení $v = 0$, jež podává dvojný bod $u = 0$, $v = 0$, máme rovnici druhého stupně

$$(a^2 - 4 b^2) v^2 + 2 a (4 b^2 - g^2) v + (2 b^2 - g^2)^2 - 4 b^4 = 0,$$

čili

$$c^2 v^2 - 2 a (c^2 - z^2) v + g^2 (c^2 - z^2) = 0,$$

takže vychází

$$v = \frac{a (c^2 - z^2) \pm 2 i b z \sqrt{c^2 - z^2}}{c^2}.$$

Ohniska bicirkulární čáry 4. stupně $z =$ konst. jsou tedy určena souřadnicemi*)

$$x_0 = \frac{a (c^2 - z^2)}{c^2}, \quad y_0 = \pm \frac{z \sqrt{a^2 + c^2} \sqrt{c^2 - z^2}}{c^2}.$$

Zavedeme-li parametr ω substitucí $z = c \sin \omega$, obdržíme

$$(B) \qquad x_0 = a \cos^2 \omega, \quad y_0 = \sqrt{a^2 + c^2} \sin \omega \cos \omega, \quad z = c \sin \omega,$$

při čemž bylo lze dvojité znamení potlačiti, ana čára se reprodukuje záměnou $\pi - \omega$ za ω.

Porovnejme ještě výrazy (B) píšíce v nich $\omega = \varphi$ s hodnotami souřadnic bodu φ na čáře $\alpha = \frac{\pi}{2}$, t. j. dle (2)

$$x = a \cos^2 \varphi, \quad y = a \sin \varphi \cos \varphi, \quad z = c \sin \varphi.$$

Patrně bude

$$x_0 = x, \quad y_0 = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a} y, \quad z_0 = z.$$

---

*) Inversí

$$x_1 = \frac{R^2}{x^2 + y^2} x, \quad y_1 = \frac{R^2}{x^2 + y^2} y$$

vznikne z čáry naší

$$(x^2 + y^2 - 2 a x + g^2) (x^2 + y^2) = (a^2 + c^2) y^2 \quad (g^2 = a^2 + z^2),$$

hyperbola

$$g^2 x_1^2 - (c^2 - z^2) y_1^2 - 2 a R^2 x_1 + R^4 = 0;$$

její realná osa má rovnici

$$x_1 = \frac{a R^2}{a^2 + z^2}.$$

osa pomyslná je $O x$; její ohniska jsou inversní body ohnisek čáry, a slouží prvnější naopak ku geometrickému stanovení těchto.

„Geometrickým místem ohnisek bicirkulárních čar 4. stupně, které jsou řezy $z =$ konst. isogonální plochy (4), jest racionální křivka 4. stupně, která z čáry $\alpha = \frac{\pi}{2}$ na této ploše vznikne affinitou

$$x_0 = x,\ y_0 = \frac{y}{\sin\vartheta},\ z_0 = z.\text{“}$$

Abychom určili singulární ohniska, t. j. průsečné body tečen v kruhových bodech úběžných, vraťme se k rovnici (A). Kruhové body $y = i\,x$ a $y = -i\,x$ znamenejme J_1 a J_2, takže na J_1 jest $v = \infty$ a na J_2 pak $u = \infty$.

Blíží-li se bod čáry poloze J_1, zůstává u konečné a v roste absolutně do nekonečna. Z rovnice (A) upravené takto

$$u^2\left(1 - \frac{a}{v} + \frac{b^2}{v^2}\right) - u\left(a + \frac{2\,b^2 - g^2}{v}\right) + b^2 = 0$$

máme pro $v = \infty$ rovnici

$$u^2 - a\,u + b^2 = 0,$$

jejíž kořeny jsou souřadnice tečen ve dvojném bodě J_1; patrně

$$2\,u = a \pm \sqrt{a^2 - 4\,b^2} = a \pm i\,c,$$

tedy

„Singulární ohniska řezů $z =$ konst. naplňují přímky

$$x = \frac{a}{2},\ y = \pm\frac{c}{2},$$

které procházejí středy základních kruhů (K) *a* (K')

$$x^2 + y^2 - a\,x \mp c\,y = 0.$$

Čára $z =$ konst.jest obálkou kružnic

$$\lambda^2\,(x^2 + y^2) + \frac{2\,a}{\sin\vartheta}\,\lambda\,y + (x - a)^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

které po dosazení nového parametru β ($tg\,\beta = \lambda$) mají rovnici

$$(K_\beta)\quad x^2 + y^2 + \frac{2\,a\,\sin\beta\,\cos\beta}{\sin\vartheta}\,y - 2\,a\cos^2\beta\,.\,x + (a^2 + z^2)\cos^2\beta = 0.$$

Střed kruhu

$$x_0 = a\cos^2\beta,\ y_0 = -\frac{a\,\sin\beta\,\cos\beta}{\sin\vartheta}$$

opisuje ellipsu

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2\sin^2\vartheta = \frac{a^2}{4},$$

dále je mocnost kruhu pro bod O čtverec reálné veličiny

$$\delta = \sqrt{a^2 + z^2}\cos\beta;$$

známe tedy střed kruhu K_β, jakož i kruh k němu pravoúhlý, čímž jest K určen. Body, ve kterých se kruh dotýká čáry obalové, leží na přímce

$$y = -\sin\vartheta \; tg\, 2\beta\left(x - \frac{a^2 + z^2}{2a}\right);$$

odtud vychází konstrukce tečny naší čáry 4. stupně.

3. Přistupme k šetření průseků přímek vycházejících z bodu A. Je-li ξ, η, ζ libovolný bod N, budou body na přímce $A\,N$ míti souřadnice

$$x = a + (\xi - a)\,t, \quad y = \eta\, t, \quad z = \zeta\, t,$$

a průsek přímky $A\,N$ s plochou isogonální (4) se určí z rovnice

$$[(\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2]\,[a^2 + 2a(\xi - a)\,t + \overline{(\xi - a)^2 + \eta^2}\,t^2]\,t^2 = (a^2 + c^2)\,\eta^2\,t^2.$$

Dva průseky splynou s bodem A $(t^2 = o)$, zbývající dva hoví pak rovnici

$$(C) \qquad [(\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2]\,[a^2 + 2a(\xi - 0)\,t + \overline{(\xi - a)^2 + \eta^2}\,t^2] = (a^2 + c^2)\,\eta^2.$$

Aby třetí průsek splynul s bodem A, třeba, a stačí, by

$$(\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{\eta^2}{\sin^2\vartheta};$$

píšeme-li tedy $x\;y\;z$ za $\xi\;\eta\;\zeta$, nacházíme rovnici kužele tečen ve dvojném (konickém) bodě A plochy isogonální*)

$$(5) \qquad (x - a)^2 + z^2 = y^2 \cot g^2\vartheta;$$

je to zřejmě kužel rotační, jehož vrchol jest A, osa $A\,y$.

Průseč tohoto kužele s plochou isogonální hoví rovnici

$$\frac{y^2}{\sin^2\vartheta}\,(x^2 + y^2) = \frac{a^2\,y^2}{\sin^2\vartheta};$$

nehledíme-li k samozřejmému řešení $y^2 = 0$, vychází

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

t. j. pronik uvažovaného kužele s plochou isogonální promítá se do roviny $x\,y$ v kruh se středem O, poloměrem $O\,A$. Nárys čáry jest ellipsa

$$z^2 \sin^2\vartheta + (x - a\sin^2\vartheta)^2 = a^2\cos^4\vartheta.$$

Rovnice (C) nabude přehlednějšího tvaru

$$(C') \qquad a^2 S - (a^2 + c^2)\,\eta^2 + 2a\,S\,(\xi - a)\,t + V\,S\,t^2 = 0,$$

píše-li se

$$S = (\xi - a)^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad V = (\xi - a)^2 + \eta^2.$$

Přímka $A\,N$ dotkne se plochy mimo bod A, splynou-li kořeny této rovnice, t. j. platí-li

---

*) Heffter, l. c.

$$a^2 S^2 (\xi - a)^2 = V S [a^2 S - (a^2 + c^2) \eta^2],$$

aneb po redukci*)

$$[a^2 S - (a^2 + c^2) V] \eta^2 S = 0.$$

Řešení $\eta^2 = 0$ podává dvojnásobnou rovinu $O x z$, která protíná plochu v čáře

$$x^2 [(x - a)^2 + z^2] = 0,$$

jež sestává z dvojnásob vzaté osy $O z$ a z páru isotropických přímek z bodu A vycházejících. Každá přímka z bodu A vedená v rovině $O x z$ protíná dvojnou přímku $O z$, t. j. plochu ve dvou splývajících bodech.

Další řešení $S = 0$ podává imaginární kužel s vrcholem A, obsahující úběžný kruh; jeho průseč s plochou isogonální je skutečně dvojnásobný tento kruh, neboť v rovnici (C') se pro $S = 0$ oba kořeny stanou nekonečnými. Další část průseče kužele s plochou hoví rovnici $y^2 = 0$.

Tvar rovnice (4) ukazuje bezprostředně, že se plocha isogonální dotýká kužele $S = 0$ podél dvou přímek na rovině $y = 0$, takže tyto dvě pomyslné přímky tvoří část opsaného kužele.

Konečně zbývá realný faktor

$$a^2 S - (a^2 + c^2) V = 0$$

čili po změně označení

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x - a)^2 + y^2}{\sin^2 \vartheta}, \tag{6^a}$$

aneb konečně

$$(x - a)^2 + y^2 = z^2 \, tg^2 \vartheta, \tag{6}$$

jakožto rovnice realného kužele opsaného ploše isogonální z vrcholu A; kužel je rotační s osou $A z$, která se stranami jeho svírá úhel ϑ.

Na hybném kuželi, kterého jsme užili k vytvoření povrchových kruhů Γ, veďme přímky příslušné k úhlu $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$; ty leží na rovinách vedených osou $A z$ a stojí kolmo na příslušných stranách opsaného kužele.

Abychom určili průmět řezu kužele (6) s plochou, vylučme z z rovnic (6^a) a (4); obdržíme

$$(x^2 + y^2) [(x - a)^2 + y^2] = a^2 y^2,$$

čili což totéž jest

$$(x^2 + y^2 - a x)^2 = 0.$$

Dotyková čára plochy isogonální s kuželem opsaným z vrcholu A promítá se tedy do roviny $O x y$ v kruh nad průměrem $O A$.

$$x^2 + y^2 - a x = 0, \tag{7}$$

jak na u. m. již Heffter ukázal.

---

*) Heffter, l. c.

Z rovnic (2) pak plyne, že tato čára odpovídá hodnotě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ aneb $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; tyto dvě hodnoty podávají tutéž křivku. Můžeme tedy výsledek Heffterův doplniti takto:

„Kužel opsaný z vrcholu A dotýká se plochy isogonální podél Eudoxovy hyppopédy $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, která má parametrické vyjádření

(7′) $$x = a\cos^2\varphi,\quad y = a\sin\varphi\cos\varphi,\quad z = c\sin\varphi$$

a leží na kouli obsahující bod A

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 - c^2}{a}x + c^2.$$

Ustanovíme ještě kužel z vrcholu O ploše opsaný. Bod O leží v rovinách všech kruhů povrchových Γ a tečny těchto kruhů z bodu toho vedené tvoří opsaný kužel.

Rovina kruhu Γ má rovnici

$$y = t\,x,\quad t = tg\,\varphi,$$

takže pro její body

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} = \sin^2\varphi.$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (4), obdržíme

(a) $$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = (a^2 + c^2)\sin^2\varphi$$

jakožto rovnici koule procházející kruhem Γ; bod T, ve kterém se tečna OT dotýká kruhu Γ, určí se jako průsek roviny s kruhem, podél kterého se dotýkají koule její tečny z bodu O vedené. Mocnost bodu O vzhledem ke kouli (a) jest

$$OT^2 = a^2 - (a^2 + c^2)\sin^2\varphi,$$

tedy řečený kruh leží na kouli

(b) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 + c^2)\sin^2\varphi.$$

Průsečík koulí (a), (b) s rovinou kruhu Γ ($y = t\,x$) je hledaný bod T na čáře dotykové isogonální plochy s opsaným kuželem z vrcholu O. Odečtením rovnic (a) a (b) vychází

$$x = a - \frac{a^2 + c^2}{a}\sin^2\varphi,$$

dále jest

$$y = x\,tg\,\varphi;$$

polární souřadnice bodu T_1 — průmětu bodu T — jsou pak r, φ, kde

$$r = \frac{x}{\cos\varphi} = a\cos\varphi - \frac{c^2}{a}\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Porovnáme-li to s hodnotou (2)

$$r = a \cos \varphi + c \cos \alpha \sin \varphi,$$

obdržíme

(8) $$a \cos \alpha + c \operatorname{tg} \varphi = 0$$

jakožto parametrickou rovnici čáry dotykové (T). Výraz pro průvodič lze psáti

(8') $$r = \frac{a^2 + c^2}{a} \cos \varphi - \frac{c^2}{a} \sec \varphi,$$

což jest polární rovnice průmětu dotykové čáry (T):

„Kužel opsaný z vrcholu O dotýká se plochy isogonálné podél čáry, jež se do roviny Oxy promítá v čáru třetího stupně, která jest cissoidou kruhu a přímky, t. j.

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + c^2}{a} x = 0 \quad \text{a} \quad x = \frac{c^2}{a}.$$

Rovnice této cissoidy zní

$$(x^2 + y^2)(x - a) + \frac{a^2 + c^2}{a} y^2 = 0;$$

je to Sluseova konchoida druhého typu.

Přímou methodou bychom nalezli rovnici opsaného kužele ve tvaru

(8^2) $$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 - c^2 y^2) = a^2 x^2 (x^2 + y^2),$$

pomíjíme-li imaginární řešení

$$x^2 + y^2 = 0.$$

4. Zaveďme homogení souřadnice Hesseovy x, y, z, u, takže pravoúhlé souřadnice budou

$$\frac{x}{u}, \quad \frac{y}{u}, \quad \frac{z}{u};$$

klademe-li k vůli stručnosti

$$S = (x - a u)^2 + y^2 + z^2, \quad V = x^2 + y^2, \quad g = \frac{a}{\sin \vartheta} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

bude rovnice isogonální plochy zníti

(9) $$S V - g^2 y^2 u^2 = 0.$$

Libovolnému bodu v prostoru $P_0 (x_0 y_0 z_0 u_0)$ přísluší jako první polára

(10) $$\begin{gathered} x_0 [S x + V (x - a u)] + y y_0 [S + V - g^2 u^2] \\ + V z z_0 - u_0 [a V (x - a u) + g^2 y^2 u] = 0; \end{gathered}$$

a této ploše leží čára, podél níž se isogonální plocha dotýká opsaného kužele z vrcholu P_0.

Ve zvláštních případech zjednoduší se tato rovnice. Tak pro bod P_0 ležící na ose Ox bude $y_0 = 0 = z_0$; klademe ještě $u_0 = u = 1$, a rovnice poláry (10) obdrží tvar

(11) $$S x x_0 + (x_0 - a)(x - a) V = g^2 y^2.$$

Rovnici průmětu dotykové čáry obdržíme vyloučením litery z z rovnice této a z rovnice plochy, dle které v našem případě

$$S V = g^2 y^2.$$

Tu znásobíme rovnici poláry výrazem V a nahradíme SV jeho hodnotou $g^2 y^2$; vyjde

(11ᵃ) $$g^2 y^2 (V - x x_0) = (x_0 - a)(x - a) V^2.$$

Dotyková čára kužele opsaného z vrcholu na ose Ox promítá se do roviny xy v křivku stupně pátého.

Ve zvláštním případě $x_0 = a$ ($P_0 \equiv A$) rozpadá se čára ta v dvojnásobnou přímku Ox, přímku úběžnou a v kruh $V - ax = 0$, jenž výše byl nalezen.

Přejde-li P_0 v úběžný bod osy Ox, tedy $u_0 = 0 = y_0 = z_0$, zní rovnice poláry

(12) $$S x + V (x - a) = 0.$$

Průmět dotykové čáry opsaného válce rovnoběžného s osou Ox bude čára stupně 5.

(12ᵃ) $$(x - a) V^2 + g^2 x y^2 = 0, \quad g^2 = a^2 + c^2,$$

jejíž rovnice v polárních souřadnicích zní

$$r = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - g^2 \sin^2 2\varphi}}{2 \cos \varphi};$$

parametrická rovnice dotykové čáry zní

$$c^2 (1 + \cos^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 a c \cos \alpha = 0.$$

Inversí $r r_0 = g^2$ přechází čára tato v křivku stupně 3.

$$x_0 y_0^2 - a (x_0^2 + y_0^2) + g^2 x_0 = 0,$$

která je rodu 1. Na ní leží bod $x_0 = \frac{g^2}{a}$ příslušný k $x = a$, $y = 0$. Kruhy procházející body O, A protínají tedy čáru (12ᵃ) pouze ve dvou proměnných bodech.

Ke konstrukci se nejlépe hodí rovnice

$$2x = a \pm \sqrt{a^2 - g^2 \sin^2 2\varphi};$$

polární subnormála

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}$$

má zde hodnotu

$$r' = \frac{a\, r\, tg\, \varphi - g^2 \sin 2\varphi \cos \varphi}{\pm \sqrt{a^2 - g^2 \sin^2 2\varphi}}.$$

Z rovnice (12ª) derivováním nalezneme po jednoduché transformaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g^2 \sin^2 2\varphi - g^2 \sin^2 \varphi - r^2}{g^2 \sin 2\varphi . \cos 2\varphi}.$$

Pro tečný válec ve směru osy Oy máme v (10) $x_0 = z_0 = 0 = u_0$, takže dotyková čára se rozpadá v řez s rovinou $y = 0$ a v čáru na ploše druhého stupně

(13) $$S + V = g^2;$$

eliminaci z provedeme opět násobením výrazem V, a obdržíme

$$V^2 = g^2 x^2,$$

t. j.

(13ª) $$x^2 + y^2 = g\, x, \quad g = \pm \sqrt{a^2 + c^2}.$$

„Tečný válec isogonální plochy rovnoběžný s osou Oy rozpadá se ve dvě plochy válcové, jichž řídící čáry na ploše isogonální se promítají v kruhy (13ª).“

Z (13ª) vychází pro polární souřadnice

(13ᵇ) $$r = g \cos \varphi = a \cos \varphi + c \cos \alpha \sin \varphi,$$

tedy

(13ᶜ) $$c \cos \alpha\, tg\, \varphi = -a + g.$$

Dále máme z (13ᵇ)

(13ᵈ) $$x = g \cos^2 \varphi, \quad y = g \sin \varphi \cos \varphi,$$

a přímo

$$z^2 = c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi = c^2 \sin^2 \varphi - c^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi,$$

takže s použitím (13ᶜ) vychází

$$z^2 = c^2 \sin^2 \varphi - (-a + g)^2 \cos^2 \varphi,$$

t. j.

(13ᵉ) $$z^2 = c^2 - [c^2 + (a - g)^2] \cos^2 \varphi = c^2 - 2\,(g^2 - a\, g) \cos^2 \varphi.$$

Vyloučíme-li φ z (13ᵉ) a z první rovnice (13ᵈ), vyjde

$$z^2 = c^2 - \frac{c^2 + (a - g)^2}{g}\, x \quad \text{čili} \quad z^2 = c^2 + 2\,(a - g)\, x,$$

jakožto rovnice průmětu dotykové čáry do roviny nárysné Oxy. Válec tečný je kolmý na nárysnu, a tato čára tvoří *obrys plochy* v nárysu. Tento nárysný obrys plochy isogonální sestává ze dvou parabol*)

*) Skutečnou vlastnost obrysu mají přirozeně pouze části těchto parabol obsažené mezi oběma průsečíky.

$$
(13^f) \qquad \begin{aligned} z^2 &= -2(g-a)\left(x - \frac{g+a}{2}\right), \\ z^2 &= 2(g+a)\left(x + \frac{g-a}{2}\right), \quad g = +\sqrt{a^2+c^2}, \end{aligned}
$$

jež mají společnou osu Ox a společné ohnisko A, takže se kolmo protínají a sice ve dvou bodech osy Oz

$$x = 0, \quad z = \pm c.$$

Je předem jasno, že vrcholy těchto parabol

$$x = \frac{a \pm g}{2}, \quad z = 0 = y$$

jsou průměty konců průměru kruhu K rovnoběžného s osou Ox.

Abychom zjednodušili výpočet, znamenejme opětně

$$g = \pm \sqrt{a^2 + c^2},$$

takže pak paraboly (13^f) jsou zahrnuty tvarem

$$z^2 = 2(a-g)\left(x - \frac{a+g}{2}\right)$$

a rovnice válce promítajícího do roviny xy jest

$$x^2 + y^2 = gx.$$

Průsečnice obou posledních ploch je dotyková čára naše; sečteme-li tyto rovnice, vyjde

$$(13^g) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (2a - g)x + c^2, \quad g = \pm\sqrt{a^2+c^2}$$

t. j. čáry dotykové opsaných válců ve směru osy Oy jsou sférické.

Obě koule obsahují společný bod $x = 0 = z$, $y = c$.

O normálách plochy isogonální v bodech těchto čar bude jednáno později.

Uvažujme ještě průsečnice plochy isogonální s kruhovými válci

$$(14) \qquad x^2 + y^2 - 2px = 0,$$

které mají své osy v rovině Oxz a procházejí dvojnou přímkou Oz. Vložíme-li do rovnice (4) hodnoty

$$x^2 + y^2 = 2px, \quad y^2 = 2px - x^2,$$

vyjde

$$2p[z^2 + 2(p-a)x + a^2] = (a^2 + c^2)(2p - x),$$

při čemž pominut nezajímavý činitel x. Průsečnice válců (14) s plochou isogonální promítají se tedy do roviny Oxz v souosé paraboly

$$(14^a) \qquad z^2 = c^2 - \frac{a^2 + c^2 + 4p^2 - 4ap}{2p}x,$$

které procházejí společnými body na ose $O z$ ($z = \pm c$), a jsou tyto průsečnice vesměs čáry sférické, neboť z rovnic (14) a (14ᵃ) vychází

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 - \frac{a^2 + c^2 - 4 a p}{2 p} x.$$

Parabola (14ᵃ) se rozpadne v přímky, je-li

$$2 p = a \pm i c,$$

načež řez plochy isogonální s válcem (14) přejde v soustavu dvou kruhů na rovinách $z = c$ a $z = -c$.

Na ploše isogonální leží tedy čtyři kruhy pomyslné

$$x^2 + y^2 = (a + i c) x, \quad z = \pm c,$$
$$x^2 + y^2 = (a - i c) x, \quad z = \pm c.$$

5. Zajímavé vlastnosti o sobě a pro theorii plochy isogonální vykazují čáry $\alpha =$ konst. Z rovnic (2) plyne především

(15) $$x + i y = \frac{a + i c \cos \alpha}{2} + \frac{a - i c \cos \alpha}{2} e^{2 i \varphi},$$

z čehož vychází, že

„průmět čáry stálého α je kruh procházející body A, O."

Střed tohoto kruhu je bod

(S) $$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{c}{2} \cos \alpha.$$

Že bod A leží na kruhu (15), vychází volbou $\varphi = 0$; poněvadž střed S leží na ose bodů O a A, musí kruh obsahovati též bod O.

Znamenejme γ úhel $A O S$, takže bude

$$a + i c \cos \alpha = \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \alpha}\, e^{i \gamma},$$

při čemž

(15ᵃ) $$\varrho = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \alpha} = \overline{O S}$$

je poloměr kruhu (15).

Čáru $\alpha =$ konst. znamenati budeme A, její půdorys, t. j. kruh (15) pak obvyklým způsobem A_1.

Čára A je sférická. Abychom to ukázali, hledejme konstanty m, n, p takové, aby koule

(α) $$x^2 + y^2 + z^2 = m x + n y + p$$

obsahovala naši čáru. Podle (3) jest

(β) $$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \cos^2 \varphi + 2 a c \cos \alpha \sin \varphi \cos \varphi + c^2 \sin^2 \varphi,$$

a přímo dle (2)

$$(\beta') \qquad m\,x + n\,y + p = (m\,a + p)\cos^2\varphi + (n\,c\cos\alpha + p)\sin^2\varphi$$
$$+ (m\,c\cos\alpha + n\,a)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Rovnice (α) bude splněna pro body čáry Λ, podaří-li se určiti konstanty m, n, p tak, aby pravé strany rovnic (β) (β') splynuly. K tomu účelu máme rovnice

$$m\,a + p = a^2, \quad n\,c\cos\alpha + p = c^2, \quad m\,c\cos\alpha + n\,a = 2\,a\,c\cos\alpha;$$

odečtením prvních dvou vychází

$$-m\,a + n\,c\cos\alpha = c^2 - a^2.$$

Z posledních dvou rovnic vypočteme při označení (15^a)

$$(15^b) \qquad \begin{aligned} 4\,\varrho^2 m &= a\,(4\,\varrho^2 - c^2\sin^2\alpha),\\ 4\,\varrho^2 n &= (a^2 + c^2)\,c\cos\alpha, \end{aligned}$$

načež obdržíme

$$4\,\varrho^2 p = a^2 c^2 \sin^2\alpha,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Čára Λ prochází bodem A (a sice odpovídá tento bod parametru $\varphi = 0$), tedy jím prochází také naše koule. Její střed znamenejme V; jeho souřadnice jsou

$$x = \frac{m}{2}, \quad y = \frac{n}{2}, \quad z = 0,$$

a směrnice přímky $A\,V$ bude dle toho

$$\frac{n}{m - 2\,a} = -\frac{(a^2 + c^2)\,c\cos\alpha}{a\,(4\,\varrho^2 + c^2\sin^2\alpha)} = -\frac{c}{a}\cos\alpha = -\,tg\,\gamma;$$

tu jest γ úhel přímky $O\,S$ s osou $O\,x$, takže $-\gamma$ jest úhel přímky $A\,S$ s osou $O\,x$, t. j. směrnice přímky $A\,V$ splývá se směrnicí přímky $A\,S$, a tedy

„střed koule V leží na průměru $A\,S$ kruhu Λ_1."

Z toho vychází, že kruh Λ_1 se v bodě A dotýká koule obsahující čáru Λ, a že tedy čára Λ je průseč koule s přímým kruhovým válcem, který se jí v bodě A dotýká. Taková čára podle Eudoxe Knidského sluje hyppopédou, a nazval ji Schiapparelli sférickou lemniskatou.*)

Plocha isogonální obsahuje tedy spojitou řadu hyppopéd, a chceme vyšetřiti čáru v rovině základní $O\,x\,y$, kterou naplňují středy koulí těmito hyppopédami určených.

Nalezené hodnoty $2\,x = m$, $2\,y = n$ podávají pro souřadnice x, y středu koule V výrazy

---

*) Schiapparelli, Le sfere omocentriche di Eudosso, di Callippo e di Aristotele (Publicazioni del Reale osservatorio di Brera in Milano, n° IX, U. Hoepli, 1875.) Srov. F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches, Coimbre, 1909; dílu II. str. 324.

$$2x = a\,\frac{a^2 - c^2 + 2c^2\cos^2\alpha}{a^2 + c^2\cos^2\alpha},$$

$$2y = \frac{(a^2 + c^2)\,c\cos\alpha}{a^2 + c^2\cos^2\alpha},$$

které jsou kvadratické racionální funkce parametru $\cos\alpha$; hledaná čára je kuželosečka. Nekonečně vzdálené její body odpovídají hodnotám

$$c\cos\alpha = \pm\, a\, i\,;$$

vložíme-li tyto hodnoty do výrazu

$$\frac{y}{x} = \frac{(a^2 + c^2)\,c\cos\alpha}{a\,(a^2 - c^2 + 2c^2\cos^2\alpha)},$$

obdržíme pro směrnice asymptot hodnoty $\mp i$, t. j. naše kuželosečka je kruh. Abychom jeho polohu blíže určili, položme

$$c\cos\alpha = a\,t\,;$$

vyjde

$$x = a - \frac{a^2 + c^2}{2a}\,\frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{a^2 + c^2}{2a}\,\frac{t}{1+t^2}.$$

Pišme ještě

$$t = tg\,\frac{\psi}{2},$$

a znamenejme $x_0\ y_0$ souřadnice středu V; bude

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{3a^2 - c^2}{4a} - \frac{a^2 + c^2}{4a}\cos\psi \\ y_0 &= \frac{a^2 + c^2}{4a}\sin\psi, \quad tg\,\frac{\psi}{2} = \frac{c}{a}\cos a = tg\,\gamma. \end{aligned}\right.$$

Tyto rovnice podávají střed koule V, na níž leží hyppopéda $\alpha =$ konst.; veškery hyppopédy plochy isogonální mají své středy na kruhu

$$(L)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{3a^2 - c^2}{4a} + \frac{a^2 + c^2}{4a}\cos\omega \\ y &= \frac{a^2 + c^2}{4a}\sin\omega \end{aligned}\right.$$

který obsahuje bod A a střed $B\left(\frac{a}{2}, \frac{c}{2}\right)$ kruhu (K), a má svůj střed na ose Ox.

Neboť rovnice $y = \frac{c}{2}$ podává

$$\sin\omega = \frac{2ac}{a^2 + c^2} = \sin 2\vartheta,$$

$$x = \frac{3a^2 - c^2}{4a} + \frac{a^2 + c^2}{4a}\cos 2\vartheta = \frac{a}{2}.$$

Střed koule hyppopédy α = konst. odpovídá parametru

$$\omega = \pi - \psi, \quad tg\frac{\psi}{2} = \frac{c}{a}\cos\alpha = tg\,\gamma\,;$$

z trojúhelníku $O\,S\,A$ vychází, že tento parametr jest

$$\omega = \pi - 2\gamma = \sphericalangle O\,S\,A.$$

Rovnice (2) čáry A můžeme psáti

$$(A)\quad \begin{cases} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos 2\varphi + \frac{c}{2}\cos\alpha\sin 2\varphi, \\ y = \frac{c}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\sin 2\varphi - \frac{c}{2}\cos\alpha\cos 2\varphi, \\ z = c\sin\alpha\sin\varphi\,; \end{cases}$$

tečna hyppopédy má pak rovnice

$$(17)\quad \frac{X - x}{-a\sin 2\varphi + c\cos\alpha\cos 2\varphi} = \frac{Y - y}{a\cos 2\varphi + c\cos\alpha\sin 2\varphi} = \\ = \frac{Z - z}{c\sin\alpha\cos\varphi}.$$

Nás zajímá hlavně stopa tečny na rovině $x\,y$; klademe-li $Z = 0$, vyjdou pro souřadnice $X\;Y$ této stopy výrazy

$$X = x - tg\,\varphi\,(-a\sin 2\varphi + c\cos\alpha\cos 2\varphi),$$
$$Y = y - tg\,\varphi\,(a\cos 2\varphi + c\cos\alpha\sin 2\varphi),$$

čili po zjednodušení

$$(18^a)\quad \begin{cases} X - a = (a + c\cos\alpha\, tg\,\varphi)\sin^2\varphi \\ \quad\;\; Y = (a\,tg\,\varphi - c\cos\alpha)\sin^2\varphi, \end{cases}$$

a odtud

$$X - a + i\,Y = (a - i\,c\cos\alpha)\,e^{i\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

t. j.

$$(18)\quad X - a + i\,Y = 2\,\varrho\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,e^{i(\varphi-\gamma)}.$$

Zvolme prodlouženou přímku $S\,A$ za osu polární, bod A za pól, pak svírá polární osa s přímkou $A\,x$ úhel $-\gamma$, s přímkou $A\,T_1$ spojující stopu tečny T_1 s bodem A úhel $(\varphi - \gamma) + \gamma = \varphi$, a polární souřadnice stopy T_1 budou

$$(18^*)\quad r = 2\,\varrho\,\frac{\sin^2\omega}{\cos\omega},\quad \omega = \varphi,$$

při čemž poloměr kruhu A_1 t. j. ϱ je dán vzorcem (15^a). Rovnice (18^*) stanoví zároveň křivku, kterou opisuje stopa tečny, a která je tedy stopou rozvinutelné plochy tečen hyppopédy A.

„Stopa tečny hyppopédy α = konst. na rovině $x\,y$ opisuje cissoidu Diokletovu (18*).“

První průmět tečny $M_1 T_1$ je dán bezprostředně jako tečna kruhu A_1, a stačí znáti směr přímky $A\,T_1$ spojující stopu tečny s bodem A, aby bod T_1 byl konstruktivně stanoven.

Úhel $O\,M_1\,A$ jest obvodový úhel kruhu A_1 příslušný k stálému oblouku $O\,A$, jehož úhel středový jest $\pi - 2\gamma$, tedy

$$\sphericalangle O\,M_1 A = \frac{\pi}{2} - \gamma.$$

V trojúhelníku $O\,A\,M_1$ dávají vnitřní úhly $O\,(\varphi)$ a $M_1\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ za součet vnější úhel $X\,A\,M_1$, tedy

$$X\widehat{A}M_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma + \varphi = \frac{\pi}{2} + (\varphi - \gamma);$$

avšak dle (18) jest $\varphi - \gamma$ úhel sevřený osou $A\,x$ a přímkou $A\,T_1$, a tedy poslední rovnice ukazuje, že přímka $A\,M_1$ stojí kolmo na $A\,T_1$.

„Půdorysná stopa tečny hyppopédy leží na kolmici vztýčené v bodě A na přímku $A\,M_1$ spojující bod A s průmětem bodu na hyppopédě.“

Odtud vychází pohodlná konstrukce nárysu tečny $M_2 T_2$, poněvadž T_2 leží na ose $O\,x$.

Rovněž pohodlně se strojí stopy normální roviny $\mathfrak{N}$ u hyppopédy; neboť normální rovina této sférické čáry prochází středem koule V, který jsa na rovině $x\,y$ náleží půdorysné stopě $\mathfrak{N}^I$.

„Půdorysná stopa normální roviny $\mathfrak{N}^I$ u hyppopédy je kolmice spuštěná ze středu koule V na průmět tečny.“

Stopa oskulační roviny $\mathfrak{O}^I$ je tečnou Diokletovy cissoidy (T_1), a tedy také určení roviny oskulační nepodléhá obtížím.

Můžeme také snadno strojiti stopy tečné roviny $\mathfrak{T}$ plochy isogonální (obr. 1). Vedeme tečnu ke kruhu Γ; ta protíná rovinu $O\,x\,y$ v bodě T' na přímce $O\,M_1$, jejž sestrojíme pomocí obrazce sklopeného; tímto bodem a bodem T_1 jest určena stopa $\mathfrak{T}^I$.

Při konstrukci stopy tečné roviny v libovolném bodě plochy isogonální nejsložitější operací jest určení bodu S, t. j. středu kruhu opsaného o trojúhelník $O\,A\,M_1$, jehož třeba jest ke konstrukci průmětu tečny $M_1 T_1$.

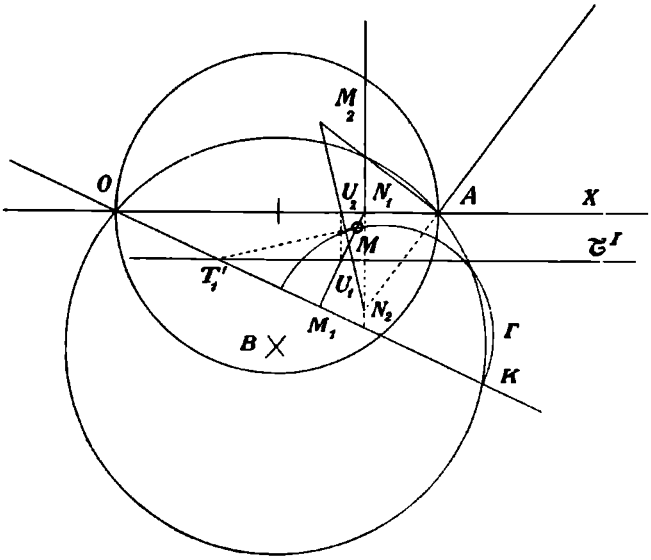
Doporučuje se tedy určiti jiným způsobem bod T_1; k tomu cíli vede rovnice

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{a}{\cos\varphi},$$

která vychází z rovnic (18ᵃ); bod T_1 leží na této přímce stojící kolmo na přímce $O\,M_1\,K$; její vzdálenost od O má hodnotu $a \sec\varphi = O\,H$, při čemž H je průsek přímky $O\,M_1$ s přímkou $A\,C$.

„**Druhou přímku procházející stopou T_1 obdržíme, postavíme-li na přímku $O\,M_1$ kolmici v její průseku s přímkou $A\,C$.**“

Jiná konstrukce tečné roviny spočívá v užití čáry (obr. 2.) průsečné s válcem $x^2 + y^2 = g^2$, kde g je libovolná stálá (pro daný bod M



Obr. 2.

jest $g = O\,M_1$); čára ta se z bodu A promítá rotačním kuželem, jehož osa jest $A\,y$. Tečná rovina válce v bodě M má stopy $M_1\,N_1$ a $N_1\,N_2 \perp O\,x$, tečná rovina rotačního kužele má nárysnou stopu $A\,N_2 \perp A\,M_2$. Neboť jest přímka $A\,M$ kolmá na nárysnou stopu roviny tečné, a promítá se do nárysny v kolmici na tuto stopu.

Průsečík nárysných stop tečných rovin kužele a válce je pro průsečnici obou ploch nárysná stopa tečny N, takže tečna $M\,N$ průsečné čáry jest určena; její stopa půdorysná U strojí se obvyklým způsobem.

6. Parametrické vyjádření bodu na hyppopédě obsažené v rovnicích ($\varDelta$) upraví se zavedením parametru

$$u = e^{i\varphi}$$

takto:

$$x = \frac{(a - i\,c\cos\alpha)\,u^4 + 2\,a\,u^2 + (a + i\,c\cos\alpha)}{4\,u^2}$$

$$y = \frac{-i\,(a - i\,c\cos\alpha)\,u^4 + 2\,c\cos\alpha\,u^2 + i\,(a + i\,c\cos\alpha)}{4\,u^2}$$

$$z = -i\,c\sin\alpha\,\frac{u^2 - 1}{2\,u}\,.$$

Rovina $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ protne hyppopédu ve čtyřech bodech, jichž parametry hoví rovnici

$$(19)\qquad \begin{aligned}(A - i\,B)\,(a - i\,c\cos\alpha)\,u^4 - 2\,C\,i\,c\sin\alpha\,(u^3 - u) + 4\,D\,u^2 + \\ + (A + i\,B)\,(a + i\,c\cos\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Píšeme-li tuto rovnici ve tvaru

$$(19^a)\qquad u^4 - \mathfrak{f}_1 u^3 + \mathfrak{f}_2 u^2 - \mathfrak{f}_3 u + \mathfrak{f}_4 = 0,$$

takže $\mathfrak{f}_\nu$ jsou základní úkony souměrné kořenů $u_1\,u_2\,u_3\,u_4$, hoví součinitelé podmínce

$$(19^b)\qquad \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_3 = 0,$$

a naopak každá čtveřina bodů, jejíž parametry hoví rovnici (19^b), leží na jisté rovině.

Levou stranu této rovnice možno psáti

$$(1 + u_1 u_2)\,(u_3 + u_4) + (1 + u_3 u_4)\,(u_1 + u_2) = 0,$$

a tak lze podmínce (19^b) uděliti tvar

$$(19^c)\qquad \frac{1 + u_1 u_2}{u_1 + u_2} + \frac{1 + u_3 u_4}{u_3 + u_4} = 0,$$

takže se jí vyhoví nejobecnějším způsobem, klade-li se

$$\frac{1 + u_1 u_2}{u_1 + u_2} = \cos\omega\,, \qquad \frac{1 + u_3 u_4}{u_3 + u_4} = -\cos\omega\,,$$

vyloučí-li se prozatím rušivý případ $u_1 + u_2 = 0$.

Rovnice

$$\frac{1 + u_1 u_2}{u_1 + u_2} = \cos\omega$$

definuje při stálém ω kvadratickou involuci na kruhu $x^2 + y^2 =$ konst., jejíž dvojné body jsou $u' = e^{i\omega}$, $u'' = e^{-i\omega}$; tečny kruhu v těchto bodech se protnou na ose $O\,x$, t j. střed involuce jest určitý bod P osy $O\,x$.

Druhá involuce

$$\frac{1 + u_3 u_4}{u_3 + u_4} = -\cos\omega = \cos(\omega + \pi)$$

má střed v bodě Q symmetricky položeném s bodem P vůči bodu O.

Libovolný paprsek svazku P stanoví na kruhu $x^2 + y^2 =$ konst. dva body $u_1\,u_2$, a rovněž libovolný paprsek svazku Q protíná kruh v bodech $u_3\,u_4$, a takto stanoveným čtyřem bodům odpovídají parametry obecné čtveřiny rovinné.

Nesestává-li dvojice $u_1\,u_2$ z hodnot ± 1, které podávají bod dvojný A, bude rovnice $u_1 + u_2 = 0$ míti za následek $u_3 + u_4 = 0$, a tak tento případ bude obsažen v obecném, a sice splývají zde body P a Q s bodem O.

Tím je dáno řešení úlohy určiti čtvrtý průsek hyppopédy s rovinou danou třemi body jejími. Jsou-li body dané $M^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, 3$), vedeme přímky $O\,M_1^{(\nu)}$ a kruh $x^2 + y^2 = k^2$ libovolného poloměru k; přímce $O\,M_1^{(\nu)}$

přísluší určitý úhel, který jest v mezích 0 a π, aneb π a 2π, jak jest souřadnice $z^{(\nu)}$ kladná neb záporná. Takto určené směry $\varphi^{(\nu)}$ stanoví na kruhu tři body $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$; dva z nich $\varphi_1\ \varphi_2$ spojíme přímkou, jež protne $O\,x$ v určitém bodě P, jeho symetrický protějšek Q vzhledem k bodu O určuje pak s bodem třetím φ_3 přímku, na níž leží bod φ_4 příslušný ke čtvrtému průseku roviny s hyppopédou.

Tím zároveň dána konstrukce tětiv hyppopédy, které protínají danou její tětivu $u_3\,u_4$. Patrně naplňují plochu druhého stupně. Neboť páry bodů na representačním kruhu $x^2 + y^2 = k^2$ příslušné tětivám $u_1\ u_2$ tvoří involuci o středu P, podobně páry tětiv jako $u_3\,u_4$ definují involuci o středu Q; máme tak dvě řady tětiv, a každé dvě tětivy různých řad se protínají.

Tětivy příslušné k involuci P protínají tedy tři pevné tětivy z involuce Q, a tvoří tedy přímkovou plochu 2. stupně.

Každá tětiva $u_3\,u_4$ protne dvě tečny hyppopédy; tyto tečny příslušejí k úhlům $\varphi = \omega$, $\varphi = 2\pi - \omega$, t. j. k samodružným bodům involuce P.

Dvě tečny hyppopédy, které se protínají, příslušejí samodružným bodům involucí P, resp. Q ($u_1 = u_2$, $u_3 = u_4$), takže má-li jedna paramétr $\varphi = \omega$, má druhá paramétr $\pi + \omega$ aneb $\pi - \omega$.

Podle (17) mají tečny bodů $\varphi = \omega$ a $\varphi = \omega + \pi$ rovnoběžné půdorysy, body na čáře mají půdorysy společné, takže se liší pouze výškami z; tečny jejich leží v rovině kolmé na $O\,x\,y$.

Výšky bodů těch jsou $z = c \sin\alpha \sin\omega$ a $-z$, takže v průsečném bodě tečen bude

$$\frac{Z - z}{\cos\omega} + \frac{Z + z}{\cos\omega} = 0, \text{ t. j. } Z = 0.$$

„Tečny bodů hyppopédy φ a $\varphi + \pi$ se protínají na rovině základní $O\,x\,y$."

Tedy výše nalezená cissoida Diokletova je dvojnou čarou na rozvinutelné ploše tečen.

Z rovnic (17) máme tvar rovnic tečny

$$X - Z\,\frac{-a \sin 2\varphi + c \cos\alpha \cos 2\varphi}{c \sin\alpha \cos\varphi} = a + (a + c \cos\alpha\, tg\,\varphi) \sin^2\varphi$$

$$Y - Z\,\frac{a \cos 2\varphi + c \cos\alpha \sin 2\varphi}{c \sin\alpha \cos\varphi} = (a\, tg\,\varphi - c \cos\alpha) \sin^2\varphi\,;$$

pro průsek tečen v bodech φ a $\pi - \varphi$ nalezneme odečtením příslušných hodnot

$$Z\,\frac{2\,c \cos\alpha \cos 2\varphi}{c \sin\alpha \cos\varphi} = -\,2\,c \cos\alpha\, tg\,\varphi .\, \sin^2\varphi$$

$$Z\,\frac{2\,a \cos 2\varphi}{c \sin\alpha \cos\varphi} = -\,2\,a\, tg\,\varphi \sin^2\varphi\,,$$

rovnice totožné; tedy

$$Z = -c \sin\alpha \frac{\sin^3\varphi}{\cos 2\varphi}.$$

Odtud

$$\frac{Z - z}{c \sin\alpha \cos\varphi} = -\frac{1}{2} tg\, 2\varphi,$$

takže rovnice (17) poskytnou pro souřadnice průseku tečen

$$X = x + \frac{1}{2} tg\, 2\varphi\, (a \sin 2\varphi - c \cos\alpha \cos 2\varphi)$$

$$Y = y - \frac{1}{2} tg\, 2\varphi\, (a \cos 2\varphi + c \cos\alpha \sin 2\varphi)$$

t. j. máme

$$(20) \quad \begin{cases} X = \dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} \sec 2\varphi, \; Y = \dfrac{c}{2} \cos\alpha - \dfrac{c}{2} \cos\alpha \sec 2\varphi \\ Z = -c \sin\alpha \dfrac{\sin^3\varphi}{\cos 2\varphi}. \end{cases}$$

Z rovnic těch vychází nejprvé

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{c \cos\alpha} = 1$$

t. j. průseky tečen v bodech φ a $\pi - \varphi$ naplňují čáru v rovině kolmé na Oxy, jejíž stopou je přímka AS.

Při známém nám označení (S)

$$a + i c \cos\alpha = 2 \varrho e^{i\gamma}$$

možno první dvě z našich rovnic spojiti v jednu

$$X + iY - \varrho e^{i\gamma} = \varrho e^{-i\gamma} \sec 2\varphi;$$

zavede-li se tedy bod S jako počátek, SA jako osa ξ nové pravoúhlé soustavy, má průsek tečen $(\varphi, \pi - \varphi)$ souřadnice

$$(20^a) \quad \xi = \varrho \sec 2\varphi, \eta = 0, \; \zeta = -c \sin\alpha \frac{\sin^3\varphi}{\cos 2\varphi}$$

V parametru

$$v = \sin\varphi$$

píší se tyto rovnice

$$\xi = \frac{\varrho}{1 - 2v^2}, \; \zeta = -c \sin\alpha \frac{v^3}{1 - 2v^2},$$

takže čára je racionální stupně a třídy třetí.

Pro eliminaci φ máme nejprvé

$$\zeta = \sigma (1 - \sec 2\varphi) \sin\varphi = \sigma\left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right) \sin\varphi,$$

$$\sigma = \frac{1}{2} c \sin\alpha,$$

načež se obdrží rovnice čáry ve tvaru

(20b) $$(\xi - \varrho)^3 = \frac{2\varrho^2}{\sigma^2} \xi \zeta^2.$$

Bod A je úvratníkem čáry a tečna jeho jest $A\,S$.

Abychom jinou vlastnost čáry (20) poznali, zaveďme polární souřadnice r, ω (pól A, osa $S\,A$)

$$\xi - \varrho + i\,\zeta = r\,e^{i\omega};$$

$$\xi - \varrho = \frac{2\,\varrho\,\sin^2\varphi}{\cos 2\,\varphi},\ \zeta = -c\,\sin\alpha\,\frac{\sin^3\varphi}{\cos 2\,\varphi},$$

$$tg\,\omega = -\frac{c\,\sin\alpha}{2\,\varrho}\sin\varphi,\quad \sin\varphi = -\frac{2\,\varrho}{c\,\sin\alpha}\,tg\,\omega.$$

Při označení

$$k = \frac{2\,\varrho}{c\,\sin\alpha}$$

tedy máme

$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{k^2\,tg^2\,\omega}{1 - 2\,k^2 tg^2\omega} = \frac{k^2\,\sin^2\omega}{\cos^2\omega - 2\,k^2\sin^2\omega}$$

takže

$$r\,e^{i\omega} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\,(2\,\varrho - i\,c\,\sin\alpha\,\sin\varphi) = \frac{k^2\,\sin^2\omega}{\cos^2\omega - 2\,k^2\,\sin^2\omega}\,2\,\varrho\,(1 + i\,tg\,\omega),$$

t. j. vychází

$$r = \frac{2\,k^2\,\varrho\,\sin^2\omega}{\cos\omega\,(\cos^2\omega - 2\,k^2\,\sin^2\omega)},$$

jakožto polární rovnice čáry (20) pro pól A, osu $S\,A$.

Inversí $r\,r_0 = g^2$ vychází čára

$$r_0 = g_1\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega} - g_1\,(1 + 2\,k^2)\cos\omega,\quad g_1 = \frac{g^2}{2\,k^2\,\varrho}.$$

Je tedy

$$r_0 = r_1 - r_2,\quad r_1 = g_1\frac{\cos\omega}{\sin^2\omega},\quad r_2 = g_1\,(1 + 2\,k^2)\cos\omega,$$

a čára (r_1) jest parabola

$$y^2 = g_1\,x,$$

čára (r_2) pak je kruh

$$x^2 + y^2 = g_1\,(1 + 2\,k^2)\,x,$$

při čemž počátek souřadnic je bod A, osa úseček ve směru $S\,A$.

„Čára (20) vznikne inversí pro pól A z cissoidy paraboly a kruhu, které se dotýkají ve vrcholu.“

Uvedená interpretace rovnice (19c) vede též ke konstrukci roviny oskulační, podávajíc čtvrtý průsek roviny oskulační s křivkou A.

XXXVI.

Zvolíme $u_1 = u_2 = u_3 = u$, načež $u_4 = u_0$ podává oskulační doplněk bodu u. Na representačním kruhu paramétru u vedeme tečnu bodu u, která stanoví na Ox bod P; jeho protějšek Q spojíme opět s u, přímka Qu protíná kruh v hledaném bodě u_0.

Na hyppopédě odpovídá bodu u bod M, bodu u_0 bod M_0; oskulační rovina bude určena tečnou bodu M a bodem M_0.

Konstrukce tato však často podává výsledky málo přesné, poněvadž bod M_0 bývá blízek tečně bodu M.

Rovnice (19^b) tu podává vztah mezi parametry u, u_0

$$u^3 + 3\,u_0\,u^2 + 3\,u + u_0 = 0\,;$$

odtud vychází, že daným bodem na hyppopédě lze vésti tři oskulační roviny. Souhrn trojic těch tvoří kubickou involuci, avšak dvě z těchto rovin jsou vždy pomyslné.

Nechť na representačním kruhu odpovídá u' řešení realnému; tečna v bodě u' stanoví bod P, $\overline{u_0 u'}$ stanoví bod Q, a jest $QO = OP$. Šine-li se pak bod u po kruhu opouštěje polohu u', otáčí se $u\,Q$ kol pevného bodu u_0, a body P, Q se pohybují v témž smyslu, při čemž jeden se bodu O blíží a druhý se od něho vzdaluje. Rovnost vzdáleností od bodu O vícekrátě nenastane, čímž tvrzení dokázáno.

7. Přeloží-li se počátek soustavy souřadnic do středu kruhu S a zvolí-li se osa SA za osu ξ, znějí transformační rovnice

$$x - \frac{a}{2} + i\left(y - \frac{c}{2}\cos\alpha\right) = e^{-i\gamma}\,(\xi + i\,\eta)\,,$$

takže kruh A_1

$$x - \frac{a}{2} + i\left(y - \frac{c}{2}\cos\alpha\right) = \left(\frac{a}{2} - i\,\frac{c}{2}\cos\alpha\right) e^{2i\varphi} = \varrho\, e^{2i\varphi - \gamma}\,,$$

bude vyjádřen rovnicí

$$\xi + i\,\eta = \varrho\, e^{2i\varphi}\,.$$

Zaveďme ještě označení

$$c \sin\alpha = b,$$

načež parametrické vyjádření hyppopédy se zjednoduší takto:

$$\xi = \varrho \cos 2\varphi,\quad \eta = \varrho \sin 2\varphi,\quad \zeta = b \sin\varphi. \tag{21}$$

Koule obsahující tuto hyppopédu má rovnici

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \frac{b^2}{2\varrho}\,\xi = \varrho^2 + \frac{b^2}{2}\,; \tag{22}$$

pro její poloměr R máme především

$$R^2 = \varrho^2 + \frac{1}{2}\,b^2 + \frac{b^4}{16\varrho^2}\,,\quad 4\,\varrho^2 = a^2 + c^2\cos^2\alpha,$$

tedy

$$R^2 = \frac{(b^2 + 4\varrho^2)^2}{16\varrho^2} = \frac{(a^2 + c^2)^2}{16\varrho^2}$$

$$R = \frac{b^2 + 4\varrho^2}{4\varrho} = \frac{a^2 + c^2}{4\varrho}. \tag{22*}$$

Středy koulí V naplňují kružnici (L); v souřadnicích s počátkem A má bod V souřadnice

$$x_0 = -R\cos\gamma = -\frac{g^2}{2a}\cos^2\gamma, \quad y_0 = R\sin\gamma = \frac{g^2}{2a}\sin\gamma\cos\gamma,$$

při čemž jako na dále značí

$$g^2 = a^2 + c^2,$$

a rovnice koule obsahující hyppopédu zní

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{g^2}{a}x\cos^2\gamma - \frac{g^2}{a}y\sin\gamma\cos\gamma = 0.$$

Zaveďme parametr $u = e^{2i\gamma}$, načež se dá tato rovnice psáti

$$2\Sigma u + \frac{g^2}{2a}[(x + iy)u^2 + x - iy] = 0 \quad \left(\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \frac{g^2}{2a}x\right),$$

a odtud nacházíme jakožto rovnici obalové plochy těchto koulí

$$\Sigma^2 = \frac{g^4}{4a^2}(x^2 + y^2).$$

To však je rovnice plochy kotálnic, vytvořených kotálením kruhu poloměru $\frac{g^2}{4a}$ po stejně velkém kruhu (L), s úvratným bodem v A.

„Koule různých hyppopéd mají své středy na kruhu (L) a dotýkají se plochy kotálnic 4. stupně, příslušné k tomuto kruhu (L) jako základnímu, podél její povrchových kruhů."

Rovina obsahující charakteristický kruh má rovnici

$$x\sin 2\gamma + y\cos 2\gamma = 0.$$

Danému kruhu (L) a tedy dané ploše kotálnic 4. stupně odpovídá nekonečně mnoho ploch isogonálních, jejichž hyppopédami stanovené koule se plochy kotálnic dotýkají podél její kruhů. Tyto plochy isogonální mají společný bod singulární A a společnou rovinu symetrie Axz.

Hyppopéda (21) buď dána konstantami ϱ a b, a tažme se po plochách isogonálních, na nichž tato hyppopéda leží. Konstanty těchto ploch a, c a parametr α jsou vázány rovnicemi

$$c\sin\alpha = b, \quad a^2 + c^2\cos^2\alpha = 4\varrho^2,$$

z nichž vychází

$$a^2 + c^2 = b^2 + 4\varrho^2 = g^2.$$

Zaveďme jako neodvisle proměnnou veličinu úhel γ daný rovnicí

$$a + i\,c\cos\alpha = 2\,\varrho\,e^{i\gamma},$$

takže

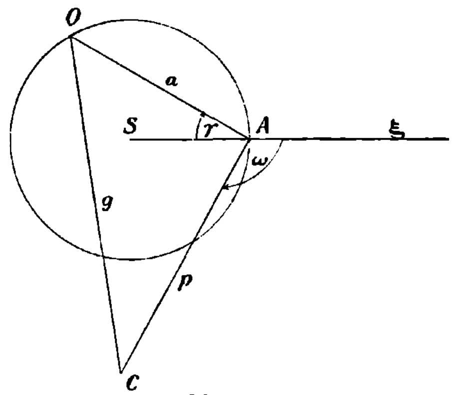
$$(23)\qquad \begin{cases} a = 2\,\varrho\cos\gamma, & c\cos\alpha = 2\,\varrho\sin\gamma, \\ tg\,\alpha = \dfrac{b}{2\,\varrho\sin\gamma}. & \end{cases}$$

Stopa O přímky dvojné (obr. 3.) má souřadnice $\xi_0\,\eta_0$, pro něž z transf. rovnice vychází $(x = 0 = y)$

$$\xi_0 + i\,\eta_0 = -e^{i\gamma}\left(\frac{a}{2} + i\frac{c}{2}\cos\alpha\right) = -\varrho\,e^{2i\gamma},$$

tj. bod O má souřadnice

$$(24)\qquad \xi_0 = -\varrho\cos 2\gamma,\quad \eta_0 = -\varrho\sin 2\gamma.$$



Obr. 3.

„Každá hyppopéda náleží nekonečně mnohým plochám isogonálním; jejich singulární bod A jest dvojný bod hyppopédy a jejich dvojné přímky jsou přímky kruhového válce

$$\xi^2 + \eta^2 = \varrho^2,$$

který hyppopédu určuje."

Je-li $O\,z$ libovolná přímka na tomto válci, bude tedy úhel ϑ sevřený průvodičem $\overline{A\,M}$ bodu M na hyppopédě a rovinou $M\,O\,z$ závislý toliko na poloze přímky $O\,z$, t. j. na úhlu γ:

$$\sin\vartheta = \frac{a}{g} = \frac{2\varrho}{g}\cos\gamma.$$

Stanovme ještě geometrické místo bodů C, které uvažovaným plochám isogonálním odpovídají. Zvolme bod A za pól, $A\,\xi$ za osu polárních souřadnic; v pravoúhlém trojúhelníku $O\,A\,C$ má přepona $O\,C$ délku stálou

$$g = \sqrt{b^2 + 4\,\varrho^2},$$

strana $O\,A = a = 2\,\varrho\cos\gamma$, a tedy druhá odvěsna $A\,C = p$, polární průvodič bodu C, je vázána vztahem

$$p^2 = g^2 - a^2 = b^2 + 4\,\varrho^2\sin^2\gamma,$$

t. j. zavedeme-li polární úhel $\omega = \xi\,A\,C = \dfrac{\pi}{2} + \gamma$

$$(25)\qquad p^2 = b^2 + 4\,\varrho^2\cos^2\omega.$$

Cartesianská rovnice (počátek A, osa $A\,\xi$) této čáry (C) zní

$$(x^2+y^2)^2 = b^2(x^2+y^2) + 4\,\varrho^2 x^2$$

čili

(25*) $$(x^2+y^2)^2 = g^2 x^2 + b^2 y^2:$$

„Body C příslušné k různým plochám isogonálním procházejícím danou hyppopédou (21) naplňují Boothovu lemniskatu, t. j. středovou úpatnici ellipsy, jejíž polouosy v délce g, b jsou položeny v osách $A\,\xi$, $A\,\eta$.“ — Je-li L bod kruhu (L) na ose $O\,x$, jest $L\,V \perp A\,V$, tedy v našem případě „b o d L o p i s u j e p r ů m ě r s t o p y k o u l e k o l m ý n a $A\,V$“.

8. Tečna hyppopédy dané rovnicemi

(21*) $$x = \varrho\cos 2\,\varphi,\quad y = \varrho\sin 2\,\varphi,\quad z = b\sin\varphi$$

se vyjádří rovnicemi

(26) $$\frac{X-x}{-2\,\varrho\sin 2\,\varphi} = \frac{Y-y}{2\,\varrho\cos 2\,\varphi} = \frac{Z-z}{b\cos\varphi} = \lambda,$$

takže plocha tečen hyppopédy je parametricky vyjádřena takto

$$X = \varrho\,(\cos 2\,\varphi - 2\,\lambda\sin 2\,\varphi),\quad Y = \varrho\,(\sin 2\,\varphi + 2\,\lambda\cos 2\,\varphi),$$
$$Z = b\,(\sin\varphi + \lambda\cos\varphi),$$

poznamenejme též

$$X + i\,Y = (1 + 2\,i\,\lambda)\,\varrho\,e^{2i\varphi};$$

čáry λ = konst. na ploše tečen se tedy do roviny $x\,y$ promítají v kruhy soustředné; jsou to čáry rovněž hyppopédy.

Položme jako v čl. 6.

$$e^{i\varphi} = u,$$

takže tu souřadnice bodu na hyppopédě budou

$$x = \varrho\,\frac{u^4+1}{2\,u^2},\quad y = -\,i\,\varrho\,\frac{u^4-1}{2\,u^2},\quad z = -\,i\,b\,\frac{u^2-1}{2\,u};$$

rovina $A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ protne čáru v bodech, jichž parametry hoví rovnici

$$(A - B\,i)\,\varrho\,u^4 - C\,i\,b\,(u^3 - u) + 2\,D\,u^2 + (A + i\,B)\,\varrho = 0.$$

Pro rovnici stupně 4.

$$a_0\,u^4 + 4\,a_1\,u^3 + 6\,a_2\,u^2 + 4\,a_3\,u + a_4 = 0$$

mají invarianty

$$S = a_0\,a_4 - 4\,a_1\,a_3 + 3\,a_2^2,$$
$$T = a_0\,a_2\,a_4 + 2\,a_1\,a_2\,a_3 - a_0\,a_3^2 - a_1^2\,a_4 - a_2^3$$

m. j. ten význam, že pro $S = 0$ tvoří kořeny čtveřinu ekvianharmonickou, a pro $T = 0$ čtveřinu harmonickou, kdežto

$$\Delta = S^3 - 27\,T^2$$

je diskriminant rovnice.

V našem případě se snadno vypočte

$$S = (A^2 + B^2)\,\varrho^2 - \frac{C^2 b^2}{4} + \frac{D^2}{3},$$

$$T = \frac{1}{3}(A^2 + B^2)\,D\,\varrho^2 + \frac{b^2}{24}\,C^2 D + \frac{b^2\varrho}{8}\,A\,C^2 - \frac{1}{27}\,D^3,$$

takže vychází:

„Roviny ekvianharmonických čtveřin na hyppopédě obalují rotační hyperboloid dvouplochý

$$\frac{4\,z^2}{b^2} - \frac{x^2 + y^2}{3\,\varrho^2} = 1.\text{“}$$

„Obalová plocha rovin harmonických čtveřin je třetí třídy.“

Z rovnice $\Delta = 0$ vychází:

„Danou přímkou prochází obecně šest tečných rovin Eudoxovy hyppopédy.“

Známá věta,*) že se hyppopéda promítá ze svého dvojného bodu A rotačním kuželem, vychází bezprostředně z rovnic (21*), jež dávají

$$\frac{x - \varrho}{z} = -\frac{2\,\varrho}{b}\,\sin\varphi\,,\ \frac{y}{z} = \frac{2\,\varrho}{b}\,\cos\varphi,$$

a odtud rovnice rotačního kužele

$$(x - \varrho)^2 + y^2 = \frac{4\,\varrho^2}{b^2}\,z^2.$$

Jeho vrchol jest A a rotační osa jest přímka $A\,z$. Horizontální řez $z = 2\,b$ tohoto kužele je kruh, jehož průmět

$$x^2 + y^2 = 2\,\varrho\,x$$

prochází středem S, t. j. řečený kruh protíná osu válce.

Průmět hyppopédy do její roviny symetrální [která v rovnicích (21*) je rovinou $S\,x\,z$] $S\,A\,z$ plyne z první a třetí rovnice (21*), které dávají

$$x - \varrho = -2\,\varrho\,\sin^2\varphi = -\frac{2\,\varrho}{b^2}\,z^2,$$

takže průmět uvažovaný jest parabola

$$z^2 = -\frac{b^2}{2\,\varrho}\,(x - \varrho)$$

s osou $A\,S$, vrcholem A, délka parametru $-\frac{b^2}{4\,\varrho}$ rovná se vzdálenosti $S\,V$ středu koule od stopy osy válce S.

*) Schiaparelli, l. c.

Na této parabole leží bod $x = \frac{\varrho}{2}$, $z = \frac{b}{2}$ a bod koule (obr. 4

(*U*) $$x = -\varrho,\ z = b,\ y = 0.$$

Řídící přímka paraboly má od vrcholu A vzdálenost

$$\frac{b^2}{8\varrho} = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{4a} \cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 tg^2 \gamma}{4a} \cos\gamma,$$

neboť

$$2\varrho = \frac{a}{\cos\gamma},\quad c\cos\alpha = a\, tg\,\gamma.$$

Parabola tato určuje válec kolmý na její rovinu, jenž obsahuje hyppopédu; jeho vrcholová strana jest $A z$, a řídící rovina má za normálu směr $-\gamma$ v rovině $x y$; rovnice řídící roviny parabolického válce tedy zní v souřadnicích s počátkem A

$$x\cos\gamma - y\sin\gamma = \frac{c^2 - a^2 tg^2 \gamma}{4a} \cos\gamma$$

čili

$$x - \frac{c^2}{4a} - y\, tg\,\gamma + \frac{a}{4} tg^2 \gamma = 0;$$

rovina tato obaluje plochu

$$y^2 = a\left(x - \frac{c^2}{4a}\right).$$

„Hyppopédy plochy isogonální leží na parabolických válcích, jichž řídící roviny obalují parabolický válec rovnoběžný s osou $O z$, jehož stopa na půdorysně má parametr $\frac{a}{2}$, ohnisko $\left(\frac{a^2 + c^2}{4a}, 0, 0\right)$ a vrchol $\left(\frac{c^2}{4a}, 0, 0\right)$“, vše vyjádřeno v souřadnicích s počátkem A.

Tečný bod paraboly a stopy balené (řídící) roviny leží na rovnoběžce $S x$ s osou $A x$ vedené bodem S.

O stopě tečen víme, že probíhá cissoidu Diokletovu, t. j. cissoidu přímky $D D'$ kolmé na $A S$ a kruhu ($A D$) nad průměrem $A D = 2\varrho$. Konstrukce tečny a normály této čáry je velmi známá věc, my však chceme tyto problémy uvésti v souvislost s ostatními částmi obrazce.

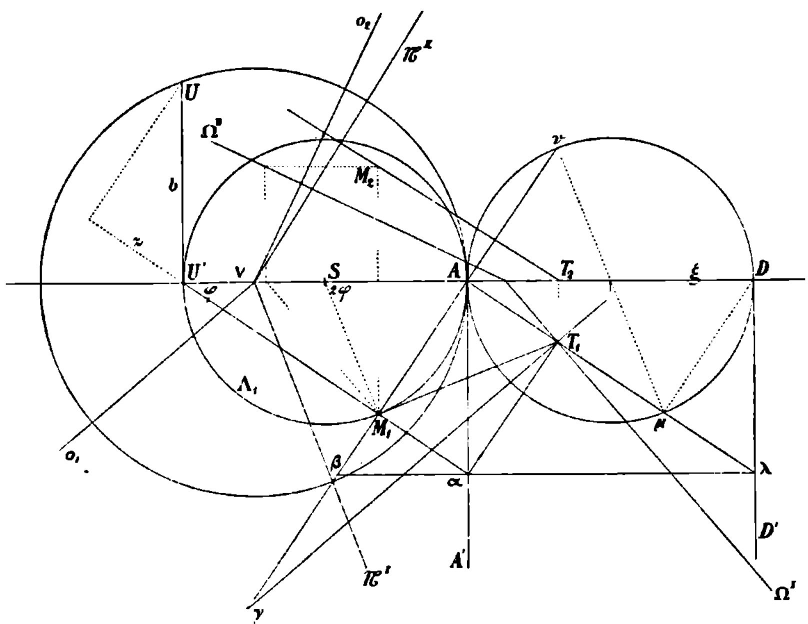
Konstrukce bodu T_1 na cissoidě je tato: vede se sečna $A \mu \lambda$ (obr. 4), která stanoví body μ a λ na kruhu a přímce $D D'$; délka $\mu \lambda$ se přenese na $A T_1$.

Pro normálu. Kolmice pólem na průvodič $A T_1$ postavená splývá s přímkou $A M_1$; tato se protne přímkou $\lambda \beta \parallel A S$, načež $A \beta$ je subnormálou přímky $D D'$; subnormála kruhu $A \nu$ má koncový bod ν na průměru $\mu \nu$; rozdíl subnormál $\nu \beta$ je subnormála cissoidy; třeba tedy ji přenésti do $A\,\gamma$, t. j. přenáší se $\nu\,A$ do $\beta\,\gamma$, načež γ je bod na normále cissoidy.

Buď dále U' druhý průsek kruhu A_1 s průměrem $A\,S\,U'$ (U' je průmět bodu U); víme, že úhly $A\,U'\,M_1$ a $D\,A\,\mu$ jsou si rovny, pravoúhlé trojúhelníky $A\,M_1\,U'$ a $D\,\mu\,A$ jsou tedy shodny.

Přímka $U'\,M_1$ protne přímku $A\,A'$ ($\perp A\,S$) v bodě α; poněvadž $U'\,A = A\,D$, bude $A\,\alpha = D\,\lambda$, t. j. bod α leží na přímce $\lambda\,\beta$.

Z rovnosti úhlů $U'\,\alpha\,A$ a $A\,\lambda\,D$ soudíme na shodnost trojúhelníků $A\,M_1\,\alpha$ a $D\,\mu\,\lambda$; je tedy $\mu\,\lambda = M_1\,\alpha$, t. j. $M_1\,\alpha = A\,T_1$, takže obrazec



Obr. 4.

$M_1\,A\,T_1\,\alpha$ jest obdélník. Ze shodnosti kruhů ($U'\,A$), ($A\,D$) pak vychází $\nu\,A = A\,M_1$, tedy máme $\beta\,\gamma = A\,M_1$.

Konstrukci normály pro cissoidu (T_1) lze tedy provésti jak následuje:

„Přímka $U'\,M_1$ protne $A\,A'$ v bodě α, jím vedená rovnoběžka $\alpha\,\beta$ s průměrem $A\,S\,U'$ stanoví na přímce $A\,M_1$ bod β; délka $A\,\beta$ prodlouží se o kus $A\,M_1 = \beta\,\gamma$, načež jest $\gamma\,T_1$ normálou cissoidy (T_1)."

„Přímka $\alpha\,T_1$ obaluje parabolu, jejíž úpatnice pro pól U' jest přímka $A\,A'$; vrchol její jest A, ohnisko U'. Úpatnice této paraboly pro pól A jest cissoida (T_1)."

V obr. 4. sestrojena tečna hyppopédy $M\,T$ pomocí půdorysné stopy T. Stopy normální roviny $\mathfrak{N}$ procházejí bodem V a jsou kolmé na průměty tečny; první průmět osy křivosti o (která obsahuje bod V) je kolmý na Ω^{I} a tedy $\parallel \gamma\,T_1$, druhý průmět o_2 je kolmý na druhou stopu Ω^{II} oskulační roviny Ω.

Určili jsme výše průsečík tečen v bodech φ a $\pi - \varphi$; ustanovme eště jejich rovinu.

Rovina určená přímkama různoběžnýma

$$X = m\,Z + p,\quad Y = n\,z + q$$
$$X = m'\,Z + p',\quad Y = n'\,Z + q'$$

má rovnici

$$\begin{vmatrix} x - p & y - q & z \\ m & n & 1 \\ m - m' & n - n' & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dle (26) jsou rovnice tečny v bodě φ

$$X = -\frac{4\,\varrho}{b}\,\sin\varphi\,Z + \varrho + 2\,\varrho\,\sin^2\varphi,\quad p = \varrho + 2\,\varrho\,\sin^2\varphi$$

$$Y = \frac{2\,\varrho}{b}\,\frac{\cos 2\,\varphi}{\cos\varphi}\,Z + q;$$

rovina tečen v bodech φ a $\pi - \varphi$ má tedy rovnici

$$\begin{vmatrix} x - p & y - q\,, & z \\ -\frac{4\,\varrho}{b}\,\sin\varphi\,, & \frac{2\,\varrho}{b}\,\frac{\cos 2\,\varphi}{\cos\varphi}\,, & 1 \\ 0 & \frac{\cos 2\,\varphi}{\cos\varphi}\,, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

t. j.

$$x - p + \frac{4\,\varrho}{b}\,z\,\sin\varphi = 0.$$

„Tečny v bodech φ a $\pi - \varphi$ určují rovinu

$$x + \frac{4\,\varrho}{b}\,z\,\sin\varphi = \varrho + 2\,\varrho\,\sin^2\varphi\,,$$

kolmou na rovinu $S\,A\,z$; roviny tyto obalují válec parabolický

$$z^2 = -\frac{b^2}{2\,\varrho}\left(x - \varrho\right)\text{“}.$$

Řídící čára tohoto válce v rovině $S\,A\,z$ je známá nám parabola, průmět čáry A do této roviny. Poněvadž obalené roviny jsou kolmé na průmětnu a jsou tečnými rovinami čáry, je jasno a priori, že jejich obalovou plochou musí býti promítající válec čáry.

Pro souřadnice bodu na hyppopédě (21*) platí

$$x - \varrho = -2\,\varrho\,\sin^2\varphi,\quad y = 2\,\varrho\,\sin\varphi\,\cos\varphi,\quad z = b\,\sin\varphi,$$

tedy

$$(x - \varrho)^2 + y^2 + z^2 = 4\,\varrho^2\,\sin^2\varphi + b^2\,\sin^2\varphi = g^2\,\sin^2\varphi;$$

proveďme transformaci reciprokých průvodičů (inversi) pro pól A vůči kouli

$$(x - \varrho)^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

Transformovaný bod má souřadnice $x_1 y_1 z_1$ a sice jest

$$x_1 - \varrho = \frac{g^2 (x - \varrho)}{(x - \varrho)^2 + y^2 + z^2}, \quad y_1 = \frac{g^2 y}{(x - \varrho)^2 + y^2 + z^2}, \ldots$$

tedy

$$x_1 = - \varrho, \quad y_1 = 2 \varrho \, cotg \, \varphi, \quad z_1 = \frac{b}{sin \, \varphi},$$

takže vládne vztah

$$\frac{z_1^2}{b^2} - \frac{y_1^2}{4 \varrho^2} = 1;$$

tato hyperbola je stereografická projekce hyppopédy z bodu A do roviny $x = - \varrho$.*)

Ohniska této hyperboly mají souřadnice

$$y_1 = 0, \quad z_1 = \pm g, \quad x_1 = - \varrho, \quad (g^2 = b^2 + 4 \varrho^2),$$

jim odpovídají na kouli sférická ohniska hyppopédy.

Pro součet čtverců nalezneme

$$(x_1 - \varrho)^2 + y_1^2 + z_1^2 = b^2 + 8 \varrho^2,$$

tedy pro souřadnice ohnisek sférických máme

$$x_0 - \varrho = \frac{- g^2}{b^2 + 8 \varrho^2} \cdot 2 \varrho, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \pm \frac{g^3}{b^2 + 8 \varrho^2}.$$

Souřadnice sférických ohnisek hyppopédy $\alpha =$ konst. znějí tedy

$$\xi = - \frac{b^2 \varrho}{b^2 + 8 \varrho^2}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \pm \frac{g^3}{b^2 + 8 \varrho^2};$$

ty třeba vyjádřiti v původních souřadnicích (počátek O, osa $O A$).

Nejprve jest

$$b^2 + 8 \varrho^2 = 2 a^2 + c^2 + c^2 \cos^2 \alpha,$$

dále

$$e^{-i\gamma} (\xi + i \eta) = - e^{-i\gamma} \frac{b^2 \varrho}{b^2 + 8 \varrho^2},$$

tedy

$$x + i y = e^{-i\gamma} (\xi + i \eta) + \varrho e^{i\gamma} = \varrho e^{i\gamma} - \frac{b^2 \varrho e^{-i\gamma}}{b^2 + 8 \varrho^2},$$

$$x = \frac{8 \varrho^3}{b^2 + 8 \varrho^2} \cos \gamma = \frac{a (a^2 + c^2 \cos^2 \alpha)}{2 a^2 + c^2 + c^2 \cos^2 \alpha},$$

$$y = \frac{2 \varrho (b^2 + 4 \varrho^2)}{b^2 + 8 \varrho^2} \sin \gamma = \frac{(a^2 + c^2) c \cos \alpha}{2 a^2 + c^2 + c^2 \cos^2 \alpha},$$

$$z = \pm \frac{g^3}{2 a^2 + c^2 + c^2 \cos^2 \alpha}.$$

---

*) F. Gomes Teixeira, l. c.

Sférická ohniska hyppopéd na ploše isogonální naplňují tedy kuželosečku. Pro její body úběžné jest

$$c \cos \alpha = \pm i \sqrt{2 a^2 + c^2},$$

$$\frac{x}{y} = \mp \frac{a i}{\sqrt{2 a^2 + c^2}}, \quad \frac{z}{y} = \pm \frac{g i}{\sqrt{2 a^2 + c^2}}, \quad \frac{x^2 + z^2}{y^2} = -1,$$

t. j. čára ta je kružnicí.

Rovina kruhu toho jest

$$x \pm \frac{a}{g} z = a,$$

dále máme při označení

$$N = 2 a^2 + c^2 + c^2 \cos^2 \alpha,$$
$$a^2 + c^2 \cos^2 \alpha = u, \; N = g^2 + u,$$

patrně

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 u^2 + g^4 (u + c^2)}{N^2}, \; x = \frac{a u}{N}, \; z = \pm \frac{g^3}{N}.$$

Z identity

$$a^2 u^2 + g^4 (u + c^2) = a^2 u (N - g^2) + g^4 (N - a^2) = N (a^2 u + g^4) - a^2 g^2 N$$

plyne

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 u + c^2 g^2}{N} = a x \pm \frac{c^2}{g} z.$$

Tyto koule jsou protaty rovinama

$$x \pm \frac{a}{g} z = a$$

v hledaných kruzích; poněvadž odtud plyne

$$\pm \frac{c^2}{g} z = c^2 - \frac{c^2}{a} x,$$

můžeme je nahraditi koulí společnou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 - c^2}{a} x + c^2.$$

„Geometrické místo sférických ohnisek hyppopéd na ploše isogonální jsou kruhy, které na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 - c^2}{a} x + c^2$$

stanoví roviny

$$x \pm \frac{a}{g} z = a, \quad (g = \sqrt{a^2 + c^2}).\text{“}$$

Vraťme se opět k souřadnicím ohnisek v souřadnicích s počátkem S a osou SA:

XXXVI.

$$y_0 = 0, \quad x_0 - \varrho = -\frac{2 g^2 \varrho}{b^2 + 8 \varrho^2}, \quad z_0 = \pm \frac{g^3}{b^2 + 8 \varrho^2}.$$

Je-li jedno z těchto ohnisek bod F, máme

$$\overline{FM}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AF}^2 - 2 (x_0 - \varrho)(x - \varrho) - 2 z z_0$$
$$= g^2 \sin^2 \varphi + \frac{g^4}{b^2 + 8 \varrho^2} - \frac{8 g^2 \varrho^2}{b^2 + 8 \varrho^2} \sin^2 \varphi \mp \frac{2 g^3 b \sin \varphi}{b^2 + 8 \varrho^2},$$

t. j.

$$\overline{FM}^2 = \frac{g^2}{b^2 + 8 \varrho^2} (b^2 \sin^2 \varphi + g^2 \mp 2 b g \sin \varphi),$$

(27) $$\overline{FM} = \frac{g}{\sqrt{b^2 + 8 \varrho^2}} (g \mp b \sin \varphi).$$

Mezi ohnisky F_1 a F_2 a libovolným bodem hyppopédy tedy vládne vztah

(27ª) $$M F_1 + M F_2 = \frac{2 g^2}{\sqrt{g^2 + 4 \varrho^2}};$$

ten ovšem vyjadřuje pouze, že čára leží na rotačním ellipsoidu, jehož ohniska F_1, F_2 leží na kouli hyppopédy.

Stálost součtu vzdáleností má hyppopéda vůči nekonečně mnoha párům bodů jako F_1, F_2, poněvadž plochy svazku ploch druhého stupně procházejících hyppopédou jsou až na parabolický válec vesměs rotační, a mezi nimi jest nekonečně mnoho ellipsoidů.

Znamenáme-li totiž

$$\Phi = x^2 + y^2 - \varrho^2, \quad \Psi = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{b^2}{2 \varrho} x - \frac{b^2 + 2 \varrho^2}{2},$$

jsou plochy svazku zahrnuty rovnicí

$$\Psi = \lambda \Phi,$$

a z těch jediná plocha $\lambda = 1$ není rotační.

9. Vraťme se k rovnicím (21*), abychom určili normální rovinu a osu křivosti hyppopédy.

Rovnice normální roviny zní

($\mathfrak{N}$) $$-2 \varrho X \sin 2 \varphi + 2 \varrho Y \cos 2 \varphi + b Z \cos \varphi = \frac{1}{2} b^2 \sin 2 \varphi.$$

Ustanovme průsek její půdorysné stopy $\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}$ s přímkou $A M_1$.

($A M_1$) $$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varrho \cos \varphi,$$

($\mathfrak{N}^{\mathrm{I}}$) $$-x \sin 2 \varphi + y \cos 2 \varphi = \frac{b^2}{4 \varrho} \sin 2 \varphi;$$

řešením vycházejí souřadnice průseku

$$x = \frac{g^2}{4 \varrho} \cos 2 \varphi - \frac{b^2}{4 \varrho}, \quad y = \frac{g^2}{4 \varrho} \sin 2 \varphi \quad (g^2 = b^2 + 4 \varrho^2).$$

Avšak poloměr koule jest

$$\frac{g^2}{4\varrho},$$

souřadnice středu V jest $\left(-\frac{b^2}{4\varrho}, 0, 0\right)$, tudíž

„stopa $\mathfrak{N}^1$ normální roviny hyppopédy protíná se s přímkou $A\,M_1$ na kouli hyppopédy."

Obalová plocha normálních rovin čili *plocha polární* je zde kužel s vrcholem V, jako u každé čáry sférické. Charakteristiku obalové plochy, t. j. *osu křivosti* obdržíme jako průseč roviny $\mathfrak{N}$ s rovinou

$$(\mathfrak{N}') \qquad 4\,\varrho\,X \cos 2\,\varphi + 4\,\varrho\,Y \sin 2\,\varphi + b\,Z \sin\varphi = -\,b^2 \cos 2\,\varphi,$$

která prochází bodem V, a jejíž stopy ostatně z úseků na osách snadně se strojí.

Pro osu křivosti obdržíme z $(\mathfrak{N})$ a $(\mathfrak{N}')$

$$(o) \qquad \left\{\begin{aligned} X + \frac{b^2}{4\varrho} &= \frac{b\,Z}{8\varrho}(3 \sin\varphi + \sin 3\,\varphi) = X_1, \\ Y &= -\frac{b\,Z}{8\varrho}(3 \cos\varphi + \cos 3\,\varphi) = Y_1; \end{aligned}\right.$$

odtud pak

$$X_1 + i\,Y_1 = -\frac{i\,b\,Z}{8\varrho} e^{i\varphi}(3 + e^{2i\varphi}) = V\,Q_1,$$

čímž nalezen výsledek:

„Polární kužel Eudoxovy hyppopédy protíná rovinu $Z =$ konst. v epicykloidě (nefroidě Huygensově), kterou vytvoří bod na hybném kruhu poloměru $\frac{1}{2}\,R$ při jeho kotálení po pevném kruhu se středem V a poloměrem

$$R = \frac{b\,Z}{4\varrho}."$$

Vrchol epicykloidy přísluší k hodnotě $\varphi = 0$ a má polohu $X_1 = 0$, $Y_1 = -\,2\,R$.

Pro konstruktivní praksi je tento theorém malého dosahu, poněvadž rozměry těchto kruhů bývají příliš malé. Avšak rovnice naše podává velmi dobrou konstrukci přímou.

Zvolíme $Z = 2\,\varrho$, takže

$$X_1 + i\,Y_1 = -\,i\,\frac{b}{4}\,e^{i\varphi}(3 + e^{2i\varphi});$$

vedeme $V\,N \parallel S\,M_1$, délky b (obr. 5.), takže vektor $V\,N = b\,e^{2i\varphi}$; dále vedeme $V\,G = b$ ve směru $V\,A$, načež

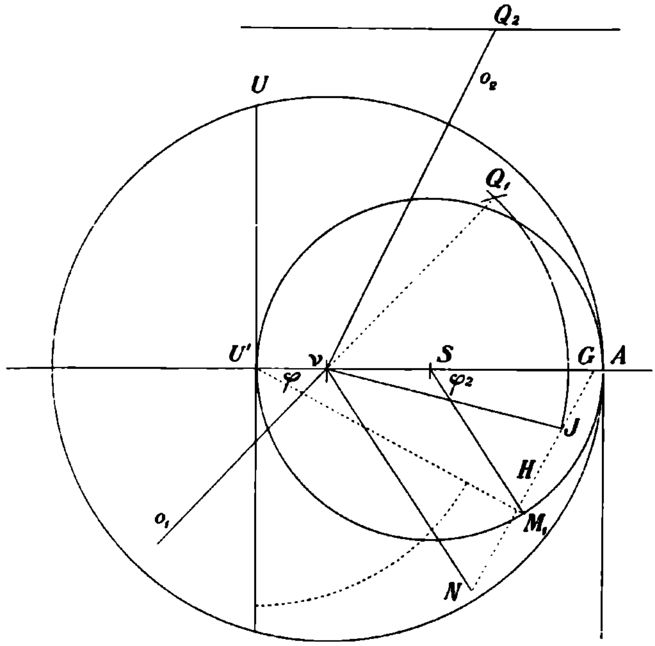
$$b + b\,e^{2i\varphi} = 2\,\frac{G + N}{2} = 2\,H,$$

značí-li barycentricky $H = \frac{G+N}{2}$ střed délky GN, a píšeme-li bod za komplexní veličinu, kterou při počátku V representuje.

Je pak dále

$$\frac{b}{4}(3 + e^{2i\varphi}) = \frac{2G + 2H}{4} = \frac{G+H}{2} = J$$

střed délky GH, t. j. GJ je čtvrtina délky GN; takže vychází



Obr. 5.

$$X_1 + i\,Y_1 = -i\,.\,\text{vekt.}\,VJ\,.\,e^{i\varphi} = e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)}\,\text{vekt.}\,VJ = VQ\text{:}$$

„Stopu Q osy křivosti VQ na rovině $Z = 2\varrho$ určíme pomocí bodů G a N určených ekvipolencemi

$$VG = b, \quad VN = b\,e^{2i\varphi},$$

tím, že stanovíme bod J na přímce GN v jedné čtvrtině její délky od G počínaje, a vektor VJ otočíme o úhel $\varphi - \frac{\pi}{2}$; tím obdržíme polohu půdorysu VQ_1."

Je to zároveň konstrukce oskulační roviny, která jde bodem M kolmo na osu křivosti o.

Rovnice osy křivosti lze psáti

$$\frac{X + \frac{b^2}{4\varrho}}{3\sin\varphi + \sin 3\varphi} = \frac{Y}{-3\cos\varphi - \cos 3\varphi} = \frac{b}{8\varrho} Z,$$

a rovina oskulační má ve své rovnici koefficienty

$$3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi, \quad -(3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi), \quad \frac{8 \varrho}{b},$$

takže její rovnice bude

$$(\mathfrak{Q}) \qquad X (3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi) - Y (3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi) + \frac{8 \varrho}{b} Z = 6 \varrho \sin \varphi,$$

tedy oskulační rovina stanoví na ose $S z$ úsek

$$\frac{3}{4} b \sin \varphi = \frac{3}{4} z,$$

kdežto úsek normální roviny na ose $S z$ obnáší

$$b \sin \varphi = z,$$

Pro hlavní normálu hyppopédy, t. j. průseč rovin $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{Q}$, ustanovíme půdorysnou stopu $Z = 0$; máme k tomu cíli rovnice

$$(3 \sin \varphi + \sin 3 \varphi) X - (3 \cos \varphi + \cos 3 \varphi) Y = 6 \varrho \sin \varphi$$

$$\sin 2 \varphi \,.\, X - \cos 2 \varphi \,.\, Y = - \frac{b^2}{4 \varrho} \sin 2 \varphi.$$

Řešením vyjde

$$(P) \qquad \begin{aligned} X + \frac{3 b^2}{8 \varrho} &= -\left(3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho}\right) \cos 2 \varphi - \frac{b^2}{8 \varrho} \cos 4 \varphi \\ Y &= -\left(3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho}\right) \sin 2 \varphi - \frac{b^2}{8 \varrho} \sin 4 \varphi \end{aligned}$$

což jinak lze psáti

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} X + \frac{b^2}{4 \varrho} &= -\left(\frac{b^2}{4 \varrho} \cos 2 \varphi + 3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho}\right) \cos 2 \varphi, \\ Y &= -\left(\frac{b^2}{4 \varrho} \cos 2 \varphi + 3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho}\right) \sin 2 \varphi; \end{aligned} \right.$$

tím určena stopa hlavní normály v souřadnicích s počátkem S a osou $S A$.

Klademe-li zde $\omega = 2 \varphi + \pi$, vidíme, že polární rovnice geometrického místa stop hlavních normál je

$$(28^*) \qquad r = 3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho} - \frac{b^2}{4 \varrho} \cos \omega,$$

při čemž pól souřadnic jest bod V a polární osa přímka $V A$.

Tato křivka jest konchoida kruhu (obr. 6.) sestrojeného nad průměrem $V S'$, kde S' je bod vůči bodu V s bodem S souměrně položený, t. j. platí rovnice barycentrická

$$S + S' = 2 V,$$

při čemž stálá délka nanášená jest

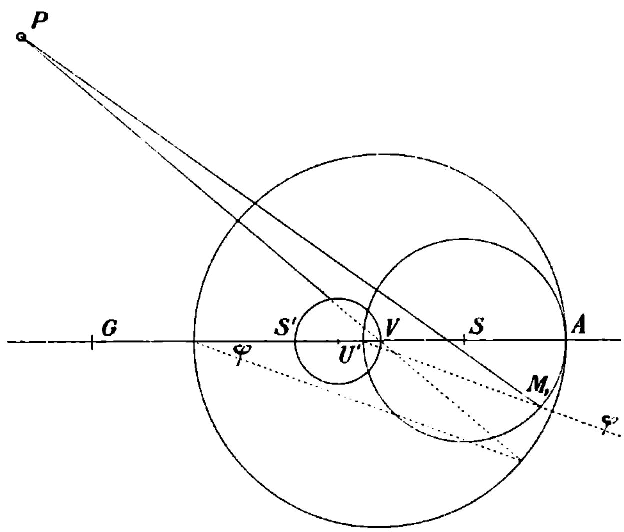
$$3 \varrho + \frac{b^2}{2 \varrho} = \varrho + 2 \overline{A V} = A G,$$

t. j. průměr koule zvětšený o poloměr základny válce:

XXXVI.

„Stopa plochy hlavních normál hyppopédy jest Pascalova závitnice" (28*).

V obrazci 6. značena stopa hlavní normály literou P.



Obr. 6.

Hlavní normála spojuje body $M P$, i bude dle (P) míti rovnice

$$
(29)\quad \begin{cases} \dfrac{X - \varrho \cos 2\varphi}{\dfrac{3b^2}{8\varrho} + \left(4\varrho + \dfrac{b^2}{2\varrho}\right)\cos 2\varphi + \dfrac{b^2}{8\varrho}\cos 4\varphi} = \dfrac{Y - \varrho \sin 2\varphi}{\left(4\varrho + \dfrac{b^2}{2\varrho}\right)\sin 2\varphi + \dfrac{b^2}{8\varrho}\sin 4\varphi} \\ \qquad = \dfrac{Z - b\sin\varphi}{b\sin\varphi} = \lambda, \end{cases}
$$

kde λ značí poměr dělicí

$$\frac{M H}{P M}$$

pro bod H (X, Y, Z) na hlavní normále. Jinak se tyto rovnice píší

$$
(29^*)\quad \begin{cases} X = \varrho \cos 2\varphi + \lambda\left[\dfrac{3b^2}{8\varrho} + \left(4\varrho + \dfrac{b^2}{2\varrho}\right)\cos 2\varphi + \dfrac{b^2}{8\varrho}\cos 4\varphi\right], \\ Y = \varrho \sin 2\varphi + \lambda\left[\left(4\varrho + \dfrac{b^2}{2\varrho}\right)\sin 2\varphi + \dfrac{b^2}{8\varrho}\sin 4\varphi\right], \\ Z = (\lambda + 1)\, b \sin\varphi, \end{cases}
$$

což je zároveň parametrické vyjádření plochy hlavních normál v souřadnicích s počátkem S, osou $S A$.

Na této ploše uvažujme čáru λ = konst.; její průmět je

$$
(29^{a})\quad \begin{aligned} X &= \frac{\lambda b^2}{4\varrho} + \left[\varrho + \lambda\left(4\varrho + \frac{b^2}{2\varrho}\right) + \frac{\lambda b^2}{4\varrho}\cos 2\varphi\right]\cos 2\varphi, \\ Y &= \left[\varrho + \lambda\left(4\varrho + \frac{b^2}{2\varrho}\right) + \frac{\lambda b^2}{4\varrho}\cos 2\varphi\right]\sin 2\varphi, \end{aligned}
$$

a tedy

„průmět čáry $\lambda =$ konst. na ploše hlavních normál hyppopédy je Pascalova závitnice jakožto konchoida kruhu

$$r = \frac{\lambda b^2}{4\varrho} \cos 2\varphi$$

z pólu $X = \frac{\lambda b^2}{4\varrho}$, $Y = 0$, při čemž prodlužovací konstanta jest

$$\varrho + \lambda\left(4\varrho + \frac{b^2}{2\varrho}\right).$$

Znamenejme

$$m = \varrho + \lambda\left(4\varrho + \frac{b^2}{2\varrho}\right), \quad n = \frac{\lambda b^2}{8\varrho}, \quad \bar{x} = X - \lambda \frac{3 b^2}{8\varrho}$$

pak znějí rovnice (29*)

$$\bar{x} = m \cos 2\varphi + n \cos 4\varphi, \quad y = m \sin 2\varphi + n \sin 4\varphi, \quad z = \lambda b \sin \varphi,$$

a odtud

$$\bar{x}^2 + y^2 = m^2 + n^2 + 2 m n \cos 2\varphi, \quad z^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 b^2 (1 - \cos 2\varphi).$$

Tudíž čára $\lambda =$ konst. leží na rotační ploše 2. stupně

$$\frac{\bar{x}^2 + y^2}{2 m n} + \frac{z^2}{\frac{1}{2}\lambda^2 b^2} = \frac{(m+n)^2}{2 m n}.$$

Střed křivosti hyppopédy se určí jako průsek hlavní normály s rovinou $\mathfrak{N}'$

$$4\varrho X \cos 2\varphi + 4\varrho Y \sin 2\varphi + b Z \sin \varphi = - b^2 \cos 2\varphi;$$

dosadíme-li sem hodnoty (29*) obdržíme hodnotu parametru λ

$$\lambda = - \frac{4\varrho^2 + b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 + 16\varrho^2 + 3 b^2 \cos^2 \varphi} \tag{30}$$

příslušnou ke středu křivosti.

V bodě $\varphi = 0$ máme $\lambda = -\frac{1}{4}$, tedy

$$X = -\frac{b^2}{4\varrho}, \quad Y = 0 = Z,$$

a týž výsledek pro $\lambda = \pi$; tedy obě větve v dvojném bodě A mají společný střed křivosti v bodě V.

Vložíme-li hodnotu (30) do rovnic (29*), shledáme, že souřadnice X a Y jsou racionálně vyjadřitelny v parametru $e^{2i\varphi}$, a sice vyjde tak, že se čára středů křivosti promítá do roviny xy v křivku stupně 6.

10. Přechod od soustavy souřadnic s počátkem S a osou $S\xi \equiv SA$ k původní soustavě s počátkem O je dán rovnicí

$$\xi + i\eta = e^{i\gamma}\left(x + i y - \frac{a + i c \cos \alpha}{2}\right).$$

Rovnice normální roviny

$$-2\varrho\,\xi\sin 2\varphi + 2\varrho\,\eta\cos 2\varphi + b\,z\cos\varphi = \frac{1}{2}b^2\sin 2\varphi$$

po substituci hodnot

$$\xi = x\cos\gamma - y\sin\gamma - \frac{a}{2}\cos\gamma + \frac{c}{2}\cos\alpha\sin\gamma$$

$$\eta = x\sin\gamma + y\cos\gamma - \frac{a}{2}\sin\gamma - \frac{c}{2}\cos\alpha\cos\gamma$$

přejde na tvar

$$\begin{aligned} &x\,(-2\varrho\cos\gamma\sin 2\varphi + 2\varrho\sin\gamma\cos 2\varphi)\\ &+ y\,(2\varrho\sin\gamma\sin 2\varphi + 2\varrho\cos\gamma\cos 2\varphi)\\ &+ z\,c\sin\alpha\cos\varphi = n, \end{aligned}$$

kde prostý člen n se určí podmínkou, dle níž rovina obsahuje bod na čáře; dosadíme-li sem hodnoty

$$2\varrho\cos\gamma = a,\quad 2\varrho\sin\gamma = c\cos\alpha,$$

zní výsledek

$$(\overline{\mathfrak{N}})\qquad \begin{aligned} &x\,(c\cos\alpha\cos 2\varphi - a\sin 2\varphi) + y\,(c\cos\alpha\sin 2\varphi + a\cos 2\varphi)\\ &+ z\,c\sin\alpha\cos\varphi = \frac{c^2-a^2}{2}\sin 2\varphi + a\,c\cos\alpha\cos 2\varphi\,. \end{aligned}$$

Rovnice roviny $\mathfrak{N}'$ vznikne přímo derivováním vůči φ z této a zní

$$(\mathfrak{N}')\qquad \begin{aligned} &-x\,(c\cos\alpha\sin 2\varphi + a\cos 2\varphi) + y\,(c\cos\alpha\cos 2\varphi - a\sin 2\varphi)\\ &-\frac{1}{2}c\,z\sin\alpha\sin\varphi = \frac{c^2-a^2}{2}\cos 2\varphi - a\,c\cos\alpha\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Z tvaru $\overline{\mathfrak{N}}$ vysvitá, že stopa $z = 0$ normální roviny prochází průsečným bodem přímek

$$(31^{a})\qquad \begin{aligned} x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi &= a\cos 2\varphi,\\ -x\sin 2\varphi + y\cos 2\varphi &= \frac{c^2-a^2}{2a}\sin 2\varphi, \end{aligned}$$

nezávislých na α. První z nich prochází bodem A a jest kolmá na směr 2φ; druhá má směr 2φ a prochází bodem

$$x = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a},\ y = 0.$$

Průsečný bod sám má souřadnice

$$(31)\qquad \begin{aligned} x = p &= \frac{a^2+c^2}{4a}\cos 4\varphi + \frac{3a^2-c^2}{4a},\\ y = q &= \frac{a^2+c^2}{4a}\sin 4\varphi, \end{aligned}$$

takže

„půdorysná stopa normální roviny hyppopédy α = konst. prochází bodem kruhu (L) příslušným k parametru

$$\omega = 4\,\varphi,\text{“}$$

takže pro body téhož kruhu φ = konst. stopy normálních rovin různých hyppopéd tvoří svazek.

Dále stopa roviny $\mathfrak{N}'$ prochází průsekem přímek nezávislých na α

$$-\,x \sin 2\,\varphi + y \cos 2\,\varphi = -\,a \sin 2\,\varphi\,,$$

$$x \cos 2\,\varphi + y \sin 2\,\varphi = \frac{a^2 - c^2}{2\,a} \cos 2\,\varphi\,,$$

z nichž první má směr $2\,\varphi$ a obsahuje bod A, druhá je kolmá na směr $2\,\varphi$ a prochází bodem

$$x = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2\,a}\,,\quad y = 0\,;$$

průsečík má souřadnice

$$\text{(32)}\qquad \begin{aligned} x = p' &= -\,\frac{a^2 + c^2}{4\,a} \cos 4\,\varphi + \frac{3\,a^2 - c^2}{4\,a} \\ y = q' &= -\,\frac{a^2 + c^2}{4\,a} \sin 4\,\varphi\,, \end{aligned}$$

a jest to bod kruhu (L) diametrálně protilehlý bodu (p, q).

„Přímky (31^a), (32^a) tvoří obdélník vepsaný kruhu (L), jehož dva vrcholy leží na $O\,x$, a druhé dva vrcholy jsou body (p, q), (p', q').“

Průmět tečny hyppopédy má rovnici

$$\begin{aligned} x\,(a \cos 2\,\varphi + c \cos\alpha \sin 2\,\varphi) + y\,(a \sin 2\,\varphi - c \cos\alpha \cos 2\,\varphi) \\ = a^2 \cos^2\varphi + a\,c \cos\alpha \sin 2\,\varphi + c^2 \cos^2\alpha \sin^2\varphi, \end{aligned}$$

v níž se vyskytuje α prostřednictvím $\cos\alpha$ a sice v druhém stupni; mění-li se bod na kruhu Γ (φ = konst.), naplňují tečny různých hyppopéd hybným bodem jdoucích určitou plochu a průměty jejich obalují obrysovou čáru této přímkové plochy.

Tato obalová čára průmětů tečen hyppopéd v bodech kruhu Γ_φ bude kuželosečka; rovnici její obdržíme seřadíce dle mocností $\cos\alpha$ a kladouce diskriminant na roveň nulle. Zní

$$\text{(33)}\qquad \begin{aligned} (-\,x \sin 2\,\varphi + y \cos 2\,\varphi + a \sin 2\,\varphi)^2 \\ + 4\,a \sin^2\varphi\,(x \cos 2\,\varphi + y \sin 2\,\varphi - a \cos^2\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Klademe-li

$$P \equiv -\,x \sin 2\,\varphi + y \cos 2\,\varphi + a \sin 2\,\varphi,$$

$$Q = x \cos 2\,\varphi + y \sin 2\,\varphi - a \cos^2\varphi,$$

má tato rovnice tvar

$$P^2 + 4\,a \sin^2\varphi\; Q = 0,$$

a přísluší jí parabola s osou $P = 0$, jejíž vrchol je na přímce $Q = 0$ a ohnisko na přímce

$$Q = -a \sin^2 \varphi,$$

t. j. ohnisko leží na přímce

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi = a \cos 2\varphi$$

a na přímce $P = 0$, které obě procházejí bodem A.

Zbývá ještě určiti geometrické místo těchto vrcholů parabol příslušných k různým kruhům Γ_φ; rovnice $P = 0$, $Q = 0$ znějí

$$-(x - a) \sin 2\varphi + y \cos 2\varphi = 0$$
$$(x - a) \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi = a \sin^2 \varphi$$

a řešeny dávají

(34) $$x - a = a \sin^2 \varphi \,.\, \cos 2\varphi, \quad y = a \sin^2 \varphi \,.\, \sin 2\varphi.$$

V souřadnicích polárních s pólem A, osou $O A x$ mají souřadnice hodnoty (průvodič r, polární úhel ω)

(34^a) $$r = a \sin^2 \varphi, \quad \omega = 2\varphi,$$

takže rovnice čáry vytvořené těmito vrcholy parabol zní

(34^b) $$r = \frac{a}{2}\left(1 - \cos \omega\right).$$

„Průměty půdorysné tečen hyppopéd na ploše isogonální v bodech téhož kruhu povrchového Γ_φ obalují parabolu s ohniskem v bodě A, jejíž osa má směr 2φ, a jejíž vrchol leží na kardioidě, která jest úpatnicí kruhu $(O A)$ z pólu A."

Bylo již výše ukázáno, že stopy tečen hyppopéd jsou na přímce

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

závislé pouze na φ:

„Stopy tečen hyppopéd na isogonální ploše v bodech téhož kruhu Γ_φ vedených leží na přímce $H T_1$ (obr. 1.) stojící kolmo na přímce O_φ v její průseku s přímkou $A C$."

11. Rovnici plochy isogonální udělme tvar

$$F \equiv (x - a)^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + c^2) \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0;$$

její poloviční derivace jsou

$$F_1 = x - a + (a^2 + c^2) \frac{x y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$F_2 = y - (a^2 + c^2) \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$F_3 = z.$$

Normála plochy má pak rovnice

$$(n) \qquad \frac{X - x}{F_1} = \frac{Y - y}{F_2} = \frac{Z - z}{z},$$

a její stopa na rovině $x\,y$

$$(35) \qquad \begin{cases} X_0 = x - F_1 = a - (a^2 + c^2)\,\dfrac{x\,y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \\ Y_0 = y - F_2 = (a^2 + c^2)\,\dfrac{x^2\,y}{(x^2 + y^2)^2}; \end{cases}$$

odtud

$$\frac{X_0 - a}{Y_0} = -\frac{y}{x},$$

takže

„přímka $A\,P_0$ spojující stopu normály plochy isogonální s bodem A stojí kolmo na přímce $O\,M_1$."

Polární souřadnice stopy normály jsou (pro pól A, osu $A\,x$)

$$(35') \qquad p = \frac{a^2 + c^2}{2\,r}\,\sin 2\,\varphi, \quad \omega = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

při čemž jako výše

$$r = O\,M_1 = a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi.$$

Odtud pro $r =$ konst. soudíme:

„Válec ($r =$ konst.)

$$x^2 + y^2 = r^2$$

protíná isogonální plochu v čáře 4. stupně; normály v bodech této čáry sestrojené protínají základní rovinu v bodech růžice (35')."

Dále je zřejmo, že

„normály isogonální plochy v bodech téhož kruhu Γ_φ mají svoje stopy na přímce vedené z bodu A kolmo na průmět kruhu."

Proveďme inversi vůči kruhu

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 + c^2;$$

transformovaný bod podrží polární úhel $\omega = \varphi + \dfrac{\pi}{2}$ a průvodič bude

$$(36) \qquad p_1 = \frac{2\,r}{\sin 2\,\varphi} = \frac{a + c \cos\alpha\,tg\,\varphi}{\sin\varphi}, \quad \omega = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

tedy pravoúhlé souřadnice jeho x_1, y_1, ježto

$$x_1 - a = p_1 \cos\omega = -p_1 \sin\varphi,$$

budou

$$(36^*) \qquad x_1 = -c \cos\alpha\,tg\,\varphi, \quad y_1 = c \cos\alpha + a\,cotg\,\varphi;$$

toť jsou souřadnice bodu, jenž vznikne ze stopy normály transformací reciprokých průvodičů pro pól A a kruh poloměru

$$\varrho = \sqrt{a^2 + c^2}.$$

XXXVI.

Pro $\alpha =$ konst. vychází odtud

$$x_1 (y_1 - c \cos \alpha) = - a c \cos \alpha,$$

takže

„plocha normál isogonální plochy podél hyppopédy protíná rovinu $x y$ v čáře, která jest inversní rovnostranné hyperboly."

Ve zvláštním případě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se hyperbola rozpadne v přímky; tu obdržíme přímo $r = a \cos \varphi$,

$$p = \frac{g^2}{a} \sin \varphi, \quad g^2 = a^2 + c^2,$$

tedy

$$X_0 = \frac{a^2 - c^2}{2a} + \frac{a^2 + c^2}{2a} \cos 2\varphi, \quad Y_0 = \frac{a^2 + c^2}{2a} \sin 2\varphi; \tag{37}$$

čára na ploše je v tomto případě dotyková čára kužele opsaného z bodu A:

„Společné normály isogonální plochy a kužele opsaného z vrcholu A protínají základní rovinu $x y$ v bodech kruhu (37)."

Střed tohoto kruhu je průsek kruhu (L) s osou $O x$, a poloměr jeho rovná se průměru kruhu (L), takže obsahuje bod A.

Obraťme se nyní k tečným rovinám naší plochy rovnoběžným s osou $O y$, které obalují svými nárysnými stopami obrys plochy v rovině $O x z$. Ukázali jsme, že tyto roviny obalují dva válce, pro něž dotykové čáry jsou parametricky charakterisovány vztahem

$$c \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi = - a + g, \quad g = \pm \sqrt{a^2 + c^2}.$$

Výrazy pro inversní bod x_1, y_1 (36)

$$x_1 = a - p_1 \sin \varphi, \quad y_1 = p_1 \cos \varphi, \quad p_1 = \frac{a + c \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi}$$

dávají

$$p_1 = \frac{g}{\sin \varphi}, \quad x_1 = a - g, \quad y_1 = g \operatorname{cotg} \varphi,$$

takže tento bod opisuje přímku a stopa normály tedy kružnici.

Máme ostatně přímo

$$p = \frac{g^2}{p_1} = g \sin \varphi, \quad X_0 = a - g \sin^2 \varphi, \quad Y_0 = g \sin \varphi \cos \varphi,$$

t. j.

$$(X_0 - a)^2 + Y_0^2 + g (X_0 - a) = 0; \tag{38}$$

výsledek můžeme formulovati takto:

„Plocha normál společných ploše isogonální a opsanému válci rovnoběžnému s osou $O y$ protíná rovinu $O x y$ v kružnici (38), shodné s kružnicí

$$x^2 + y^2 = g\,x, \quad g = \pm \sqrt{a^2 + c^2},$$

ve kterou se promítá dotyková čára obou ploch."

Poněvadž tyto normály jsou rovnoběžné s rovinou $O\,x\,z$, jsou jich druhé průměty normálami příslušné obrysové paraboly a strikční čára plochy normál má za průmět nárysný evolutu této paraboly.

Víme, že čára leží na kouli (13[8])

$$x^2 + y^2 + z^2 = (2\,a - g)\,x + c^2;$$

ta obsahuje bod $(0, 0, c)$ a je soustředná s kruhem stop normál (38).

V rovinách kolmých na $O\,y$ leží vždy čtyři normály uvažované řady, jež jsou po dvou souměrné vůči rovině $O\,x\,y$ a protínají se na kruhu stop.

Poslední vlastnost zobecníme pro libovolnou čáru společnou kouli a kruhovému válci. Budiž čára dána jako průseč ploch

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad (x - b)^2 + y^2 = c^2;$$

patrně leží na válci parabolickém, jehož rovnice vychází odečtením

$$z^2 + 2\,b\,x = a^2 + b^2 - c^2.$$

Normála tohoto válce parabolického má rovnice

$$Y = y, \frac{X - x}{b} = \frac{Z - z}{z},$$

a její stopa na základně $x\,y$ má souřadnice

$$X_0 = x - b, \quad Y_0 = y,$$

a hoví tedy rovnici

$$X_0^2 + Y_0^2 = c^2.$$

„Průseč koule s rotačním válcem leží také na válci parabolickém; normály tohoto válce podél křivky protínají základnu rotačního válce, položenou středem koule, v kružnici shodné s kružnicí na rotačním válci."

Pro plochu normál máme vyjádření v parametrech

$$x, y, z, x - b = \sqrt{c^2 - y^2}, \; z^2 = m - 2\,b\,x, \; m = a^2 + b^2 - c^2:$$

$$Y = y, \; \frac{X - x}{b} = \frac{Z - z}{z}.$$

Odtud

$$X - (x - b) = \frac{b}{z} Z, \; (X - \sqrt{c^2 - Y^2})\,z = b\,Z;$$

povyšme na druhou mocnost a dosaďme

$$z^2 = m - 2\,b^2 - 2\,b\,(x - b) = n - 2\,b\sqrt{c^2 - Y^2},$$

kde $n = a^2 - b^2 - c^2$. Vyjde jako rovnice plochy normál parab. válce

$$(X - \sqrt{c^2 - Y^2})^2\,(n - 2\,b\sqrt{c^2 - Y^2}) = b^2 Z^2;$$

XXXVI.

při označení

$$V = X^2 - Y^2 + c^2$$

to lze psáti

$$(V - 2X\sqrt{c^2 - Y^2})\,(n - 2b\sqrt{c^2 - Y^2}) = b^2 Z^2,$$

$$nV + 4bX(c^2 - Y^2) - b^2 Z^2 = (2nX + 2bV)\sqrt{c^2 - Y^2},$$

a konečně v racionální formě

$$[(b^2 + c^2 - a^2)(X^2 - Y^2 + c^2) + 4bX(Y^2 - c^2) + b^2 Z^2]^2$$
$$= 4b^2\left(X^2 - Y^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{b}X + c^2\right)^2 (c^2 - Y^2).$$

Uvažovaná plocha normál je tedy stupně šestého.

Ve zvláštním případě $a^2 = b^2 + c^2$ zjednoduší se tato rovnice a zní

$$[4x(y^2 - c^2) + bz^2]^2 + 4(y^2 - c^2)(x^2 - y^2 + c^2)^2 = 0.$$

Tutéž vlastnost protínati základnu v kružnici mají plochy normál isogonály podél čáry

$$x^2 + y^2 = kx, \quad r = k\cos\varphi,$$

pro kterou půdorys je kruh jdoucí bodem O a se středem na Ox; (35′) podá pro průvodič z pólu A

$$p = \frac{g^2}{k}\sin\varphi = k_1 \sin\varphi,$$

tedy souřadnice stopy normály znějí

$$x - a = -k_1 \sin^2\varphi, \quad y = k_1 \sin\varphi\cos\varphi.$$

Uvažujme ještě normály isogonály podél dotykové čáry s opsaným kuželem z vrcholu O; pro tuto čáru platí rovnice

$$a\cos\alpha + c\,tg\,\varphi = 0,$$

tedy

$$r = a\cos\varphi - \frac{c^2}{a}\,\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi},$$

takže rovnice (35′) podá pro stopu normály $\left(\text{při } \omega = \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$p = \frac{a g^2 \sin\varphi\cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi - c^2\sin^2\varphi} = \frac{a g^2\cos\omega\sin^2\omega}{g^2\cos^2\omega - a^2};$$

píše-li se čitatel

$$-a\cos\omega\,(g^2\cos^2\omega - a^2 - c^2),$$

vyjde

$$p = \frac{a c^2\cos\omega}{g^2\cos^2\omega - a^2} - a\cos\omega = r_1 - r_2,$$

takže se stopa plochy normál jeví jako cissoida hyperboly (r_1) a kruhu (r_2):

(r_1) $$c^2\left(x - \frac{3}{2}a\right)^2 - a^2 y^2 = \frac{a^2 c^2}{4},$$

(r_2) $$(x - a)^2 + y^2 = a(x - a);$$

XXXVI.

křivky tyto jsou soustředné a dotýkají se ve vrcholech, z nichž jeden jest A.

Pošine-li se počátek do bodu A, zní rovnice křivky

$$(x^2 + y^2)(c^2 x^2 - a^2 y^2) = a g^2 x y^2; \tag{39}$$

čára má v počátku A bod trojnásobný. Klaďme $y = t x$, vyjde parametrické vyjádření

$$x = \frac{a g^2 t^2}{(1 + t^2)(c^2 - a^2 t^2)}, \quad y = t x.$$

Bodu A odpovídají hodnoty parametru $t = 0$ a $t = \infty$.
Pro malá t

$$x = c_1 t^2 + c_2 t^4 + \ldots, \quad y = c_1 t^3 + c_2 t^5 + \ldots, \quad c_1 = \frac{a g^2}{c^2};$$

tento prvek odpovídá úvratu s tečnou $A x$.

Pro nekonečně veliká t klaďme $t = \dfrac{1}{\tau}$; bude

$$x = c_1' \tau^2 + c_2' \tau + \ldots, \quad y = c_1' \tau + c_2' \tau^3 + \ldots, \quad c_1' = -\frac{g^2}{a};$$

je to jednoduchá větev s tečnou $A y$.

Singularita bodu A skládá se tedy z jedné větve s bodem úvratným a z větve jednoduché, která předešlou kolmo protíná; bod platí za dva obyčejné body dvojné spojené s bodem vratu, takže je čára třídy 5.

12. Poněkud složité jsou konstrukce týkající se osvětlení. Vrátíme se k označení čl. 4.

$$S = (x - a)^2 + y^2 + z^2, \quad V = x^2 + y^2, \quad g^2 = a^2 + c^2,$$

takže rovnice plochy isogonální zní

$$S V - g^2 y^2 = 0;$$

tečný válec směru (k, l, m) dotýká se plochy podél čáry ležící na ploše (10)

$$k [S x + V (x - a)] + l y (S + V - g^2) + m V z = 0.$$

Omezíme se na případ kdy světlo dopadá ve směru kolmém na osu $O y$, takže bude $l = 0$; mez vlastního stínu leží pak na ploše

$$k x S + (m z + k x - k a) V = 0, \tag{A}$$

a tuto lze považovati za souhrn křivek, v nichž se protínají plochy s proměnným parametrem λ

$$V = -\lambda k x, \quad S = \lambda (m z + k x - k a); \tag{B}$$

první plocha je válec kruhový, druhá je koule. Křivky (B) protínají plochu isogonální v řadě bodů, jichž souhrn je průsečnice její s plochou (A), t. j. mez vlastního stínu.

Body na mezi vlastního stínu obdržíme dle toho také jako průsečíky dvou čar na ploše isogonální, a sice jest jedna řada vyťata válci (B) a druhá řada koulemi (B).

Rovnici plochy isogonální možno psáti

$$(S - g^2)\, V + g^2 x^2 = 0;$$

pro průseč s válcem $V = -\lambda\, k\, x$ platí

$$(C) \qquad S - g^2 = \frac{g^2}{\lambda\, k}\, x,$$

t. j. průseč válce (B) s plochou isogonální leží na kouli (C).

Obdržíme tedy body na mezi vlastního stínu jako průseky ploch (B) a (C), t. j. dvou koulí a rotačního válce.

Koule (B) a (C) se protínají v kruhu na rovině

$$(D) \qquad g^2 + \frac{g^2 x}{\lambda\, k} = \lambda\, (m\, z + k\, x - k\, a),$$

táž protne kouli a válec v kruhu a ellipse, takže problém redukován na stanovení průseků těchto dvou čar.

Rovina (D) má rovnici

$$(D^*) \qquad \lambda^2\, k\, (m\, z + k\, x - k\, a) - g^2\, k\, \lambda - g^2\, x = 0$$

a obaluje plochu válcovou

$$(E) \qquad 4\, x\, (m\, z + k\, x - k\, a) + g^2\, k = 0.$$

Přímky tohoto válce mají směr osy $O\,y$, řídící čára jest hyperbola s asymptotama

$$x = 0 \text{ a } m\, z + k\, (x - a) = 0,$$

t. j. asymptoty jsou osa $O\,z$ a kolmice na směr světla vedená z bodu A.

Zvolené tečné rovině (D) tohoto válce odpovídá parametr λ, který se určí průsekem $(0,\, z_0)$ nárysné stopy a osy $O\,z$

$$\lambda = \frac{g^2}{m\, z_0 - k\, a}.$$

Příslušná koule (C) má rovnici

$$S = g^2 + \left(\frac{m\, z_0}{k} - a\right) x,$$

t. j.

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 + \left(\frac{m\, z_0}{k} + a\right) x$$

a jest určena svým středem

$$\left(\frac{m\, z_0}{2\, k} + \frac{a}{2},\ 0,\ 0\right)$$

a bodem $(0,\, 0,\, c)$.

Je-li σ úhel osy $O\,x$ se směrem světla, bude

$$\frac{m\,z_0}{k} = z_0\,tg\,\sigma.$$

„Vyjdeme tedy od libovolné tečné roviny Π válce (E); její nárysná stopa stanoví na $O\,z$ úsek z_0, načež sestrojíme kouli $\mathfrak{K}$ se středem

$$\left(\frac{a + z_0\,tg\,\sigma}{2},\ 0,\ 0\right)$$

obsahující bod $(0, 0, c)$. Průsečný kruh roviny Π s koulí $\mathfrak{K}$ pak protíná elliptický řez roviny Π s válcem

$$x^2 + y^2 = \frac{g\,x}{a - z_0\,tg\,\sigma}$$

ve čtyřech bodech na mezi vlastního stínu."

13. Isogonální plochu

$$S\,V - g^2\,y^2 = 0$$

lze považovati za obalovou plochu soustavy

$$\lambda^2\,V - 2\,\lambda\,g\,y + S = 0,$$

t. j.

$$\lambda^2\,(x^2 + y^2) - 2\,\lambda\,g\,y + (x - a)^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad g = \sqrt{a^2 + c^2}. \tag{40}$$

Píše-li se $\lambda = cotg\,\beta$, lze poslední rovnici psáti

$$(x - a\,sin^2\beta)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\,g\,sin\,2\beta\right)^2 + z^2\,sin^2\beta = \frac{c^2}{4}\,sin^2\,2\,\beta; \tag{40*}$$

tak nacházíme řadu *rotačních ellipsoidů vepsaných* ploše isogonální; hlavní kruhy $(z = 0)$ těchto ellipsoidů obalují patrně čáru v rovině $x\,y$, která se rozpadá v kruhy (K), (K').

Střed ellipsoidu vepsaného

$$x_0 = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\,cos\,2\,\beta, \quad y_0 = \frac{g}{2}\,sin\,2\,\beta, \quad z = 0 \tag{41}$$

opisuje ellipsu, jejíž dva vrcholy jsou O a A, a jejíž druhá osa má délku g; hlavní kruhy ellipsoidů mají středy (41) a poloměry

$$\frac{c}{2}\,sin\,2\,\beta;$$

body charakteristické, v nichž se hlavní kruh ellipsoidu (40*) dotýká kruhů základních isogonály (K) a (K'), leží na přímce, kterou obdržíme derivujíce rovnici (40*) vůči β:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) sin\,2\,\beta + g\,y\,cos\,2\,\beta = 0;$$

vzhledem k hodnotám (41) lze psáti tuto rovnici

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) d\,x_0 + y\,d\,y_0 = 0,$$

t. j. hlavní kruh vepsaného ellipsoidu (40*) dotýká se základních kruhů (K) a (K') v charakteristických bodech, jež leží na přímce jdoucí středem ellipsy (41) rovnoběžně s normálou této ellipsy ve středu hlavního kruhu sestrojenou.

V těchto bodech protíná charakteristika na vepsaném ellipsoidu rovinu $O\,x\,y$, a tečné roviny isogonály v těchto bodech jsou kolmé na základnu $x\,y$, takže jich stopy jsou tečnami kruhů (K), (K').

Přehledněji řečeno:

„Kolmice spuštěná ze středu ellipsy (41) na její tečnu (ve středu hlavního kruhu ellipsoidu) protíná hlavní kruh ellipsoidu v jeho styčných bodech s kruhy (K) a (K')."

Derivováním rovnice (40) vůči λ obdržíme

$$x^2 + y^2 = \frac{g}{\lambda}\,y \tag{42^a}$$

jakožto rovnici plochy, na níž leží charakteristika vepsaného ellipsoidu; vložením tohoto výrazu do rovnice isogonály vychází rovnice další

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = g\,\lambda\,y, \tag{42^b}$$

takže se charakteristika jeví jako průseč kruhového válce (42^a) s koulí (42^b). Válec se dotýká roviny $O\,x\,z$ podél osy $O\,z$, a jeho osa jest

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}\,g\,tg\,\beta;$$

koule prochází bodem A a má střed $\left(a,\ \frac{1}{2}\,g\,cotg\,\beta,\ 0\right)$.

Rovnice (42^a)

$$x^2 + y^2 = g\,y\,tg\,\beta$$

podá pro charakteristiku vztah parametrický

$$g\,tg\,\beta\,sin\,\varphi = a\,cos\,\varphi + c\,cos\,\alpha\,sin\,\varphi$$

t. j.

$$tg\,\varphi = \frac{a}{g\,tg\,\beta - c\,cos\,\alpha}. \tag{42^c}$$

Podél charakteristiky vepsaného ellipsoidu splývají tečné roviny plochy isogonální s tečnými rovinami ellipsoidu.

Tyto roviny obalují rozvinutelnou plochu opsanou o plochu isogonální podél charakteristiky (42^a); její stopa půdorysná se určí jako obálka stop tečných rovin.

Stopa tečné roviny vepsaného ellipsoidu (40) má rovnici

$$[(1 + \lambda^2)\,x - a]\,X + [(1 + \lambda^2)\,y - g\,\lambda]\,Y = a\,x + g\,\lambda\,y - a^2;$$

dosadíme-li sem hodnoty plynoucí z (42^a)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \frac{g}{\lambda} \sin \varphi,$$

obdržíme tuto rovnici ve tvaru

$$\left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} g \sin 2\varphi - a\right) X - \left(\frac{1+\lambda^2}{2\lambda} g \cos 2\varphi + g\lambda - \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} g\right) Y =$$

$$= \frac{a g}{2\lambda} \sin 2\varphi - \frac{1}{2} g^2 \cos 2\varphi + \frac{c^2 - a^2}{2}.$$

Obalová čára těchto přímek s parametrem φ je hledaná stopa rozvinutelné plochy.

Zaměňme parametr za

$$u = e^{2i\varphi},$$

čímž rovnice nabude tvaru

$$\left[\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}(Y + iX) - \frac{ia}{2} - \frac{g}{2}\right] u^2 + \left[\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} Y + \frac{2a}{g} X + \frac{c^2 - a^2}{g}\right] u$$

$$+ \left[\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}(Y - iX) + \frac{ia}{2\lambda} - \frac{g}{2}\right] = 0;$$

na obalové čáře vymizí diskriminant této rovnice 2. stupně, t. j. rovnice obálky zní

$$(43) \quad \left[\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda} Y + \frac{2a}{g} X + \frac{c^2 - a^2}{g}\right]^2 = \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} X - \frac{a}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} Y - g\right)^2,$$

aneb při hořejším označení

$$\lambda = \cot g\, \beta$$

$$(43^*) \quad \left[y \cos 2\beta + \frac{a}{g}\left(x - \frac{a^2 - c^2}{2a}\right) \sin 2\beta\right]^2 =$$

$$(x - a \sin^2 \beta)^2 + \left(y - \frac{1}{2} g \sin 2\beta\right)^2.$$

Hledaná stopa plochy rozvinutelné je tedy kuželosečka, jejíž ohnisko

$$x_0 = a \sin^2 \beta, \quad y_0 = \frac{1}{2} g \sin 2\beta \quad ,$$

je ve středu vepsaného ellipsoidu, a jejíž řídící přímka

$$(\Delta) \qquad g y \cos 2\beta + a\left(x - \frac{a^2 - c^2}{2a}\right) \sin 2\beta = 0$$

prochází průsekem osy Ox s kruhem (L)

$$x = \frac{a^2 - c^2}{2a}, \quad y = 0$$

a jest rovnoběžná s chordálou kruhu na kouli (42^b) a stopy válce (42^a).

Neboť chordála ta má rovnici

$$2ax + g\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) y - a^2 = 0$$

a s ní je přímka (Δ) patrně rovnoběžná.

XXXVI.

Centrála je kolmá na tuto přímku a prochází středem kruhu (42[a])

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2} g \, tg \, \beta;$$

její rovnice zní

$$g \, x \, cotg \, 2 \beta - a \left(y - \frac{1}{2} g \, tg \, \beta \right) = 0; \tag{44}$$

poněvadž této rovnici hoví souřadnice ohniska x_0, y_0, je přímka (44) osou naší kuželosečky.*)

Pro číselnou výstřednost ε kuželosečky (43*) obdržíme

$$\varepsilon^2 = cos^2 \, 2 \beta + \frac{a^2}{g^2} sin^2 \, 2 \beta = 1 - \frac{c^2}{g^2} sin^2 \, 2 \beta,$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{c^2}{g^2} sin^2 \, 2 \beta}, \tag{45}$$

takže kuželosečka ta jest ellipsa.

Ovládáme konstruktivně její ohnisko, přímku řídící, osu; známe její dvě tečny (v charakteristických bodech na hlavním kruhu ellipsoidu vedené tečny), a také snadno se verifikuje, že střed ellipsy splývá se středem koule (42[b])

$$x = a, \quad y = \frac{1}{2} g \, \lambda = \frac{1}{2} g \, cotg \, \beta.$$

Uvažujme případ poněkud obecnější změníce zároveň polohu vůči osám. Rovnice rotačního ellipsoidu buď

$$x^2 + y^2 + z^2 \, sin^2 \beta = k^2, \tag{A}$$

dále mějme válec kruhový

$$(x + h)^2 + y^2 = l^2. \tag{B}$$

Aby mezi plochami svazku určeného těmato dvěma plochama

$$x^2 + y^2 + z^2 \, sin^2 \beta - \lambda \left[(x + h)^2 + y^2 \right] = k^2 - \lambda \, l^2$$

vyskytla se koule, musí pro příslušné λ

$$1 - \lambda = sin^2 \beta, \quad \lambda = cos^2 \beta:$$

průsečná čára ellipsoidu (A) s válcem (B) leží na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \, h \, cotg^2 \beta . \, x = \frac{k^2 + (h^2 - l^2) \, cos^2 \beta}{sin^2 \beta}.$$

Stopa tečné roviny ellipsoidu (A) v bodě sférické čáry (B) má rovnici

$$X x + Y y = k^2,$$

***) Zároveň lze doplniti hořejší výsledky větou, že „centrála (44) je tečnou ellipsy středů (41)“.**

pro její obálku máme podmínky

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \quad (x + h)\,dx + y\,dy = 0,$$

t. j.

$$\begin{vmatrix} X, & Y \\ x + h, & y \end{vmatrix} = 0.$$

V souhlase s rovnicí (B) položme

$$x + h = l\cos\psi, \quad y = l\sin\psi,$$

načež se souřadnice bodu na obálce určí řešením rovnic

$$\begin{aligned} X\,(l\cos\psi - h) + Y\,l\sin\psi &= 0 \\ -X\sin\psi + Y\cos\psi &= 0 \end{aligned}$$

ve tvaru

$$X = \frac{k^2\cos\psi}{l - h\cos\psi}, \quad Y = \frac{k^2\sin\psi}{l - h\cos\psi},$$

a jest polární rovnice obálky patrně rovnicí kuželosečky s ohniskem ve středu ellipsoidu (A)

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\psi}; \quad p = \frac{k^2}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}.$$

Odtud

$$r = p + \varepsilon x,$$

takže přímka řídící jest

$$x = -\frac{p}{\varepsilon} = -\frac{k^2}{h}.$$

Rovnice obyčejná této kuželosečky zní

$$\left(1 - \varepsilon^2\right)\left(x - \frac{p\,\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2},$$

její polouosy jsou

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad \mathfrak{b} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

střed

$$x_1 = \frac{p\,\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad y_1 = 0,$$

tedy v našem případě

$$\mathfrak{a} = \frac{k^2}{l - \dfrac{h^2}{l}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{k^2}{\sqrt{l^2 - h^2}}$$

$$x_1 = \frac{k^2 h}{l^2 - h^2}.$$

Vrcholy na ose fokální mají souřadnice

$$x = x_1 \pm \mathfrak{a} = \frac{k^2\,(h \pm l)}{l^2 - h^2} = \pm\frac{k^2}{l \mp h}, \quad y = 0.$$

XXXVI.

Průsečíky koule s osou $O\,x$ mají souřadnice závislé na β

$$x^2 - 2\,h\,cotg^2\beta \,.\, x - \frac{k^2 + (h^2 - l^2)\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = 0,$$

a tyto body splynou s vrcholy obalové kuželosečky, platí-li podmínky

$$h\,cotg^2\beta = \frac{k^2 h}{l^2 - h^2}, \quad \frac{k^2 + (h^2 - l^2)\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{k^4}{l^2 - h^2},$$

které se redukují na jednu:

„Rozvinutelná plocha opsaná rotačnímu ellipsoidu vejčitému podél jeho proniku s kruhovým válcem, jehož základna leží v rovině hlavního kruhu, protíná rovinu hlavního kruhu v ellipse, jejíž vrcholy leží na kouli obsahující pronikovou čáru, existuje-li mezi délkou polouosy k, délkou rotační polouosy $\frac{k}{\sin\beta}$, poloměrem základny válce l a vzdáleností jejího středu od středu ellipsoidu h vztah *)

$$k^2\,tg^2\beta = l^2 - h^2.\text{“}$$

V hořejším případě ellipsoidu (40*) a válce (42ᵃ) jest

$$k^2 = \frac{c^2}{4}\sin^2 2\beta, \quad l = \frac{1}{2}\,g\,tg\,\beta,$$

$$h^2 = x_0{}^2 + \left(y_0 - \frac{1}{2}\,g\,tg\,\beta\right)^2 = a^2\sin^4\beta + \left(\frac{1}{2}\,g\sin 2\beta - \frac{1}{2}\,g\,tg\,\beta\right)^2,$$

tedy

$$l^2 - h^2 = \frac{1}{2}\,g\sin 2\beta\left(g\,tg\,\beta - \frac{1}{2}\,g\sin 2\beta\right) - a^2\sin^4\beta$$
$$= c^2\sin^4\beta = k^2\,tg^2\beta,$$

takže podmínka poslední věty je splněna:

„Fokální osa obalové ellipsy (43) je co do délky i co do polohy průměr koule (42ᵇ) procházející středem základny válce (42ᵃ).“

Stopu normály v bodě uvažované charakteristiky určíme dle obecných vzorů (35), str. 44

$$X_0 = a - g^2\frac{x\,y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad Y_0 = g^2\frac{x^2\,y}{(x^2 + y^2)}$$

dosazením hodnot

$$x = \frac{g}{\lambda}\sin\varphi\cos\varphi, \quad y = \frac{g}{\lambda}\sin^2\varphi, \quad x^2 + y^2 = \frac{g^2}{\lambda^2}\sin^2\varphi$$

---

*) Podržíme-li h jako neodvislý parametr, bude v tomto případě rovnice (B) zníti

$$x^2 + y^2 + 2\,h\,x = k^2\,tg^2\beta,$$

a rovnice koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = (k^2 + 2\,h\,x)\,cotg^2\beta;$$

takže při proměnném h tvoří válce i koule svazek.

XXXVI.

ve tvaru

$$X_0 = a - \frac{1}{2} g \lambda \sin 2\varphi, \quad Y_0 = \frac{1}{2} g \lambda (1 + \cos 2\varphi),$$

a tedy

„Plocha normál podél charakteristiky vepsaného ellipsoidu (40*) protíná rovinu Oxy v téže kružnici jako koule (42[b]), na níž se charakteristika nachází."

Normály protínají osu rotačního ellipsoidu, a tedy jich průměty procházejí středem x_0, y_0 tohoto ellipsoidu. Tímto bodem procházejí zejména normály v bodech charakteristických, společných hlavnímu kruhu ellipsoidu a základně válce, které jsou poloměry kruhů (K), resp. (K').

„Střed vepsaného ellipsoidu je průsekem poloměrů základních kruhů (K) (K') příslušných k průsečíkům jejich se stopou válce (42[a])."

Přímka spojující bod A se středem ellipsoidu (x_0, y_0) má rovnici

$$\frac{y}{x-a} = \frac{g \sin\beta \cos\beta}{-a \cos^2\beta} = -\frac{g}{a} tg\, \beta,$$

a protíná osu Oy v bodě

$$x = 0, \quad y = g\, tg\, \beta,$$

jenž leží na válci (42[a]).

„Střed vepsaného ellipsoidu leží na přímce spojující stopu válce (42[a]) na ose Oy s bodem A."

V hořejším případě proniku ploch (A) a (B) obdržíme pro stopu normály ellipsoidu souřadnice

$$X = -x \cot g^2 \beta, \quad Y = -y \cot g^2 \beta,$$

t. j. stopa normály ellipsoidu (A) v bodech jeho průsečné čáry s válcem (B) leží na kruhu soustředném s koulí, která touto čarou prochází. Poloměr kruhu toho jest $l \cot g^2 \beta$, kdežto poloměr koule jest

$$\sqrt{\frac{k^2}{\sin^2\beta} + (h^2 - l^2) \cot g^2 \beta + h^2 \cot g^4 \beta}$$

stopa plochy normál splyne se stopou koule pouze pro případ výše zmíněný (kdy tyto poloměry jsou stejné)

$$k^2 tg^2 \beta = l^2 - h^2.$$

Úpatnice ellipsy, obalové čáry stop tečných rovin ellipsoidu v bodech uvažované čáry, ze středu ellipsoidu jako pólu, který jest její ohniskem, jest její vrcholová kružnice. Pro souřadnice paty X, Y kolmice na stopu tečné roviny v bodě (x, y, z) nalezneme výrazy

$$X = \frac{k^2 x}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{k^2 y}{x^2 + y^2},$$

XXXVI.

t. j. pata kolmice je inversní s průmětem dotykového bodu na ellipsoidu vůči hlavnímu kruhu ellipsoidu.

Tedy vrcholový kruh obalené ellipsy má rovnici

$$X^2 + Y^2 - \frac{2\,h\,k^2}{l^2 - h^2}\,X = \frac{k^4}{l^2 - h^2}\,,$$

a jeho poloměr, větší polouosa ellipsy, jest

$$\frac{k^2\,l}{l^2 - h^2}\,.$$

Tento kruh jest inversní se stopou válce (B) vůči hlavnímu kruhu ellipsoidu; jeho střed je středem ellipsy

$$x = \frac{h\,k^2}{l^2 - h^2}\,, \qquad y = 0$$

a splyne se středem koule jen v naznačeném zvláštním případě. V tomto případě pak bod úpatní*) a stopa normály ellipsoidu jsou na téže tětivě stopy koule, která tětiva prochází ohniskem, a stopa koule jest inversní se stopou válce vůči hlavnímu kruhu ellipsoidu.

V obr. 7. jsme vyšli z válce $\mathfrak{V}$ daného svojí stopou $\mathfrak{V}'$, která jest kruh nad průměrem $O\,J\,J'$; vytkneme průsečíky $G\,G'$ tohoto kruhu s kruhy základními (K), (K'), jichž středy obvykle značeny B, B'.

Přímky $A\,J'$, $B\,G$, $B'\,G'$ protínají se v bodě F, který je střed kruhu $\mathfrak{E}'$, jenž je zároveň stopa i hlavní kruh vepsaného ellipsoidu $\mathfrak{E}$, a ostatně leží na přímce $J\,F\,S$, ose symetrie bodů G, G'.

Tato přímka protíná přímku $A\,C$ v bodě, jenž je středem kruhu obsahujícího body $A\;G\;G'$; tento kruh $\mathfrak{K}'$ je stopou koule $\mathfrak{K}$, která obsahuje charakteristiku, t. j. pronik válce $\mathfrak{V}$ s isogonálou a ellipsoidem. Průměr tohoto kruhu položený na přímce $J\,S$ tvoří velkou osu ellipsy, která jest stopou rozvinutelné plochy opsané isogonální ploše podél charakteristiky, a bod F jest její ohnisko.

Konstrukce menší osy provede se takto: Vedeme přímku $F\,M_1 \perp J\,S$, a stanovíme její průsek M_1 s kruhem $\mathfrak{V}'$; bod M_1 je průmět bodu M na isogonále, $F\,M_1$ je průmět jeho normály; stopa tečné roviny $\mathfrak{T}'$ příslušné k bodu M bude kolmá na $F\,M_1$, t. j. rovnoběžná s velkou osou ellipsy, a bude to tečna ve vrcholu menší osy ellipsy. Znajíce směr této přímky, potřebujeme určiti pouze jeden bod T_1 na stopě tečné roviny $\mathfrak{T}$. Volili jsme za T_1 průsek přímky $A\,T_1$ kolmé na $A\,M_1$ s přímkou $m\,T_1$ kolmou na $O\,M_1$ v její průseku m s přímkou $A\,C$.

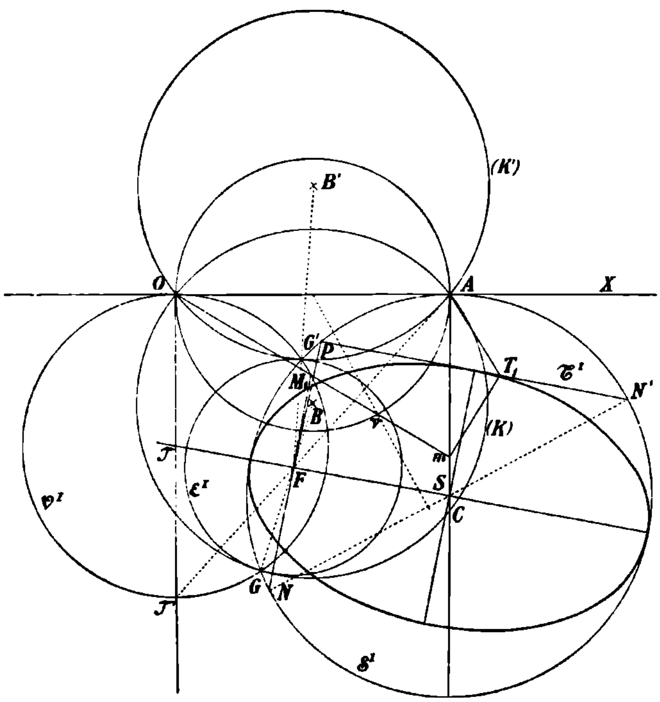
Je-li dán střed vepsaného ellipsoidu F, bude určen jeho hlavní kruh na základě vlastnosti, že protíná kruh $(O\,A)$ pod pravým úhlem. Neboť tento kruh $(O\,A)$ jest pravoúhlý vůči kruhům $\mathfrak{E}'$ a $\mathfrak{V}'$, a tedy také vůči

*) Bod na úpatnici je zároveň stopou tečny meridianu na ploše rotační

kruhu $\mathfrak{G}^I$, jenž náleží jejich svazku. Délka tečny z bodu F ke kruhu $(O\,A)$ určuje poloměr kruhu $\mathfrak{G}^I$, tento kruh pak stanoví body G, G'.

Přímka $N\,S$ spojující stopu normály N se středem koule S svírá úhel $2\,\varphi + \frac{\pi}{2}$ s osou $O\,A$.

Přímka $O\,M_1$ určuje na kruhu $(O\,A)$ bod ν; kolmice $S\,N\,N'$ z bodu S na jeho poloměr spuštěná protíná stopu koule v bodech N, N', z nichž



Obr. 7.

jeden N je stopa normály a druhý N' leží na stopě roviny tečné; a sice leží N na průmětu normály $F\,M_1$, jenž protíná stopu koule v bodě P, který je pata kolmice spuštěné z ohniska F na tečnu ellipsy $P\,N'$.

U rotačního ellipsoidu (A) jest výstřednost $\cos\beta$.

Je-li tento ellipsoid libovolně dán, a zvolíme-li kruh $\mathfrak{P}^I$ (B) s libovolným středem, jehož vzdálenost od středu ellipsoidu značíme h, a jehož poloměr l je dán vzorcem

$$l^2 = h^2 + k^2\,tg^2\,\beta,$$

bude tím určena na ellipsoidu křivka (χ), podél které se může jistá plocha isogonální dotýkati ellipsoidu.

Sestrojíme kruh $\mathfrak{G}^I$ inversní s kruhem $\mathfrak{P}^I$ vůči hlavnímu kruhu ellipsoidu $\mathfrak{E}^I$; všecky tři kruhy procházejí dvěma body G, G'. Společná tečna kruhů $\mathfrak{P}^I$ a $\mathfrak{G}^I$ dotýká se těchto v bodech O, A, čímž jsou určeny

Analyticky máme při daných k, l, β a podmínce přiměřeně stanoveném h podmínky

$$k = \pm \frac{c}{2} \sin 2\beta, \quad l = \pm \frac{1}{2} g \, tg \beta,$$

ze kterých hodnoty c, $g = \sqrt{a^2 + c^2}$ jsou určitelny.

Můžeme též zvoliti dle libosti konstanty k, l, h a určiti konstantu β z rovnice

$$tg \beta = \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{k},$$

načež plocha isogonální s konstantami

$$c = \pm \frac{2k}{\sin 2\beta}, \quad g = \pm 2 l \cot g \beta$$

poskytne vepsaný ellipsoid shodný s daným.

Na každém vejčitém ellipsoidu rotačním leží ∞^1 křivek, podél nichž se ellipsoid dotýká jisté plochy isogonální; nazveme je čarami isogonálními; křivka taková jest na daném ellipsoidu úplně určena, známe-li osu válce kruhového (B), který ji na ellipsoidu vytíná. Isogonální čarou procházejí dvě shodné plochy isogonální opsané ellipsoidu, jejich hlavní roviny vertikální ($O z A$) mají stopy ve dvou společných tečnách kruhů $\mathfrak{A}^1$ a $\mathfrak{B}^1$, a jsou vůči centrální rovině $J S F Z$ symetricky postaveny.

Abychom určili isogonální čáry na dané kouli, pišme její rovnici ve tvaru

$$(C) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = m^2,$$

kdežto rovnice válce buď

$$(D) \qquad (x + n)^2 + y^2 = l^2.$$

Násobíme-li první rovnici λ a přičteme ke druhé, vyjde

$$x^2 + y^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} z^2 + \frac{2n}{1+\lambda} x = \frac{l^2 - n^2 + \lambda m^2}{1+\lambda}$$

aneb

$$(E) \qquad \left(x + \frac{n}{1+\lambda}\right)^2 + y^2 + \frac{\lambda}{1+\lambda} z^2 = \frac{l^2 - n^2 + \lambda m^2}{1+\lambda} + \frac{n^2}{(1+\lambda)^2},$$

rovnice rotační plochy 2. stupně. Aby byla ellipsoidem s výstředností $\cos \beta$, musí

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} = \sin^2 \beta, \quad \lambda = tg^2 \beta,$$

načež porovnáním s (A) a (B) máme

$$h = n - \frac{n}{1+\lambda} = \frac{\lambda n}{1+\lambda} = n \sin^2 \beta,$$

$$k^2 = l^2 \cos^2 \beta + m^2 \sin^2 \beta - n^2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta,$$

tedy

$$k^2 \, tg^2 \beta + h^2 - l^2 = -l^2 \cos^2 \beta + \frac{m^2 \sin^4 \beta}{\cos^2 \beta};$$

čára bude isogonální pro

$$l \cos^2 \beta = m \sin^2 \beta,$$

kteréžto podmínce lze vyhověti při libovolných hodnotách l, m, takže pronik kruhového válce s koulí je vždy čára isogonální, pokud se stopy těchto ploch protínají v realných bodech.

Úhel β obdržíme určený rovnicí

$$\lambda = \frac{l}{m} = tg^2 \beta,$$

takže rovnice ellipsoidu zní

$$(E^*) \qquad x^2 + y^2 + \frac{l}{l+m} z^2 + \frac{2\,n\,m}{l+m} x = \frac{l^2 - n^2 + l\,m}{l+m} m.$$

Isogonální plocha se určí konstruktivně při daných stopách válce a koule tím, že vedeme společnou tečnu obou kruhů; tečné body jsou O, A, dále známe průsečné body obou kruhů $G\,G'$, čímž jsou dány kruhy (K), (K') a tedy plocha isogonální.

Předpokládejme, že při stálé kouli (C) pošinujeme kruh (D) stálého poloměru; isogonální čáry mají různé vepsatelné ellipsoidy, jichž ohniska budou naplňovati kruh, pokud šineme střed kruhu (D) po poloměru koule, jinak ale naplňují ohniska kouli, děje-li se pošinování s dvojí volností.

Pro polohu ohniska ellipsoidu máme

$$x = -\frac{n}{1+\lambda}, \quad z = k \cot g \beta, \quad y = 0;$$

avšak

$$k^2 \cot g^2 \beta = \frac{l^2 \cos^4 \beta}{\sin^2 \beta} + m^2 \cos^2 \beta - n^2 \cos^4 \beta,$$

tedy

$$z^2 = 2\,m^2 \cos^2 \beta - n^2 \cos^4 \beta.$$

Dosazením hodnoty $\lambda = tg^2 \beta$ vychází

$$x^2 + z^2 = 2\,m^2 \cos^2 \beta, \quad tg^2 \beta = \frac{l}{m},$$

při čemž β jest úhel stálý:

„Ohniska probíhají kruh v rovině $x\,z$, a dáme-li kruhu (D) dvojí volnost, naplní kouli soustřednou s koulí (C) a poloměru

$$m \sqrt{2} \cos \beta = m \sqrt{\frac{2\,m}{l+m}}.\text{“}$$

XXXVI.

Zvolíme-li však za (D) kruhy soustředné, bude n stálé, l proměnné, a rovnice

$$x = -n\cos^2\beta,\quad z^2 = 2m^2\cos^2\beta - n^2\cos^4\beta$$

dávají

$$x^2 + z^2 + \frac{2m^2}{n}x = 0,$$

t. j. ohniska opisují kruh v rovině xz.

Při stálém l obalují vepsatelné ellipsoidy (E^*) rotační ellipsoid s osou Oy

$$\frac{x^2+z^2}{l+m} + \frac{y^2}{l} = m$$

Vepsatelné ellipsoidy příslušné k soustředným válcům obalují plochu 4. stupně

$$(x^2+y^2+z^2)^2 + 2m^2(x^2+y^2-z^2) + 4m^2nx + m^2(m^2+4n^2) = 0.$$

14. Rovnici tečné roviny isogonální plochy obdržíme ve tvaru

$$\begin{aligned}(46)\qquad & Ax + By + Cz = (a\cos\varphi + c\cos\alpha\sin\varphi)(a\cos\varphi\cos\alpha + c\sin\varphi),\\ & A = a\cos\alpha\cos 2\varphi + c(1+\cos^2\alpha)\sin\varphi\cos\varphi,\\ & B = a\cos\alpha\sin 2\varphi - c(\cos^2\varphi - \cos^2\alpha\sin^2\varphi),\\ & C = r\sin\alpha,\quad r = a\cos\varphi + c\cos\alpha\sin\varphi.\end{aligned}$$

Určíme stopu rozvinutelné plochy, kterou obalují tečné roviny v bodech téhož povrchového kruhu Γ_φ. Je to obalová čára stopy tečné roviny

$$Ax + By = \frac{ac}{2}\sin 2\varphi + (a^2\cos^2\varphi + c^2\sin^2\varphi)\cos\alpha + \frac{ac}{2}\sin 2\varphi\cos^2\alpha;$$

při tom φ je konstanta, parametr α vyskytuje se pouze v $\cos\alpha$, a seřadíme-li dle jeho mocnin, máme kvadratickou rovnici vůči $\cos\alpha$:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{c}{2}\sin 2\varphi\, x + c\sin^2\varphi\, y - \frac{ac}{2}\sin 2\varphi\right)\cos^2\alpha\\ &+ (a\cos 2\varphi\, x + a\sin 2\varphi\, y - a^2\cos^2\varphi - c^2\sin^2\varphi)\cos\alpha\\ &+ \left(\frac{c}{2}\sin 2\varphi\, x - c\cos^2\varphi\, y - \frac{ac}{2}\sin 2\varphi\right) = 0.\end{aligned}$$

Rovnici obalové čáry obdržíme anulováním diskriminantu této rovnice. Výsledek se poněkud zjednoduší, pošine-li se počátek souřadnic do bodu A, t. j. zamění-li se x za $x + a$.

Hledaná stopa rozvinutelné plochy má pak rovnici

$$(47)\qquad \begin{cases} a^2\left(x\cos 2\varphi + y\sin 2\varphi - \dfrac{a^2+c^2}{a}\sin^2\varphi\right)^2 \\ = 2c^2\sin 2\varphi\,(x\cos\varphi + y\sin\varphi)(x\sin\varphi - y\cos\varphi).\end{cases}$$

Transformací souřadnic

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi,\quad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$
$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi,\quad y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi,$$

kterou se nová osa úseček $A X$ přenáší do polohy A_φ, t. j. do přímky rovnoběžné se stopou roviny kruhu Γ_φ, zjednoduší se rovnice nabývajíc tvaru

$$(47^a) \quad \left(X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \frac{a^2 + c^2}{a} \sin^2 \varphi\right)^2 + \frac{2 c^2}{a^2} \sin 2 \varphi X Y = 0 .$$

Stopa rozvinutelné plochy opsané ploše isogonální podél kruhu Γ_φ je tedy hyperbola; dotýká se přímek $X = 0$ a $Y = 0$ v jich průsecích s přímkou

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \frac{a^2 + c^2}{a} \sin^2 \varphi .$$

V původních souřadnicích s počátkem O zní rovnice této přímky

$$(x - a) \cos 2 \varphi + y \sin 2 \varphi = \frac{a^2 + c^2}{a} \sin^2 \varphi ,$$

a výsledek lze vyjádřiti takto:

„Polára bodu A vůči obalové hyperbole má v původních souřadnicích s počátkem O rovnici

$$x \cos 2 \varphi + y \sin 2 \varphi = a \cos^2 \varphi + \frac{c^2}{a} \sin^2 \varphi$$

a tečny z bodu A k hyperbole vedené jsou

$$(x - a) \cos \varphi + y \sin \varphi = 0, \quad - (x - a) \sin \varphi + y \cos \varphi = 0,$$

t. j. mají směr φ a $\varphi + \frac{\pi}{2}$."

Polára obsahuje bod

$$x = a, \quad y = \frac{a^2 + c^2}{2 a} tg \varphi ,$$

a je kolmá na směr 2φ.

Asymptotické směry čáry (47) se určí z rovnice

$$X^2 \cos^2 \varphi + Y^2 \sin^2 \varphi + \left(1 + 2 \frac{c^2}{a^2}\right) \sin 2 \varphi X Y = 0,$$

čili po řešení

$$\frac{Y \sin \varphi}{X \cos \varphi} = - 1 - 2 \frac{c^2}{a^2} \pm 2 \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^4}{a^4}} = - 1 - 2 \cot g^2 \vartheta \pm 2 \frac{\cot g \vartheta}{\sin \vartheta}$$

t. j.

$$\frac{Y \sin \varphi}{X \cos \varphi} = - tg^2 \frac{\vartheta}{2} , \quad - \cot g^2 \frac{\vartheta}{2} ;$$

vrátíme-li se k původním souřadnicím, obdržíme rovnice asymptotických směrů po krátké transformaci ve tvaru

$$(as) \qquad x (\cos 2 \varphi \pm \cos \vartheta) + y \sin 2 \varphi = 0.$$

Pro střed máme nejprvé z (47^a)

$$X \cos \varphi + Y \left(1 + \frac{2c^2}{a^2}\right) \sin \varphi = \frac{g^2}{a} \sin^2 \varphi ,$$

$$\left(1 + \frac{2c^2}{a^2}\right) X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \frac{g^2}{a} \sin^2 \varphi ,$$

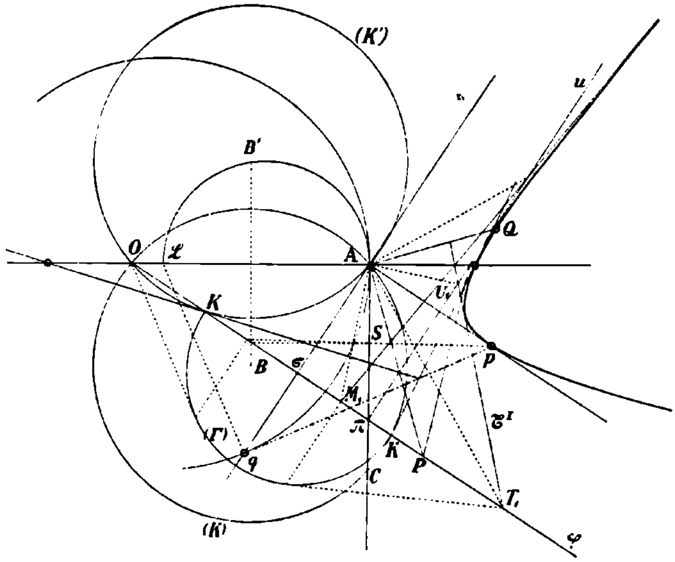
takže

$$X \cos \varphi = Y \sin \varphi = \frac{a}{2} \sin^2 \varphi ;$$

v původní soustavě s počátkem O obdržíme odtud pro souřadnice středu hyperboly

(stř.) $$x = a, \quad y = \frac{a}{2} tg\, \varphi .$$

Naše konstrukce stopy tečné rovinypodá naši hyperbolu jako výtvar promětných řad. Tuto stopu $\mathfrak{T}^I$ rstojíme (obr. 8.) jako spojivou přímku stopy tečny T_1 kruhu Γ s bodem U_1, který je průsek přímky $A\, U_1 \perp A\, M_1$



Obr. 8.

s přímkou u stojící kolmo na přímce $O\, M_1$ v její průseku π s přímkou $A\, C$. V našem případě probíhá bod T_1 pevnou přímku O_φ a bod U_1 pevnou přímku u.

Body $M_1 T_1$ probíhají páry involuce na přímce O_φ, a tedy je řada (T_1) promětna s následujícími útvary: řadou (M_1), svazkem $(A\, M_1)$, svazkem $(A\, U_1)$ a tedy s řadou (U_1) na přímce u.

Promětné řady (T_1) a (U_1) vyvolají jako obalovou čáru přímek $T_1\, U_1 \equiv \mathfrak{T}^I$ kuželosečku.

Involutorní vztah bodů $M_1 T_1$ dovoluje tyto body vyměniti, a tak obdržíme novou tečnu hyperboly. Tímto způsobem je dána involuce tečen na kuželosečce. Jeden její pár obdržíme kladouce body M_1, T_1 do σ (střed kruhu Γ) a do nekonečně vzdáleného bodu přímky O_φ; tyto tečny se protnou v bodě A. Volme dále za M_1 průsek π přímky u s přímkou O_φ, takže T_1 padne do polu P přímky u vůči kruhu (Γ); zde $A\,U_1$ padne do $A\,x$, a tedy tečna hyperboly spojuje stopu přímky u na ose $O\,x$ s bodem P.

Přeložíme-li M_1 do P, padne T_1 do π, kolmice $A\,Q$ na $A\,P$ protne u v bodě Q, v němž se tato přímka dotýká hyperboly. Tečny tohoto páru $\pi\,P$ se tedy protínají na ose $O\,x$; ježto na této ose leží průsečné body dvou párů tečen involuce, vychází, že

„osa involuce tečen hyperboly určených páry M_1T_1 jest na ose $O\,x$."

Páry M_1T_1 splynou v bodech K, K', v nichž O_φ protíná základní kruhy; přirozeně budou příslušné přímky $\mathfrak{S}^{\mathrm{I}}$ tečnami těchto kruhů. Tyto tečny hyperboly jsou samodružné paprsky naší involuce tečen, takže

„průsečík tečen kruhů základních (K), (K') v jich průsecích s přímkou O_φ vedených jest pólem přímky $O\,x$ vůči hyperbole."

Tyto tečny dotýkají se hyperboly v bodech na poláře $O\,x$, které tedy se snadno určí.

Položí-li se bod U_1 do π, octne se M_1 v bodě O, a T_1 padne na poláru bodu O vůči kruhu Γ:

„Přímka O_φ dotýká se hyperboly v bodě náležejícím poláře bodu O vůči kruhu Γ."

Průseky hyperboly s osou $O\,x$ se dají snadno určiti z rovnice (47). Pro $y = 0$ podává tato rovnice

$$a^2\left(x \cos 2\varphi - \frac{g^2}{a}\sin^2\varphi\right)^2 = c^2 x^2 \sin^2 2\varphi,$$

a odtud

$$(a \cos 2\varphi \pm c \sin 2\varphi)\,x = g^2 \sin^2\varphi\,;$$

$$g^2 = \frac{a^2}{\sin^2\vartheta}\,,\quad c = a\,\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,,$$

takže vychází v souřadnicích s počátkem A jako úsečky stop hyperboly na $A\,x$:

$$x = \frac{a \sin^2\varphi}{\sin\vartheta \sin(\vartheta \pm 2\varphi)}\,.$$

Rovnice jedné z asymptot v souřadnicích s počátkem A zní

$$x(\cos 2\varphi + \cos\vartheta) + y \sin 2\varphi = a \sin^2\varphi\,;$$

při parametru

$$u = e^{2i\varphi}$$

XXXVI.

zní tato rovnice

$$\left(x - i\,y + \frac{a}{2}\right) u^2 + 2\left(x \cos\vartheta - \frac{a}{2}\right) u + \left(x + i\,y + \frac{a}{2}\right) = 0;$$

obalová čára asymptoty má rovnici (počátek souřadnic A)

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2\vartheta \left(x - \frac{a}{2} \sec\vartheta\right)^2,$$

jež přísluší ellipse s ohniskem $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, řídící přímkou

$$x = \frac{a}{2} \sec\vartheta$$

a výstředností $\cos\vartheta$. Rovnice druhé asymptoty liší se znamením $\cos\vartheta$ a její obalová ellipsa má za řídící přímku

$$x = -\frac{a}{2} \sec\vartheta.$$

Obě tyto ellipsy dotýkají se (v bodě A) přímky $A\,C$; poněvadž střed hyperboly leží na $A\,C$, jest možna ke každé ellipse jen ještě jedna tečna, a tyto jsou asymptoty hyperboly.

Vraťme se na okamžik k poláře bodu A. Ta musí obsahovati pól přímky $O\,x$, t. j. průsečík tečen kruhů základních v jich průsecích s přímkou O_φ. Tímto bodem jest pak uvažovaná polára jakožto kolmice na směr $2\,\varphi$ plně určena .

Pro úplnost vyšetříme ještě její obálku. V souřadnicích s počátkem A má polára rovnici

$$x \cos 2\,\varphi + y \sin 2\,\varphi = \frac{g^2}{a} \sin^2\varphi,$$

a její obálka má parametrické vyjádření

$$x = -\frac{g^2}{a} \sin^2\varphi = \frac{g^2}{2\,a} (\cos 2\,\varphi - 1)$$

$$y = \frac{g^2}{2\,a} \sin 2\,\varphi;$$

souřadnice tyto hoví též rovnici (47).

V původních souřadnicích s počátkem O znějí tyto výrazy

$$x = \frac{a^2 - c^2}{2\,a} + \frac{a^2 + c^2}{2\,a} \cos 2\,\varphi, \quad y = \frac{a^2 + c^2}{2\,a} \sin 2\,\varphi,$$

takže máme větu:

„Polára bodu A vůči obalové hyperbole (47) obaluje kružnici, která má svůj střed na ose $O\,x$ ve stopě kruhu (L) a prochází bodem A; její poloměr ve směru $2\,\varphi$ končí bodem průsečným hyperboly s polárou bodu A.“

Znalost tečen hyperboly $A\,p$, $A\,q$ a bodů dotykových p, q stačí k pohodlnému určení bodu τ, v němž se stopa tečné roviny $\mathfrak{S}^1$ dotýká obalové hyperboly. Máme tak trojúhelník opsaný daný tečnami $A\,p$, $A\,q$, $\mathfrak{S}^1$; spojnice dotykových bodů s protějšími vrcholy procházejí společným bodem, čímž je dána přímka $A\,\tau$.

Body $T_1\,\tau$ tvoří pár involuce, kterou na přímce $\mathfrak{S}^1$ určují tečny sdružených směrů v bodě M na ploše isogonální; nebo přímka $M\,\tau$ je na opsané ploše rozvinutelné a přímka $M\,T_1$ jest tečna kruhu, podél něhož se rozvinutelná plocha dotýká plochy isogonální.

Pro řečenou involuci umíme strojiti dva páry, neboť konstrukce ellipsy, která je stopou rozvinutelné plochy opsané podél dotykové čáry s vepsaným ellipsoidem, podává analogickým způsobem další pár involuce.

Uvedenou právě involuci třeba znáti pro konstrukci tečny meze vlastního stínu plochy isogonální; při konstrukci bodů této čáry na ploše vyskytne se samoděk stopa tečné roviny a ta je tečnou meze stínu vrženého; tečna meze stínu vlastního však určuje směr sdružený se směrem světla. Poněvadž známe stopu světelného paprsku z bodu M na přímce $\mathfrak{S}^1$, můžeme z určené involuce sestrojiti bod s touto stopou sdružený, jenž pak s bodem M spojen dává tečnu meze stínu vlastního.

Určíme ještě stopu rozvinutelné plochy, která obaluje tečné roviny v bodech téže hyppopédy $\alpha = \text{konst.}$ Podobným způsobem jako výše nalezneme, že touto stopou jest ellipsa

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(a\,x\cos\alpha - c\,y\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2} - \frac{a^2-c^2}{2}\cos\alpha\right)^2\\ &+\left(a\,y\cos\alpha + c\,x\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2} - a\,c\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\left(c\,y\sin^2\alpha + g^2\cos\alpha\right)^2, \quad g^2 = a^2 + c^2; \end{aligned}\right.$$

tato ellipsa prochází bodem A, a má osy rovnoběžné s osama soustavy souřadnic; jedna z nich má rovnici

$$y = \frac{c}{2}\sec\alpha = \frac{c^2}{2\,a}\cot g\,\gamma.\text{*)}$$

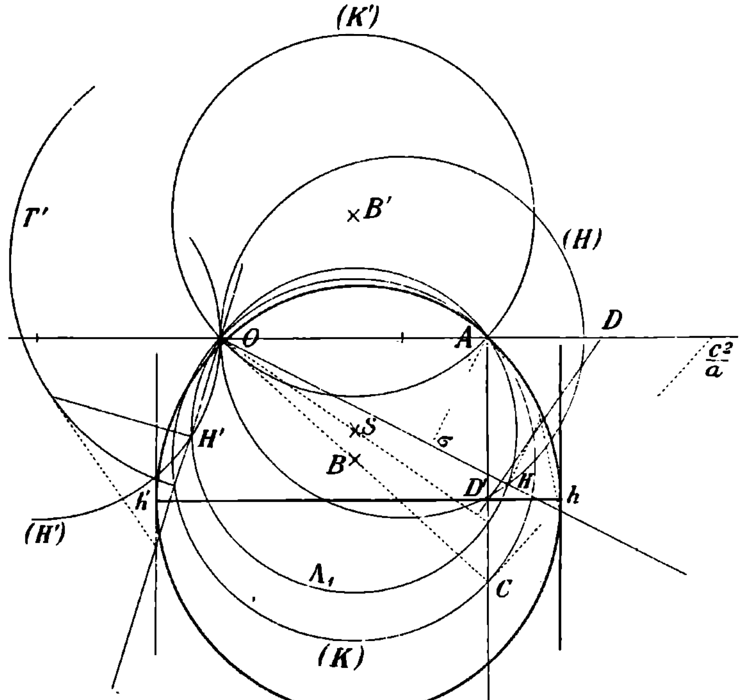
Snadno určíme tečny v její vrcholech, t. j. stopy tečných rovin kolmých na rovinu $O\,x\,z$. Tyto roviny jsou tečné k opsaným válcům směru $O\,y$, jež se dotýkají plochy isogonální ve dvou čarách promítaných v kruhy (H), (H') (obr. 9.)

$$x^2 + y^2 = \pm\,g\,x.$$

***) Na $A\,x$ naneseme $A\,D = \dfrac{c^2}{2\,a}$, načež kolmice $D\,D'$ na $O\,S$ spuštěná stanoví na $A\,C$ bod D', kterým prochází osa ellipsy, rovnoběžná s $O\,x$.**

Tyto kruhy protnou průmět hyppopédy ve dvou bodech H, H', jež jsou průměty bodů na ploše, které řeší problém. Stopy tečných rovin znamenali jsme h, h'.

Pro obalovou ellipsu známe nyní dva vrcholy na ose rovnoběžné s Ox a bod A, čímž jest planimetricky určena.



Obr. 9.

Rovnice (48) má tvar $P^2 + Q^2 = R^2$; přímka $Q = 0$ protíná přímky $P \pm R = 0$ v bodech na ellipse, a jsou v nich tyto přímky její tečnami. Je pak

$$P - R \equiv a\,x \cos\alpha - c\,y - a^2 \cos\alpha,$$
$$P + R \equiv a\,x \cos\alpha - c\,y \cos^2\alpha + c^2 \cos\alpha,$$

takže známe na naší ellipse dvě tečny

$$(t) \qquad a\,x \cos\alpha - c\,y - a^2 \cos\alpha = 0$$
$$(t') \qquad a\,x - c\,y \cos\alpha + c^2 = 0,$$

a jich body dotykové, jež leží na přímce

$$(\Delta) \qquad c\,(x - a) + 2\,a\,y \frac{\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = 0;$$

tato prochází bodem A rovněž jako tečna (t); rovnici této tečny lze psáti

$$\frac{y}{x - a} = \frac{a \cos\alpha}{c} = tg\,\vartheta \cos\alpha;$$

tím jest jednak dána její směrnice $tg\,\vartheta\cos\alpha$, jednak je zřejmo, že tato tečna bodu A obsahuje bod

$$(e) \qquad x = a + \frac{c}{2}\sec\alpha\,,\ y = \frac{a}{2}\,,$$

jehož grafické určení skládá se z prvků v obrazci již zastoupených.

Tečna t' protíná osu $O\,x$ v bodě

$$x = -\frac{c^2}{a}\,,\ y = 0,$$

a jest kolmá na přímku $A\,S$ spojující střed průmětu hyppopédy s bodem A; neboť má směrnici

$$\frac{a}{c\cos\alpha} = tg\,\vartheta\sec\alpha\,.$$

Tato tečna jako stopa tečné roviny přísluší k bodu $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ostatně můžeme sestrojiti druhé dvě tečny vrcholové přímo; rovnice $\varDelta = 0$ k tomu určuje úhel φ

$$tg\,2\,\varphi = -\frac{2\,a\cos\alpha}{c + c\cos^2\alpha}\,;$$

úhel $2\,\varphi$ strojíme snadno, znajíce předem délky c, $c\cos\alpha$.

Z rovnice $(\varDelta)$ shledáváme, že tento výraz jest směrnice přímky, která je souměrná s normálou přímky $\varDelta$. Vedeme tedy středem kruhu $(O\,A)$ přímku souměrně ležící s normálou přímky $\varDelta$; ta protne kruh $(O\,A)$ v dvou bodech, jež s bodem O určují směry $O\,\varphi$; tyto přímky $O\,\varphi$ stanoví na průmětu hyppopédy $\varDelta_1$ body, jimž jako stopy tečných rovin příslušejí tečny vrcholové rovnoběžné s $O\,x$.

Jinak si můžeme upraviti konstrukci takto: Pomocná přímka

$$(p) \qquad c\,y\,(1 + \cos^2\alpha) + 2\,a\,x\cos\alpha = 2\,a\,c$$

obaluje hyperbolu

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{(y - a)^2}{a^2} = -1\,;$$

při tom je poloha příslušná k úhlu α určena průsekem na $O\,x$, jenž má úsečku

$$x_0 = \frac{c}{\cos\alpha}\,.$$

Poněvadž směrnice této přímky splývá s posledně uvedenou hodnotou $tg\,2\,\varphi$, je tím docíleno konstruktivního řešení uvažovaného problému.

15. Rovnice (46) vedou k poměrně jednoduchému planimetrickému stanovení opsaných válců rovnoběžných s rovinou $O\,x\,y$. Výrazy A, B přepišme takto

$$A = a \cos\alpha \cos 2\varphi + c \frac{1 + \cos^2\alpha}{2} \sin 2\varphi,$$

$$B = a \cos\alpha \sin 2\varphi - c \frac{1 + \cos^2\alpha}{2} \cos 2\varphi - \frac{c}{2} \sin^2\alpha;$$

buď σ úhel sevřený stranou válce a osou Ox; kosinusy směrné této strany jsou $(\cos\sigma, \sin\sigma, 0)$, a podmínka, aby směr ten ležel na rovině tečné, zní

$$A \cos\sigma + B \sin\sigma = 0$$

čili

$$a \cos\alpha \cos(2\varphi - \sigma) + c \frac{1 + \cos^2\alpha}{2} \sin(2\varphi - \sigma) = \frac{c}{2} \sin^2\alpha \sin\sigma.$$

Úhly φ se mohou určiti jako parametry průseků kruhu

($\mathfrak{C}$) $$x = a \cos(2\varphi - \sigma), \quad y = a \sin(2\varphi - \sigma)$$

s přímkou

($\mathfrak{D}$) $$x \cos\alpha + y \operatorname{cotg}\vartheta \frac{1 + \cos^2\alpha}{2} = \frac{c}{2} \sin^2\alpha \sin\sigma.$$

Rovnice tato se může psáti

$$(y \operatorname{cotg}\vartheta + c \sin\sigma) \cos^2\alpha + 2x \cos\alpha + y \operatorname{cotg}\vartheta - c \sin\sigma = 0,$$

z čehož zřejmo, že přímka $\mathfrak{D}$ obaluje hyperbolu

($\mathfrak{H}$) $$x^2 - y^2 \operatorname{cotg}^2\vartheta + c^2 \sin^2\sigma = 0.$$

Průsek přímky $\mathfrak{D}$ s přímkou (vrcholovou tečnou hyperboly)

($\mathfrak{A}$) $$y_0 = -c \sin\sigma \operatorname{tg}\vartheta = -a \sin\sigma$$

podává

($\mathfrak{A}'$) $$\cos\alpha = \frac{c \sin\sigma - y \operatorname{cotg}\vartheta}{2x_0} = \frac{c \sin\sigma}{x_0}.$$

Určíme průsek (x, y) kruhu ($\mathfrak{C}$) s libovolnou tečnou hyperboly ($\mathfrak{H}$); poloměr příslušný k bodu průsečnému svírá s osou úseček úhel $2\varphi - \sigma$.

Při tom se doporučuje při této pomocné konstrukci položiti osu úseček do směru válce, takže pak přímka $\mathfrak{A}$ bude procházeti bodem A; pak bude směr poloměru průsečného bodu svírati s původní osou OA úhel 2φ.

K určeným takto úhlům φ přísluší úhel α, jenž se stanoví pomocí průseku tečny hyperboly s přímkou $\mathfrak{A}$; úsečka tohoto bodu x_0 určuje α dle vzorce

$$\cos\alpha = \frac{c \sin\sigma}{x_0}.$$

16. Pro lineární prvek na ploše ds nalezneme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,d\varphi^2 + 2F\,d\varphi\,d\alpha + G\,d\alpha^2,$$

(49) $$E = g^2 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi, \quad F = ac \sin\alpha \sin^2\varphi, \quad G = c^2 \sin^2\varphi,$$

stále při označení $g^2 = a^2 + c^2$.

Lze tedy psáti

(49*) $$d\,s^2 = g^2\,(1 - \sin^2\alpha\,\sin^2\varphi)\,d\,\varphi^2 + \sin^2\varphi\,(c\,d\,\alpha + a\sin\alpha\,d\,\varphi)^2;$$

odtud vychází pro *pravoúhlé trajektorie kruhů* Γ_φ differenciální rovnice

$$c\,d\,\alpha + a\sin\alpha\,d\,\varphi = 0,$$

kterou integrujeme vzorcem

$$a\,\varphi + c\log tg\,\frac{\alpha}{2} = a\,\gamma\,,$$

kde γ jest integrační konstanta. Křivky se pohodlně strojí na základě výrazu

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = e^{\frac{a}{c}(\gamma - \varphi)}$$

graficky přístupného z logarithmické spirály. Pro polární subnormálu máme zde výraz

$$\frac{d\,r}{d\,\varphi} = \cos\alpha\,(c\cos\varphi - a\cos\alpha\sin\varphi)\,,$$

přístupný konstrukci podobně jako bod na ploše isogonální.

Hořejší výraz E můžeme též psáti

(49ª) $$E = g^2 - z^2;\quad F = \frac{a}{c}\,z\sqrt{G}\,,$$

dále máme

(49ᵇ) $$\Delta^2 = E\,G - F^2 = \frac{g^2}{c^2}\,G\,(c^2 - z^2)$$

a odtud

ᶜ) $$\Delta = g\sin\varphi\sqrt{c^2 - z^2} = c\,g\sin\varphi\sqrt{1 - \sin^2\alpha\,\sin^2\varphi}\,.$$

Dvě pošinutí na ploše isogonální, která znamenejme $d\,s$, $\delta\,s$, svírají úhel, jehož sinus

$$\sin\,(d\,s,\,\delta\,s) = \Delta\,\frac{d\,\varphi\;\delta\,\alpha - d\,\alpha\;\delta\,\varphi}{d\,s\;\delta\,s}\,.$$

Je-li pošinutí $\delta\,s$ na kruhu Γ_φ, a pošinutí $d\,s$ na hyppopédě α = konst., bude $\delta\,\varphi = 0$, $d\,\alpha = 0$, takže úhel ω mezi kruhem Γ_φ a hyppopédou má sinus

$$\sin\omega = \Delta\,\frac{d\,\varphi\;\delta\,\alpha}{d\,s\;\delta\,s}\,,$$

při čemž dle (49)

$$d\,s^2 = (g^2 - z^2)\,d\,\varphi^2,\quad \delta\,s^2 = c^2\sin^2\varphi\;\delta\,\alpha^2,$$

a tedy

$$\sin\omega = \frac{\Delta}{c\sin\varphi\sqrt{g^2 - z^2}} = \frac{g}{c}\,\frac{\sqrt{c^2 - z^2}}{\sqrt{g^2 - z^2}}\,,\quad tg\,\omega = \frac{g}{a\,z}\sqrt{c^2 - z^2}$$

„V bodech řezu $z = $ konst. protínají se kruhy s hyppopédam pod stálým úhlem.“

Pro cosinus úhlu sevřeného směry dvou pošinutí $d\,s$, $\delta\,s$ máme obecný vzorec

$$cos\,(d\,s,\,\delta\,s) = \frac{E\,d\,\varphi\,\delta\,\varphi + F\,(d\,\varphi\,\delta\,\alpha + d\,\alpha\,\delta\,\varphi) + G\,d\,\alpha\,\delta\,\alpha}{d\,s\,\delta\,s}.$$

Pro orthogonální trajektorie bude $cos\,(d\,s,\,\delta\,s) = 0$. Na hyppopédách $\alpha = $ konst. jest $\delta\,\alpha = 0$, i bude differenciální rovnice pravoúhlých trajektorií hyppopéd

$$E\,d\,\varphi + F\,d\,\alpha = 0,$$

t. j.

(50) $$(g^2 - c^2\,sin^2\,\alpha\,sin^2\,\varphi)\,d\,\varphi + a\,c\,sin\,\alpha\,sin^2\,\varphi\,d\,\alpha = 0.$$

Položme

$$cos\,\alpha = u,\quad cotg\,\varphi = v;$$

rovnice se zjednoduší na

$$\frac{g^2\,(1 + v^2) - c^2 + c^2\,u^2}{1 + v^2} + a\,c\,\frac{d\,u}{d\,v} = 0.$$

Je to rovnice typu Riccatiova a její obecné řešení zní

$$(u_1,\,u_2,\,u_3,\,u) = \text{konst.},$$

kde levá strana je dvojpoměr tří integrálů partikulárních a obecného.

Uvažujme dva kruhy příslušné k hodnotám φ, φ_0; čtyři trajektorie hyppopéd budou tyto kruhy protínati v bodech, jimž odpovídají jakožto hodnoty $cos\,\alpha$ veličiny u_1, u_2, u_3, u na Γ_φ, a $u_1^0\,u_2^0\,u_3^0\,u^0$ na Γ_{φ_0}; i bude

$$(u_1,\,u_2,\,u_3,\,u) = (u_1^0,\,u_2^0,\,u_3^0,\,u^0);$$

avšak cosinusy tyto jsou linearní parametry průmětů do roviny $x\,y$; na přímce $O\varphi$ máme první 4 průměty, na $O\varphi_0$ pak druhé čtyři body; odtud soudíme:

„Libovolné dva kruhy Γ_φ a Γ_{φ_0} vytínají na pravoúhlých trajektoriích hyppopéd řady bodů, které se do roviny $O\,x\,y$ promítají v řady vespolek promětné.“

Poněvadž obecné řešení pravoúhlých trajektorií kružnic Γ_φ jest

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = C\,e^{-\frac{a}{c}\varphi},$$

a při tom $tg\,\frac{\alpha}{2}$ je projektivní parametr bodu na kruhu, vychází, že*)

„pravoúhlé trajektorie kruhů Γ_φ vytínají na těchto řady promětné.“

*) Tutéž vlastnost mají pravoúhlé trajektorie charakteristik vepsaných ellipsoidů ($a\,cotg\,\varphi = g\,tg\,\beta - c\,cos\,\alpha$), které mají rovnici $tg\,\frac{\alpha}{2} = C\,e^{\frac{c}{a}\varphi}$.

Differenciální rovnici (50) při $\cos\alpha = u$ pišme

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{c}{a}u^2 - \frac{c}{a} + \frac{g^2}{ac}\operatorname{cosec}^2\varphi\,.$$

Riccatiovská rovnice

$$\frac{du}{d\varphi} + k u^2 + f(\varphi) = 0$$

se integruje výrazem

$$u = \frac{1}{k}\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{y}\,, \qquad \frac{d^2y}{d\varphi^2} + k f(\varphi)\, y = 0\,.$$

V našem případě pomocná rovnice differenciální 2. řádu zní

(51) $$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \frac{c}{a}\left(\frac{g^2}{ac}\operatorname{cosec}^2\varphi - \frac{c}{a}\right)y = 0\,,$$

její základní integrály mají rozvoje tvaru

$$y = \varphi^m\, \mathfrak{P}(\varphi)\,, \quad \mathfrak{P}(0) \neq 0\,,$$

$$m = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g^2}{a^2}}\,, \text{ komplexní;}$$

klademe-li zde

$$\cos\varphi = v,$$

bude

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = (1 - v^2)\frac{d^2y}{dv^2} - v\frac{dy}{dv}\,,$$

a rovnice (51) se přepíše na

$$(1 - v^2)^2\frac{d^2y}{dv^2} - v(1 - v^2)\frac{dy}{dv} + \left(1 + \frac{c^2}{a^2}v^2\right)y = 0\,.$$

Její formální integrace řadami, jež konvergují pro $|v| < 1$, neposkytuje obtíží, ale není geometricky zajímava.

Při neodvisle proměnné

$$\xi = \sin^2\varphi$$

zní rovnice (51)

$$4\xi^2(1 - \xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2(1 - 2\xi)\,\xi\frac{dy}{d\xi} + \left(\frac{g^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}\xi\right)y = 0\,.$$

Její integrály jsou tvaru

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \xi^{m+\nu}, \quad c_\nu = \frac{\Psi(m)\,\Psi(m+1)\ldots\Psi(m+\nu-1)}{\Phi(m+1)\,\Phi(m+2)\ldots\Phi(m+\nu)}\,,$$

$$c_0 = 1,\ c_1 = \frac{\Psi(m)}{\Phi(m+1)}\,,$$

kde položeno

$$2\,m = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{g^2}{a^2} - \frac{1}{4}}\,, \quad \Phi(z) = 4\,z^2 - 2\,z + \frac{g^2}{a^2}\,,$$

$$\Psi(z) = 4\,z^2 + \frac{c^2}{a^2}\,.$$

Znamenáme-li y_1, y_2 řady vzniknoucí odtud pro obě různé hodnoty m, budou výrazy

$$y_1 + y_2\,, \quad i\,(y_1 - y_2)$$

reálné integrály.

Při označení $\xi = sin^2\varphi$ má naše diff. rovnice řešení

$$cos\,\alpha = -\frac{2\,a}{c}\, sin\,\varphi\, cos\,\varphi\, \frac{A\,y_1' + B\,y_2'}{A\,y_1 + B\,y_2}\,,$$

kde A, B jsou komplexně sdružené konstanty a y' značí $\frac{d\,y}{d\,\xi}$.

Bude tedy při $\Theta = A : B$

$$cos\,\alpha = -\frac{2\,a}{c}\, cotg\,\varphi\, \frac{m\,\Theta + m'\,\xi^{m'-m} + (\xi)}{\Theta + \xi^{m'-m} + (\xi)}\,,$$

při čemž (ξ) značí nekonečně malé veličiny zároveň s ξ.

Veličina Θ je tvaru $e^{i\gamma}$, dále je $m' - m$ ryze pomyslné, i můžeme při daném Θ zvoliti ξ tak malé, aby veličina ve jmenovateli

$$\Theta + \xi^{m'-m}$$

zmizela aneb se stala velmi malou; při tom čitatel zůstává od nully různý a činitel $cotg\,\varphi$ je veliký, takže vychází pro $cos\,\alpha$ hodnota velmi veliká. Naše křivky se takovým bodům vyhnou, t. j. u žádné orthogonální trajektorie hyppopéd nestane se úhel φ nekonečně malým.

Zvolíme-li její východisko v bodě blízkém při A, bude Θ určité $= e^{i\gamma}$, čára neprotne přímky $O\varphi$, pro něž

$$(m' - m)\, log\,\xi = i\,(\gamma + \pi) + 2\,\nu\,\pi\, i, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,,$$

t. j.

$$\xi = e^{(\gamma + \pi + 2\nu\pi)\frac{i}{m'-m}}\,.$$

T. j. aspoň v jistém okolí bodu A probíhají pravoúhlé trajektorie hyppopéd tak, aby jejich průměty ležely v úhlu, jehož ramena jsou dvě sousední přímky řady

$$sin^2\varphi = e^{(\gamma + \pi + 2\nu\pi)\frac{i}{m'-m}}\,, \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)\,.$$

Komplanaci plochy isogonální provedeme na základě vzorce

$$\iint \Delta\, d\,\alpha\, d\,\varphi\,, \quad \Delta = c\,g\, sin\,\varphi\,\sqrt{1 - sin^2\alpha\, sin^2\varphi}\,,$$

a sice můžeme se omeziti na kvadrant $y > 0$, $z > 0$.

XXXVI.

K vůli stanovení integračního oboru třeba uvážiti, že pokud $0 < \varphi < \vartheta$, je celý kruh Γ_φ v polovici prostoru dané podmínkou $y > 0$, takže pro náš kvadrant přicházejí v úvahu hodnoty

$$0 \leqq \varphi \leqq \vartheta, \quad 0 \leqq \alpha < \pi .$$

Pokud je pak $\vartheta < \varphi < \pi - \vartheta$, zapadá do našeho kvadrantu jen část kruhu Γ_φ, a sice od hodnoty $\alpha = 0$ do $\alpha = \alpha_1$, při čemž α_1 odpovídá bodu, v němž kruh Γ_φ prostupuje osou $O\,z$, t. j.

$$\cos \alpha_1 = \frac{-O\,\sigma}{\sigma\,K} \ ; \quad O\,\sigma = a \cos \varphi, \quad \sigma\,K = c \sin \varphi \ ;$$

hodnotám φ mezi $\pi - \vartheta$ a π neodpovídají body plochy uvažovaného kvadrantu.

Tedy obor integrační jest omezen — interpretují-li se proměnné φ, α jako pravoúhlé souřadnice — osama $O\,\varphi$, $O\,\alpha$, přímkou $\alpha = \pi$ (od $\varphi = 0$ do $\varphi = \vartheta$) a čarou

$$\cos \alpha + tg\, \vartheta\, cotg\, \varphi = 0 .$$

Počneme-li integrovati vůči φ, zní výraz pro plošný obsah kvadrantu

$$\frac{1}{4}\mathfrak{L} = \int_0^\pi d\,\alpha \int_0^{\varphi_1} \varDelta\, d\,\varphi ,$$

kde φ_1 hoví rovnici omezující křivky

$$\cos \alpha + tg\, \vartheta\, cotg\, \varphi_1 = 0.$$

Po dosazení hodnoty za $\varDelta$ máme tak

$$\frac{\mathfrak{L}}{4\,c\,g} = \int_0^\pi d\,\alpha \int_0^{\varphi_1} \sqrt{\sin^2 \alpha \cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha}\, \sin \varphi\, d\varphi \ ;$$

vnitřní integrál určí se substitucí

$$z = \sin \alpha \cos \varphi,$$

a má hodnotu

$$-\frac{1}{\sin \alpha}\int \sqrt{z^2 + \cos^2 \alpha}\, d\,z = -\frac{1}{2 \sin \alpha}\Big[z\sqrt{z^2 + \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \log (z + \sqrt{z^2 + \cos^2 \alpha})\Big]_0^{\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2 \sin \alpha}\Big[\sin \alpha \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} + \cos^2 \alpha \log (\sin \alpha \cos \varphi + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi})\Big]_0^{\varphi_1}$$

a tak vyjde, násobíme-li obě strany 2, rovnice:

$$\text{(52)} \qquad \frac{\mathfrak{L}}{2\,c\,g} = \int_0^\pi d\,\alpha \left(1 - \cos \varphi_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1} \right)$$

$$- \int_0^\pi d\,\alpha\, \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \log \frac{\sin \alpha \cos \varphi_1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi_1}}{1 + \sin \alpha} .$$

Avšak hořejší rovnice mezi α a φ_1 dává

$$sin^2 \varphi_1 = \frac{1}{1 + cotg^2 \vartheta\, cos^2 \alpha}, \quad cos\, \varphi_1 = -\frac{cotg\, \vartheta\, cos\, \alpha}{\sqrt{1 + cotg^2 \vartheta\, cos^2 \alpha}},$$

a zároveň je kladná hodnota odmocniny

$$\sqrt{1 - sin^2 \alpha\, sin^2 \varphi_1} = \frac{|\, cos\, \alpha\, |}{sin\, \vartheta \sqrt{1 + cotg^2 \vartheta\, cos^2 \alpha}}.$$

Použitím těchto výrazů máme nejprvé

$$\int_0^\pi d\,\alpha\, cos\, \varphi_1 \sqrt{1 - sin^2 \alpha\, sin^2 \varphi_1} = -\int_0^\pi \frac{cotg\, \vartheta\, cos\, \alpha}{1 + cotg^2 \vartheta\, cos^2 \alpha} \, \frac{|\, cos\, \alpha\, |}{sin\, \vartheta}\, d\,\alpha\,;$$

rozštěpí-li se tento integrál dle vzorce

$$\int_0^\pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi,$$

snadno shledáme, že tyto dvě složky jsou si opačně rovny, takže

$$(a) \qquad \int_0^\pi d\,\alpha\, cos\, \varphi_1 \sqrt{1 - sin^2 \alpha\, sin^2 \varphi_1} = 0.$$

Dále máme s použitím uvedených výrazů

$$sin\, \alpha\, cos\, \varphi_1 + \sqrt{1 - sin^2 \alpha\, sin^2 \varphi_1} = \frac{|\, cos\, \alpha\, |\, (1 - cos\, \vartheta\, sin\, \alpha\, sgn.\, cos\, \alpha)}{sin\, \vartheta \sqrt{1 + cotg^2 \vartheta\, cos^2 \alpha}}$$

při čemž $sgn.\, cos\, \alpha = \pm 1$ má obvyklý význam znaménka.

Druhý integrál na pravé straně (52) možno tedy rozložiti ve tři

$$\int_0^\pi d\,\alpha\, \frac{cos^2 \alpha}{sin\, \alpha}\, log\, \frac{sin\, \alpha\, cos\, \varphi_1 + \sqrt{1 - sin^2 \alpha\, sin^2 \varphi_1}}{1 + sin\, \alpha}$$

$$= \int_0^\pi d\,\alpha\, \frac{cos^2 \alpha}{sin\, \alpha}\, log\, \frac{|\, cos\, \alpha\, |}{1 + sin\, \alpha} + \int_0^\pi log \left(1 - cos\, \vartheta\, sin\, \alpha\, sgn.\, cos\, \alpha\right) \frac{cos^2 \alpha}{sin\, \alpha}\, d\,\alpha$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^\pi log \left(sin^2 \vartheta + cos^2 \vartheta\, cos^2 \alpha\right) \frac{cos^2 \alpha}{sin\, \alpha}\, d\,\alpha$$

$$= I + II - \frac{1}{2}\, III.$$

Tu jest především integrál II po rozštěpení

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

a substituci $\pi - \alpha$ v druhé části roven součtu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(1 - \cos\vartheta\,\sin\alpha)\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(1 + \cos\vartheta\,\sin\alpha)\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha\,,$$

t. j.

$$II = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(1 - \cos^2\vartheta\,\sin^2\alpha)\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha\,.$$

Výraz pod log. v integrálu III lze psáti $1 - \cos^2\vartheta\,\sin^2\alpha$, a tak vychází

$$III = 2\,II\,,$$

takže se obě poslední části našeho integrálu ruší a zbývá

$$\left\{\begin{aligned} \int_0^{\pi} d\alpha\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\log\frac{\sin\alpha\cos\varphi_1 + \sqrt{1 - \sin^2\alpha\,\sin^2\varphi_1}}{1 + \sin\alpha} &= \int_0^{\pi}\log\frac{|\cos\alpha|}{1+\sin\alpha}\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos\alpha\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\,(1 + \sin\alpha)\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha\,, \\ &= 2A - 2B\,. \end{aligned}\right.$$

Integrál A přetvoříme substitucí

$$\sin\alpha = \sqrt{x}\,,$$

$$2A = \frac{1}{2}\int_0^1 \log\,(1 - x)\,.\,\sqrt{1 - x}\,\frac{dx}{x}\,,$$

takže výraz $4A$ možno dle známého vzorce Eulerova

$$\int_0^1 x^{a-1}\,(1 - x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

určiti derivováním dle b

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\log(1-x)\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\,[\psi(b)-\psi(a+b)]\,,$$

$$\psi(b) = \frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}\,.$$

Přepíše-li se pravá strana pro $b = \frac{3}{2}$ na

$$\frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{3}{2}\right)}\;\frac{\psi\left(\frac{3}{2}\right)-\psi\left(a+\frac{3}{2}\right)}{a}\,,$$

vychází přechodem ke krajní hodnotě $a = 0$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\log(1-x)\,\frac{dx}{x} = -\psi'\left(\frac{3}{2}\right) = -\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{3}{2}+\nu\right)^2}\,,$$

tedy

(c) $$A = -\sum_0^{\infty}\frac{1}{(3+2\nu)^2} = 1-\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2} = 1-\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Pro stanovení integrálu B zavedeme funkci

$$\Phi(u) = \int_0^{\pi}\log(1+u\sin\alpha)\,\frac{d\alpha}{\sin\alpha}\,,$$

a obdržíme

$$2B = \int_0^{\pi}\log(1+\sin\alpha)\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = \Phi(1) - \int_0^{\pi}\log(1+\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\,.$$

Druhý integrál určíme přímo částečnou integrací bez ohledu na meze

$$-\int\log(1+\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha = \cos\alpha\log(1+\sin\alpha) - \int\frac{\cos^2\alpha\,d\alpha}{1+\sin\alpha}\,;$$

ježto

$$\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha} = 1-\sin\alpha\,,$$

máme bezprostředně

$$-\int\log(1+\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha = \cos\alpha\log(1+\sin\alpha) - \alpha - \cos\alpha\,,$$

tedy zvláště

(d) $$-\int_0^{\pi}\log(1+\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha = -\pi+2\,.$$

XXXVI.

Pro funkci $\Phi(u)$ máme nejprvé derivaci

$$\Phi'(u) = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{1 + u \sin\alpha} = \int_0^\pi \frac{2\, d\, tg\, \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2} + 2 u\, tg\, \frac{\alpha}{2}}$$

čili po substituci $tg\, \frac{\alpha}{2} = t$,

$$\Phi'(u) = 2 \int_0^\infty \frac{dt}{(t+u)^2 + 1 - u^2} = \frac{2}{\sqrt{1-u^2}} \left[arc\, tg\, \frac{t+u}{\sqrt{1-u^2}} \right]_0^\infty,$$

$$\Phi'(u) = \frac{\pi}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2\, arc\, sin\, u}{\sqrt{1-u^2}},$$

a odtud integrací

$$\Phi(u) = \pi\, arc\, sin\, u - (arc\, sin\, u)^2.$$

Tedy zvláště pro $u = 1$

$$\Phi(1) = \frac{\pi^2}{4};$$

je tedy s použitím vzorce (d)

$$2B = \frac{\pi^2}{4} - \pi + 2,$$

a dle (c) tedy máme hodnotu integrálu (b)

$$2A - 2B = \pi - \frac{\pi^2}{2} = I;$$

ve vzorci (52) má první integrál — vzhledem k výsledku (a) — hodnotu π druhý integrál jest $\pi - \frac{\pi^2}{2}$, a tak vychází jako hodnota plochy $c g \pi^2$, t. j.

$$\mathfrak{Q} = \pi^2 c \sqrt{a^2 + c^2}.$$

je ploský obsah celé plochy isogonální.

Dále nalezneme pro funkcionální determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \alpha}, & \frac{\partial y}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = r z,$$

tedy krychlový obsah kvadrantu tělesa omezeného plochou isogonální jest

$$\frac{1}{4} V = \iint r z^2\, d\varphi\, d\alpha = c^2 \int_0^\pi d\alpha \int_0^{\varphi_1} (a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi) \sin^2\varphi \sin^2\alpha\, d\varphi$$

$$\frac{V}{4c^2} = \int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \int_0^{\varphi_1} a \sin^2\varphi \cos\varphi\, d\varphi + \int_0^\pi d\alpha \sin^2\alpha \int_0^{\varphi_1} c \cos\alpha \sin^3\varphi\, d\varphi,$$

$$\int sin^2\varphi\, cos\,\varphi\, d\,\varphi = \frac{1}{3}\, sin^3\varphi\,,\quad \int sin^3\varphi\, d\,\varphi = \frac{1}{3}\, cos^3\varphi - cos\,\varphi,$$

$$\frac{V}{4c^2} = \frac{a}{3}\int_0^\pi sin^3\varphi_1\, sin^2\alpha\, d\,\alpha + \frac{c}{3}\int_0^\pi sin^2\alpha\, cos\,\alpha\,(cos^3\varphi_1 - 3\,cos\,\varphi_1 + 2)\, d\,\alpha\,.$$

Dosaďme hodnoty

$$sin\,\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\vartheta\, cos^2\alpha}} = \frac{sin\,\vartheta}{\sqrt{1 - cos^2\vartheta\, sin^2\alpha}}\,,$$

$$cos\,\varphi_1 = -\frac{cos\,\vartheta\, cos\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\vartheta\, sin^2\alpha}}\,,$$

obdržíme při označení

$$L = \int_0^\pi sin^3\varphi_1\, sin^2\alpha\, d\,\alpha\,,\quad M = \int_0^\pi cos^3\varphi_1\, sin^2\alpha\, cos\,\alpha\, d\,\alpha\,,$$

$$N = \int_0^\pi cos\,\varphi_1\,.\, sin^2\alpha\, cos\,\alpha\, d\,\alpha$$

$$\frac{V}{4c^2} = \frac{a\,L}{3} + \frac{c\,M}{3} - c\,N\,,$$

$$L = sin^3\vartheta\int_0^\pi \frac{sin^2\alpha\, d\,\alpha}{(1 - cos^2\vartheta\, sin^2\alpha)^{3/2}}\,,\quad M = -cos^3\vartheta\int_0^\pi \frac{sin^2\alpha\, cos^4\alpha\, d\,\alpha}{(1 - cos^2\vartheta\, sin^2\alpha)^{3/2}}$$

$$N = -cos\,\vartheta\int_0^\pi \frac{sin^2\alpha\, cos^2\alpha\, d\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\vartheta\, sin^2\alpha}}\,.$$

Při označení

$$J_n = \int \frac{sin^n\alpha\, d\,\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\alpha}}$$

máme nejprvé integrací po částech

$$(\alpha)\quad k^2\int \frac{sin^m\alpha\, cos^2\alpha}{(1 - k^2 sin^2\alpha)^{3/2}}\, d\,\alpha = -\frac{sin^{m-1}\alpha\, cos\,\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\alpha}} + (m-1)\, J_{m-2} - m\, J_m\,,$$

a dle identity

$$(1 - k^2)\,\frac{sin^m\alpha}{1 - k^2 sin^2\alpha} = sin^m\alpha - \frac{k^2 sin^m\alpha\, cos^2\alpha}{1 - k^2 sin^2\alpha}$$

máme

$$(\beta)\quad (1 - k^2)\int \frac{sin^m\alpha\, d\,\alpha}{(1 - k^2 sin^2\alpha)^{3/2}} = \int \frac{sin^m\alpha\, d\,\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\alpha}} - k^2\int \frac{sin^m\alpha\, cos^2\alpha\, d\,\alpha}{(1 - k^2 sin^2\alpha)^{3/2}}$$

$$= -\frac{sin^{m-1}\alpha\, cos\,\alpha}{\sqrt{1 - k^2 sin^2\alpha}} + (m-1)\,(J_{m-2} - J_m)\,.$$

Dle toho bude při $k^2 = \cos^2\vartheta$ a po zavedení mezí 0 a π:

$$\sin^2\vartheta \int_0^\pi \frac{\sin^2\alpha\, d\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{1/2}} = J_0 - J_2,$$

$$-\cos^2\vartheta \int_0^\pi \frac{\sin^2\alpha \cos^4\alpha\, d\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{1/2}} = -\cos^2\vartheta \int_0^\pi \frac{\cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha - \sin^4\alpha)\, d\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha)^{1/2}}$$

$$= (J_0 - J_2) - (3J_2 - 4J_4) = J_0 - 5J_2 + 4J_4,$$

takže bude

$$L = \sin\vartheta\,(J_0 - J_2),\quad M = \cos\vartheta\,(J_0 - 5J_2 + 4J_4),$$
$$N = -\cos\vartheta\,(J_2 - J_4).$$

Redukční vzorec

$$(m+1)J_m - (m+2)(1+k^2)J_{m+2} + (m+3)k^2 J_{m+4}$$
$$= \sin^{m+1}\alpha \cos\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}$$

podá při omezených integrálech (od $\alpha = 0$ do $\alpha = \pi$)

$$3k^2 J_4 = 2(1+k^2)J_2 - J_0,$$

tedy

$$M = \frac{1}{3\cos\vartheta}\left[(3k^2-4)J_0 + (8-7k^2)J_2\right]$$

$$N = -\frac{1}{3\cos\vartheta}\left[J_0 + (k^2-2)J_2\right],$$

$$J_0 = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},\quad J_2 = \int_0^\pi \frac{\sin^2 d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}},\quad k = \cos\vartheta.$$

Dosazením těchto hodnot za L, M, N do hořejšího vzorce vyjde

$$V = \frac{4c^3}{9\cos\vartheta}\left[2J_0 - (1+\cos^2\vartheta)J_2\right].$$

17. Na konec ještě určíme čáru, která se promítá do libovolného kruhu procházejícího bodem O. Promítající válec má s plochou isogonální společnou přímku Oz, která jakožto dvojná přímka platí jako část druhého stupně, dále jsou oběma plochám společné přímky jdoucí kruhovým body v nekonečnu. Zbývá tedy jako vlastní zajímavá průseč ještě čára 4. stupně. K této čáře dospějeme pohodlně tímto způsobem: Kruhem Γ_q vedeme libovolnou kouli; tato protíná plochu isogonální v kruhu Γ_q a v kruhu úběžném, a v čáře stupně 4.

Pišme

$$S = (x-a)^2 + y^2 + z^2,\quad g^2 = a^2 + c^2,$$

tedy rovnici plochy

$$S(x^2+y^2) = g^2 y^2;$$

odtud obdržíme pro kruh Γ_φ rovnice

$$y - x\, tg\, \varphi = 0, \quad S - g^2 \sin^2 \varphi = 0;$$

rovnice libovolné koule obsahující tento kruh jest

$$(\mathfrak{A}) \qquad S + \lambda\, (y - x\, tg\, \varphi) - g^2 \sin^2 \varphi = 0;$$

dosadíme-li hodnotu S z této rovnice plynoucí do rovnice plochy isogonální, obdržíme

$$[g^2 \sin^2 \varphi - \lambda\, (y - x\, tg\, \varphi)]\, (x^2 + y^2) = g^2 y^2.$$

Je to rovnice průmětu průsečné čáry, která je splněna také přímkou, do níž se promítá kruh Γ_φ; skutečně jest

$$g^2 \sin^2 \varphi\, (x^2 + y^2) - g^2 y^2 = g^2 \sin^2 \varphi\, .\, x^2 - g^2 \cos^2 \varphi\, .\, y^2$$
$$= - g^2 \cos^2 \varphi\, (y - x\, tg\, \varphi)\, (y + x\, tg\, \varphi).$$

Po odstranění činitele $y - x\, tg\, \varphi$ zbývá pak

$$(\mathfrak{B}) \qquad g^2 \cos^2 \varphi\, (y + x\, tg\, \varphi) + \lambda\, (x^2 + y^2) = 0$$

jakožto rovnice kruhu, v nějž se promítá naše čára společná ploše isogonální a kouli ($\mathfrak{A}$).

Je-li naopak dán libovolný kruhový válec obsahující osu $O\,z$

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,q\,y = 0,$$

máme pro určení φ a λ rovnice

$$\frac{g^2}{\lambda} \cos^2 \varphi = -2\,q, \quad \frac{g^2}{\lambda} \sin \varphi \cos \varphi = -2\,p,$$

tedy

$$tg\, \varphi = \frac{p}{q}, \quad \frac{g^2}{\lambda} = -2\,q \sec^2 \varphi = -2\,q\left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right),$$

a tak se čára shora uvažovaná určí jako pronik s koulí.

Je-li S_1 střed koule ($\mathfrak{A}$), S_2 střed kruhu ($\mathfrak{B}$), mají přímky $A\,S_1$, $O\,S_2$ směrnice opačné, totiž

$$-\cot g\, \varphi, \quad \cot g\, \varphi,$$

a tedy se tyto přímky protínají na ose symetrie bodů O, A, t. j.

$$x = \frac{a}{2}.$$

Stopy koule a válce pak se protínají na kruzích (K), (K'), poněvadž průsečné jich body leží na stopě isogonály.

Je-li dán jeden z těchto kruhů (stopy koule neb válce), známe pro druhý přímku obsahující jeho střed a další dva body na kruzích (K) a (K'), čímž jest určen.

Rovnice tečné roviny isogonální plochy

$$
\begin{aligned}
&A\,x + B\,y + C\,z = r\,(a \cos\alpha \cos\varphi + c \sin\varphi),\\
&A = a \cos\alpha \cos 2\varphi + c\,(1 + \cos^2\alpha) \sin\varphi \cos\varphi,\\
&B = a \cos\alpha \sin 2\varphi + c\,(1 + \cos^2\alpha) \sin^2\varphi - c,\\
&C = r \sin\alpha, \quad r = a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi,
\end{aligned}
$$

vede snadno k stanovení rozvinutelné plochy fokální, t. j. plochy, kterou obalují roviny tečné k ploše a k úběžnému kruhu; roviny ty jsou charakterisovány podmínkou

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Je pak

$$
\begin{aligned}
A^2 + B^2 + C^2 = {} & a^2 \cos^2\alpha + c^2\,(1 + \cos^2\alpha)^2 \sin^2\varphi\\
& + 2\,ac \cos\alpha\,(1 + \cos^2\alpha) \sin\varphi \cos\varphi\\
& - 2\,a\,c \cos\alpha \sin 2\varphi - 2\,c^2\,(1 + \cos^2\alpha) \sin^2\varphi + c^2\\
& + a^2 \sin^2\alpha \cos^2\varphi + c^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin^2\varphi\\
& + 2\,a\,c \sin^2\alpha \cos\alpha \sin\varphi \cos\varphi,
\end{aligned}
$$

a ježto očividně

$$
\begin{aligned}
2\,a\,c \sin^2\alpha \cos\alpha \sin\varphi \cos\varphi + 2\,a\,c \cos\alpha\,(1 + \cos^2\alpha) \sin\varphi \cos\varphi&\\
- 2\,a\,c \cos\alpha \sin 2\varphi = 0&,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c^2\,(1 + \cos^2\alpha)^2 \sin^2\varphi - 2\,c^2\,(1 + \cos^2\alpha) \sin^2\varphi + c^2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha \sin^2\varphi&\\
= - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi&,
\end{aligned}
$$

vychází

$$A^2 + B^2 + C^2 = a^2 \cos^2\alpha + a^2 \sin^2\alpha \cos^2\varphi + c^2 - c^2 \sin^2\alpha \sin^2\varphi,$$

t. j. po redukci

$$* \qquad A^2 + B^2 + C^2 = (a^2 + c^2)\,(1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi).$$

Fokální plocha dotýká se tedy plochy isogonální v čáře dané rovnicí

$$\sin\alpha \sin\varphi = \pm 1,$$

t. j. $z = \pm c$. Čára ta se rozpadá ve čtyři kruhy

$$x^2 + y^2 = (a + i\,c)\,x, \quad x^2 + y^2 = (a - i\,c)\,x, \quad z = \pm c,$$

i je zřejmo, že fokální plocha sestává ze čtyř kuželů daných kruhem úběžným a jednotlivými těmito kruhy. Tyto kužely jsou nullové koule obsahující po jednom z uvedených kruhů.

Uvažujme kruh

$$(\Phi) \qquad z = c, \quad x^2 + y^2 = (a \pm i\,c)\,x;$$

leží patrně na kouli

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - (a \pm i\,c)\,x - 2\,\lambda\,(z - c) = 0,$$

jejíž poloměr má čtverec

$$\frac{1}{4}(a \pm i\,c)^2 + \lambda^2.$$

Tento poloměr vymizí tedy v případech

$$2\lambda = c \mp i\,a, \quad -(c \mp i\,a);$$

pro tyto hodnoty λ obdržíme dvě koule nullové procházející daným kruhem (Φ), ale obě tyto koule netvoří součást plochy fokální. O tom třeba rozhodnouti přímo; druhá rovnice (Φ) nám tu podává

$$r = (a \pm i\,c) \cos\varphi = a \cos\varphi + c \cos\alpha \sin\varphi,$$

a odtud

$$(\alpha) \qquad \cos\alpha = \pm\, i \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

s čímž dlužno spojiti rovnici

$$(\beta) \qquad \sin\alpha \sin\varphi = 1,$$

a pro druhý pár kruhů by tu bylo třeba změniti znamení pravé strany. Dosazením hodnoty (α) do výrazů A, B vychází

$$A = \pm\, i\,(a \pm i\,c) \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cos 2\varphi,$$

$$B = \pm\, i\,(a \pm i\,c)\, 2\cos^2\varphi,$$

a rovnice (β) podává pro C ve spojení s hodnotou pro r výše udanou

$$C = (a \pm i\,c) \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Pro kruhy v rovině $z = -c$ změní se toliko znamení součinitele C. Výraz na pravé straně rovnice roviny tečné je pak v našem případě

$$(a \pm i\,c) \cos\varphi \left(\pm\, i\,a \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} + c \sin\varphi\right);$$

dosadíme-li tyto hodnoty do rovnice roviny tečné, bude lze krátiti výrazem

$$\pm\, i\,(a \pm i\,c) \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

a objeví se tvar

$$(\mathfrak{S}) \qquad X \cos 2\varphi + Y \sin 2\varphi \mp i\,Z = a \cos^2\varphi \mp i\,c \sin^2\varphi.$$

Tyto roviny obalují plochu fokální, která se dotýká isogonální plochy v kruhu (Φ).

Pravou stranu přepišme na

$$\frac{a \mp i\,c}{2} + \frac{a \pm i\,c}{2} \cos 2\varphi,$$

a zaveďme parametr

$$u = e^{2i\varphi};$$

tak se rovnice $(\mathfrak{S})$ převede ve tvar

$$\left(X - i\,Y - \frac{a \pm i\,c}{2}\right) u^2 + 2\,u\left(\mp i\,Z - \frac{a \mp i\,c}{2}\right) +$$

$$+ X + i\,Y - \frac{a \pm i\,c}{2} = 0,$$

z něhož vychází rovnice obalové plochy anullováním diskriminantu a zní

$$\left(\mp i\,Z - \frac{a \mp i\,c}{2}\right)^2 = \left(X - \frac{a \pm i\,c}{2}\right)^2 + Y^2$$

čili

(Γ) $$\left(X - \frac{a \pm i\,c}{2}\right)^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{c \pm i\,a}{2}\right)^2 = 0.$$

Rovnici tu lze psáti

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 - (a \pm i\,c)\,x + (c \mp i\,a)\,(z - c) = 0,$$

a porovnáním shledáváme, že vychází z hořejší rovnice koule nullové pro

$$2\,\lambda = -(c \mp i\,a),$$

takže jen tato hodnota podává část plochy fokální.

Sdružené tyto dvě nullové koule příslušné k oběma znamením $\pm$ se protínají v realném kruhu fokálním; jeho rovnice se mohou psáti

$$c\,x + a\,(z - c) = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 - a\,x - c\,z = 0;$$

druhý kruh fokální přísluší rovině $z = -c$ i obdrží se pouhou změnou znamení při z. Oba kruhy fokální

$$c\,x \pm a\,z = a\,c, \quad x^2 + y^2 + z^2 - a\,x \mp c\,z = 0$$

leží na společné kouli, jejíž rovnice vychází substitucí

$$\mp c\,z = \frac{c^2\,x}{a} - c^2:$$

„Dva páry sdružených koulí nullových, z nichž skládá se fokální plocha isogonály, protínají se v realných kruzích fokálních na společné kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 - c^2}{a}\,x + c^2$$

XXXVI.

ležících na rovinách

$$\frac{x}{a} \pm \frac{z}{c} = 1."$$

Poloměr koule

$$\frac{a^2 + c^2}{2a}$$

je skutečně větší než vzdálenost rovin od jejího středu, která jest

$$\frac{a^2 + c^2}{2a} \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Normální roviny fokálních kruhů protínají isogonální plochu v čarách jejichž ohniska jsou v jich průsecích s fokálním kruhem.

Rovnice roviny fokálního kruhu jedna zní

$$x \cos \vartheta + z \sin \vartheta = a \cos \vartheta$$

a druhá odpovídá záměně ϑ za $-\vartheta$. Střed kruhu je průmět středu koule ($x = x_0$, $y = 0 = z$) do této roviny;

$$x_0 = \frac{a^2 - c^2}{2a}.$$

Střed kruhu má tedy souřadnice

$$x = x_0 + (a - x_0) \cos^2 \vartheta, \quad y = 0, \quad z = (a - x_0) \sin \vartheta \cos \vartheta;$$

$$a - x_0 = \frac{a^2 + c^2}{2a}, \quad (a - x_0) \cos^2 \vartheta = \frac{a}{2} \cot g^2 \vartheta = \frac{c^2}{2a},$$

tedy střed kruhu v rovině $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = 0, \quad z = \frac{c}{2},$$

a v druhé rovině se mění pouze znamení veličiny c.

Na konec budiž ještě učiněna zmínka o kinematickém vytvoření hyppopédy. Předpokládejme pevný rotační kužel s vrcholem V, po němž se valí hybný kužel s ním shodný, mající vrchol s ním společný; při tomto pohybu opisují body hybné soustavy obecně sférické epicykloidy prodloužené neb zkrácené, pouze body M, pro něž vektor VM je kolmý na osu hybného kužele, opisují hyppopédy.

Dle toho jest hyppopéda krajní případ prodloužené sférické epicykloidy 4. stupně, vznikající tím, že poloměr základního kruhu stane se nekonečně malým.

XXXVI.

18. Pozoruhodna je též plocha, která vznikne z plochy isogonální transformací reciprokých průvodičů (inversí) pro pól A a pro základní poloměr a. Rovnice její jest

$$a^2 (x^2 + y^2 + z^2 + a\,x)^2 = g^2 y^2 (x^2 + y^2 + z^2) - a^4 y^2, \tag{1}$$

kde opět $g^2 = a^2 + c^2$, při čemž *počátek souřadnic je v bodě A.*

Kruhům Γ plochy isogonální odpovídají kruhy $\overline{\Gamma}$ plochy inversní, rovněž v rovinách kolmých na rovinu $A\,x\,y$; tyto roviny pak protínají plochu ještě v hyperbolách, které transformací odpovídají hyppopédám plochy isogonální.

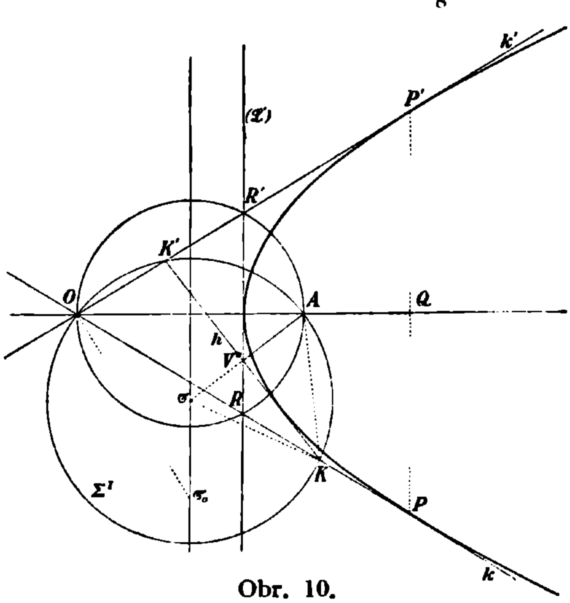
Koule obsahující hyppopédu na ploše isogonální má střed V ležící na kruhu (L), průměr $A\,V\,V'$ této koule protíná její stopu v bodě V', který leží na kruhu (L^2) majícím střed v L na $A\,x$, dvakráte tak velikém jako kruh (L).

Tento kruh (L^2) přechází inversí v přímku (L') kolmou na $A\,x$; průměr kruhu (L) jest $\frac{g^2}{2\,a}$, průměr kruhu (L^2) obnáší tedy $\frac{g^2}{a}$, a přímka $L')$, v níž tento kruh přechází inversí, má od bodu A vzdálenost

$$a^2 : \frac{g^2}{a} = \frac{a^3}{g^2},$$

t. j. rovnice přímky (L') zní

$$x = -\frac{a^3}{g^2} = -a \sin^2 \vartheta. \tag{2}$$



Obr. 10.

Tuto přímku protíná $\overline{A\,S\,V}$ v bodě V'', inversním bodu V', a přímka h vedená bodem V'' kolmo na $A\,V''$ jest inversní útvar stopy koule, takže je to stopa roviny hyperboly, v níž hyppopéda přešla inversí (obr. 10.).

Úhel přímky $A\,V''$ s osou $A\,x$ je $\pi - \gamma$, délka její má hodnotu

$$\frac{a^3}{g^2} \sec \gamma,$$

a rovnice přímky h tedy zní

$$-x \cos \gamma + y \sin \gamma = \frac{a^3}{g^2} \sec \gamma = a \sin^2 \vartheta \sec \gamma; \tag{3}$$

je to zároveň rovnice roviny obsahující hyperbolu.

Vraťme se k rovnici ($\mathfrak{A}$) § 17., která udává kouli obsahující kruh Γ; v souřadnicích s počátkem A zní tato rovnice

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(y - x\,tg\,\varphi) - \lambda\,a\,tg\,\varphi - g^2\,sin^2\,\varphi = 0\,;$$

tato koule obsahuje bod A pro

$$\lambda = -\frac{g^2}{a}\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,,$$

t. j. kruh Γ leží na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{g^2}{a}\,sin\,\varphi\,(y\,cos\,\varphi - x\,sin\,\varphi)\,.$$

Naše inverse zaměňuje x, y, z za

$$\frac{a^2\,x}{r^2}\,,\ \frac{a^2\,y}{r^2}\,,\ \frac{a^2\,z}{r^2}\,,\ (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)\,,$$

a koule tato se transformuje v rovinu

$$y\,cos\,\varphi - x\,sin\,\varphi = \frac{a^3}{g^2\,sin\,\varphi}\,;$$

rovnice tato splývá s rovnicí (3) pro $\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma$.

„Hyppopéda $\alpha =$ konst. a kruh Γ_φ mají za inversní čáry hyperbolu a kruh $\bar{\Gamma}$ ve společné rovině (3) rovnoběžné s rovinou kruhu Γ, je-li $\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma$, při čemž γ jest úhel definovaný rovnicí jako výše:

$$a + i\,c\,cos\,\alpha = 2\,\varrho\,e^{i\gamma}.\text{“}$$

Přímka h obaluje protiúpatnici přímky L', t. j. parabolu v rovině $x\,y$ s vrcholem $x = -\frac{a^3}{g^2}$ a ohniskem A:

„Roviny hyperbolicko-kruhových řezů plochy inversní (1) obalují parabolický válec směru $A\,z$, jehož základna má ohnisko A a vrchol $x = -a\,sin^2\,\vartheta$, $y = 0$.“

Hyppopéda leží na kuželi, pro nějž jsme v čl. 8. nalezli rovnici

$$(x^2 - \varrho)^2 + y^2 = \frac{4\,\varrho^2}{b^2}\,z^2,$$

v souřadnicích s počátkem S, osou $S\,A$; přenese-li se počátek do A, bude rovnice zníti

$$x^2 + y^2 = \frac{4\,\varrho^2}{b^2}\,z^2,\quad b = c\,sin\,\alpha\,, \tag{4}$$

a tento tvar zůstane i po otočení osy do polohy původní $A\,x$.

XXXVI.

Dosadíme-li sem známý výraz $b^2 = g^2 - 4\varrho^2$, vyjde

$$\frac{4\varrho^2}{b^2} = \frac{4\varrho^2 \sin^2\vartheta}{a^2 - 4\varrho^2 \sin^2\vartheta} = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\gamma - \sin^2\vartheta},$$

a tak zní rovnice kužele, jímž se hyppopéda z vrcholu A promítá,

$$x^2 + y^2 = \frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\gamma - \sin^2\vartheta}\, z^2. \tag{4*}$$

Tento kužel obsahuje také hyperbolu, a tedy

„Hyperboly na inversní ploše (1) jsou průsečnice rovin (3) s rotačními kuželi (4*)."

Rovina kruhu Γ_φ v souřadnicích s počátkem A má rovnici

$$y - x\, tg\, \varphi = a\, tg\, \varphi;$$

v našem případě $\varphi = \frac{\pi}{2} - \gamma$, a tak zní tato rovnice

$$y \sin\gamma - x\cos\gamma = a\cos\gamma;$$

inversí přechází v kouli

$$y \sin\gamma - x\cos\gamma = \frac{\cos\gamma}{a}(x^2 + y^2 + z^2);$$

její průseč s rovinou (3) je transformovaný kruh $\bar{\Gamma}$, a odtud vychází, že *kruh $\bar{\Gamma}$ leží na kouli*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 \sin^2\vartheta}{\cos^2\gamma}. \tag{5}$$

Koule tato má společný střed s kuželem (4) a odtud vychází, že „hyperboly a kruhy na inversní ploše (1) jsou soustředny."

Střed těchto čar je pravoúhlý průmět bodu A do jich společné roviny (3); jeho souřadnice budou

$$x = a \sin^2\vartheta \sec\gamma \cos(\pi - \gamma), \quad y = a\sin^2\vartheta \sec\gamma \sin(\pi - \gamma),$$

t. j.

„střed kruhu a hyperboly na rovině (3) má souřadnice

$$x = -a\sin^2\vartheta, \quad y = a\sin^2\vartheta\, tg\, \gamma," \tag{6}$$

takže leží na pevné přímce (L'), vrcholové tečně paraboly obalové.

Vložíme-li hodnoty (6) do rovnice (4*), obdržíme

$$z^2 = \frac{a^2\sin^2\vartheta}{\cos^2\gamma}(\cos^2\gamma - \sin^2\vartheta), \tag{7}$$

a odtud

$$y^2 + z^2 = a^2\sin^2\vartheta - a^2\sin^4\vartheta,$$

takže

„vrcholy hyperbol na inversní ploše (1) opisují kruh

$$x = -a\sin^2\vartheta, \quad y^2 + z^2 = a^2\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta."$$

XXXVI.

Pro směr asymptot stačí určiti průsečnice kužele (4*) s rovinou

$$x \cos \gamma = y \sin \gamma ;$$

obdržíme

$$\frac{y}{\cos \gamma} = \pm \frac{z \sin \vartheta}{\sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \vartheta}},$$

takže směr asymptot hyperboly je dán rovnicemi

$$\frac{x}{\sin \gamma} = \frac{y}{\cos \gamma} = \frac{z}{\pm \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma}{\sin^2 \vartheta} - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\frac{\cos \gamma}{\sin \vartheta}}$$

t. j. kosinusy směrné jsou

$$tg\, \gamma \sin \vartheta, \quad \sin \vartheta, \quad \pm \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}} \, .$$

Realná osa hyperboly je rovnoběžna s $A\,z$, tedy úhel asymptot s osou realnou má

(8) $$\cos = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}}, \quad tg = \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma} : \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}};$$

délka realné polouosy jest dle (7)

(9) $$\mathfrak{a} = a \sin \vartheta \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}},$$

dálka ohnisek bude tudíž stálá

$$z = \pm a \sin \vartheta$$

— při hodnotách x a y z rovnic (6) — t. j.

„ohniska hyperbol na inversní ploše (1) naplňují dvě přímky rovnoběžné s $A\,y$

$$x = - a \sin^2 \vartheta, \quad z = \pm a \sin \vartheta.$$

Je-li $\mathfrak{b}$ laterální polouosa hyperboly, jest dle (8)

$$\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \frac{\sin \vartheta}{\cos \gamma} : \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}},$$

t. j. dle (9)

$$\mathfrak{b} = \frac{a \sin^2 \vartheta}{\cos \gamma},$$

takže

„laterální polouosa hyperboly leží ve stopě roviny (3) a rovná se její vzdálenosti od bodu A."

XXXVI.

Určíme ještě geometrické místo průseků kruhů a hyperbol; rovnice (4*) a (5) nám k tomu podávají

$$(10) \qquad z^2 = a^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{1}{\cos^2 \gamma} - \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^4 \gamma} \right),$$

$$(11) \qquad x^2 + y^2 = \frac{a^2 \sin^4 \vartheta}{\cos^4 \gamma}.$$

V identitě

$$(x \cos \gamma - y \sin \gamma)^2 + (x \sin \gamma + y \cos \gamma)^2 = x^2 + y^2$$

užijme rovnic (3) a (11); vyjde

$$(x \sin \gamma + y \cos \gamma)^2 = \frac{a^2 \sin^4 \vartheta}{\cos^4 \gamma} - \frac{a^2 \sin^4 \vartheta}{\cos^2 \gamma},$$

t. j.

$$x \sin \gamma + y \cos \gamma = \pm a \frac{\sin^2 \vartheta \sin \gamma}{\cos^2 \gamma}.$$

Z této rovnice obdržíme ve spojení s (3) pro souřadnice průseků výrazy — lišíce obé znamení $\pm$ —

$$x_1 = -\frac{a \sin^2 \vartheta}{\cos^2 \gamma}, \quad y_1 = 0,$$

$$x_2 = -a \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}, \quad y_2 = 2 a \sin^2 \vartheta \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}.$$

První řešení ve spojení s (10) podává kruh v rovině $x z$

$$x^2 + z^2 + a x = 0, \quad y = 0,$$

který odpovídá inversí dvojné přímce $O z$, a je tedy dvojnou čarou plochy (1).

Pro druhé řešení máme nejprvé

$$(12) \qquad y_2^2 = 4 a \sin^2 \vartheta (x_2 + a \sin^2 \vartheta)$$

jako rovnici průmětu do $A x y$; tato čára je parabola, kterou obalují přímky (3), majíc vrchol $x = -a \sin^2 \vartheta$, $y = 0$ a ohnisko A. Je tedy toto řešení dotyková čára parabolického válce kolmého na $A x y$, který se plochy (1) dvojmo dotýká. Pomocí (10) a (12) vypočteme

$$(x_2 + 2 a \sin^2 \vartheta)^2 + z^2 = a (x_2 + 2 a \sin^2 \vartheta),$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z^2 = a x_2 + 2 a^2 \sin^2 \vartheta,$$

takže je tato čára pronik koule s přímým kruhovým válcem směru $A y$.

K vůli konstruktivnímu ovládnutí této plochy stůjtež zde ještě tyto poznámky: Kruhy (K), (K') přecházejí inversí v přímky k, k', které procházejíce bodem O svírají s $O x$ úhly ϑ a $-\vartheta$; body P a P', jež tyto přímky stanoví na kruzích (K) a (K'), leží na základním kruhu transformace

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

a jsou to právě body, v nichž se obalová parabola přímek (3) těchto přímek k, k' dotýká. Je-li Q průsek přímky $P P'$ s osou $O x$, leží vrchol paraboly ve středu úsečky $O Q$. Průměr kruhu $\overline{\Gamma}$ určen jest přímkou (3), a sice leží jeho koncové body na její průsecích s přímkama k, k'; takže plocha (1) jest geometrické místo kruhů, které ležíce na tečných rovinách parabolického válce protínají dvě tečny jeho základny.

Kruhy $\overline{\Gamma}$ protínají dále kruh dvojný $y = 0$, $x^2 + z^2 + a x = 0$ (v rovině $x z$ nad průměrem $O A$). Vedeme kruhem dvojným libovolnou kouli Σ, její průseky s přímkama k, k' udávají konce průměru kruhu $\overline{\Gamma}$. Konstruktivně stačí vésti kruh Σ^1 (stopu koule) libovolně body O, A; jeho průseky K, K' s k a k' určují stopy kruhu $\overline{\Gamma}$.

Koule Σ (středu σ) jest inversně přiřaděna rovině kruhu Γ, kterou přímky $A M$ protínají pod úhlem ϑ; tedy po inversi protíná přímka $A M$ kouli Σ pod stálým úhlem ϑ, čili — značí-li M bod na kruhu $\overline{\Gamma}$ plochy inversní (1) — poloměr koule σM svírá s $A M$ úhel $\frac{\pi}{2} - \vartheta$; zejména jest

$\sphericalangle \sigma K A = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ (obr. 10).

Vedeme-li $O \sigma_0 \perp k'$, bude σ_0 středem kruhu obsahujícího body $O A P$; dále je snadné ukázati, že vrcholová tečna (L') obalové paraboly spojuje průseky R, R' přímek k, k' s kruhem $(O A)$.

Kruhy $\overline{\Gamma}$ se obecně neprotínají, rovněž hyperboly, ale protínají se kruhy s hyperbolami. Každým bodem plochy prochází jeden kruh a jedna hyperbola; jich průměty jsou dvě tečny paraboly vedené průmětem bodu.

Tyto tečny pro daný průmět M_1 bodu na ploše (1) strojí se pomocí kruhu nad průměrem $A M_1$; ten protne (L') ve dvou bodech, jež hrají roli bodu V'', t. j. hledané tečny (jež jsou kolmy na jich spojnicích s bodem A) procházejí těmito body.

19. Jako zobecnění plochy isogonální chceme ještě uvažovati plochu, která je geometrickým místem kruhů Γ v rovinách svazku $O z$, které protínají dva pevné kruhy (K), (K') roviny $O x y$, procházející bodem O.

Buď A druhý průsek základních kruhů, a volme $O A$ za osu x; nechť kruhy (K), (K') protínají osu $A x$ v bodě A pod úhly ϑ, ϑ', tedy v bodě O pod úhly $-\vartheta$, $-\vartheta'$, takže průměry z bodu O svírají s $O x$ úhly

$\frac{\pi}{2} - \vartheta$, resp. $\frac{\pi}{2} - \vartheta'$.

Znamenáme-li ještě $O A = a$ jako dosud, budou polární rovnice kruhů základních

$$r_1 = \frac{a \sin(\varphi + \vartheta)}{\sin \vartheta}, \quad r_2 = \frac{a \sin(\varphi + \vartheta')}{\sin \vartheta'},$$

při čemž průměry jich jsou

$$\frac{a}{\sin \vartheta}, \quad \frac{a}{\sin \vartheta'}.$$

Pro kruh Γ máme pak průvodič středu

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = a \cos \varphi + b \sin \varphi, \quad b = \frac{a \sin(\vartheta + \vartheta')}{2 \sin \vartheta \sin \vartheta'},$$

a jeho poloměr jest

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = c \sin \varphi, \quad c = \frac{a \sin(\vartheta' - \vartheta)}{2 \sin \vartheta \sin \vartheta'}.$$

Zavedeme-li opět pro libovolný bod M na kruhu Γ úhel α mezi rovinou základní a jeho poloměrem, budou souřadnice bodu na ploše (Γ) zníti

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = c \sin \varphi \sin \alpha, \\ & r = a \cos \varphi + b \sin \varphi + c \sin \varphi \cos \alpha; \\ & b = \frac{a \sin(\vartheta + \vartheta')}{2 \sin \vartheta \sin \vartheta'}, \quad c = \frac{a \sin(\vartheta' - \vartheta)}{2 \sin \vartheta \sin \vartheta'}; \\ & \operatorname{cotg} \vartheta = \frac{b + c}{a}, \quad \operatorname{cotg} \vartheta' = \frac{b - c}{a}. \end{aligned} \right.$$

Při tom jsou r a φ polární souřadnice průmětu (pól O, osa $O\,x$). Z druhé rovnice máme násobíce r,

$$x^2 + y^2 = a\,x + b\,y + c\,y \cos \alpha;$$

výraz pro z dává

$$z^2 (x^2 + y^2) = c^2 y^2 \sin^2 \alpha,$$

a připočteme-li hodnotu vzatou z předešlé rovnice

$$(x^2 + y^2 - a\,x - b\,y)^2 = c^2 y^2 \cos^2 \alpha,$$

vyjde rovnice plochy (Γ)

$$(2) \qquad (x^2 + y^2 - a\,x - b\,y)^2 + z^2 (x^2 + y^2) = c^2 y^2$$

čili

$$(2^*) \quad [(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2] (x^2 + y^2) = (a^2 + c^2) y^2 + b^2 x^2 - 2\,a\,b\,x\,y.$$

Pro čáru stálého α máme

$$x + i\,y = \frac{a + i\,b + i\,c \cos \alpha}{2} + \frac{a - i\,b - i\,c \cos \alpha}{2} e^{2 i \varphi};$$

průmět její je kruh obsahující bod A, střed leží na přímce

$$x = \frac{a}{2},$$

a tedy kruh ten prochází též bodem O.

Položme

$$a + i\,(b + c\cos\alpha) = 2\,\varrho\, e^{i\gamma},$$

i bude ϱ poloměrem průmětu, rovnice jeho pak

$$x + i\,y = \varrho\, e^{i\gamma} + \varrho\, e^{i(2\varphi-\gamma)}.$$

Položíme-li

$$x + i\,y = \varrho\, e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}(\xi + i\,\eta),$$

máme v pravoúhlých souřadnicích ξ, η, $\zeta = z$ rovnice čáry $\alpha =$ konst. ve tvaru

$$\xi = \varrho\cos 2\varphi, \quad \eta = \varrho\sin 2\varphi, \quad \zeta = c\sin\alpha\sin\varphi,$$

t. j. čáry $\alpha =$ konst. naší obecnější plochy (Γ) jsou rovněž hyppopédy.

Přímý konoid

$$z^2(x^2 + y^2) = c^2 y^2,$$

jehož přímky jsou rovnoběžny s $x\,y$, protínají osu $O\,z$ a ellipsu

$$y = z, \quad x^2 + y^2 = c^2,$$

dotýká se naší plochy (Γ) podél její průseku s válcem kruhovým

$$x^2 + y^2 = a\,x + b\,y,$$

jak bezprostředně ukazuje rovnice (2).

Rovnici tu lze též psáti

$$(x^2 + y^2 - a\,x - a\,y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta)\,(x^2 + y^2 - a\,x - a\,y\,\mathrm{cotg}\,\vartheta') \\ + (x^2 + y^2)\,z^2 = 0.$$

Průmět bodu leží tedy vždy uvnitř jednoho a zevně druhého ze základních kruhů (K), (K'). Je-li na příklad M_1 zevně kruhu (K'), bude v naší rovnici

$$-(K)\,(K') = (x^2 + y^2)\,z^2$$

$$-(K) = l^2, \ (K') = \overline{M_1 O}\,.\,\overline{M_1 K'}, \quad x^2 + y^2 = \overline{O M_1}^2,$$

značí-li l poloviční tětivu kruhu (K) vedenou bodem M_1 kolmo na jeho poloměr; rovnice naše pak dává

$$\frac{M_1 K'}{M_1 O} = \frac{z^2}{l^2},$$

kde levá strana je dělicí poměr bodu M_1 vůči základnímu páru K', O.

XXXVI.

Podobně vyjde

$$\frac{M_1 K}{M_1 O} = -\frac{z^2}{t'^2},$$

je-li t' délka tečny ke kruhu (K') z bodu M_1 vedené.

Při stálém λ rovnice

$$\frac{O M_1}{M_1 K} = \lambda$$

podává

$$\overline{O M_1} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \overline{O K},$$

t. j. body M_1 opisují kruh; rovněž body stálého t' naplňují kružnici, a odtud vychází, že můžeme body na řezu $z =$ konst. naší plochy strojiti jako průseky dvou kruhů.

II.

1. V odstavci 19. první části uvažovali jsme plochu (Γ) zaplněnou kruhy Γ, ležícími v rovinách svazku $O z$ a protínajícími dva kruhy (K), (K') v rovině $O x y$. Střed kruhu Γ — jejž znamenejme σ — má polární souřadnice φ a

$$r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2} = a \cos\varphi + b \sin\varphi;$$

zavedeme-li úhel β rovnicí

$$a + i b = a_0 e^{i\beta}, \qquad a_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

obdržíme

$$(\sigma) \qquad r_0 = a_0 \cos(\varphi - \beta),$$

takže středy σ kruhů Γ naplňují opět kruh procházející bodem O, jehož průměr jest a_0 a jehož střed leží na přímce $\varphi = \beta$.

Z těchto bodů σ vycházejí poloměry σM k bodům na kruzích Γ, a jsou tyto poloměry k ose $O z$ pod stálým úhlem nakloněny, opisuje-li bod M hyppopédu $\alpha =$ konst.

Chceme uvažovati plochu sborcenou vytvořenou těmito přímkami σM, t. j. plochu přímek protínajících osu $O z$ pod stálým úhlem $\frac{\pi}{2} - \alpha$, a kruh (σ).

Bod σ má souřadnice

$$x_0 = a \cos^2\varphi + b \sin\varphi \cos\varphi, \quad y_0 = a \cos\varphi \sin\varphi + b \sin^2\varphi, \quad z_0 = 0$$

a značí-li x, y, z souřadnice bodu M na hyppopédě (1) čl. 19, bude

$$x - x_0 = c \sin\varphi \cos\varphi \cos\alpha, \quad y - y_0 = c \sin^2\varphi \cos\alpha, \quad z - z_0 = c \sin\varphi \sin\alpha,$$

takže přímka $P \equiv \overline{\sigma M}$ má rovnice

$$(1)\quad \frac{x - a\cos^2\varphi - b\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\alpha\cos\varphi} = \frac{y - a\cos\varphi\sin\varphi - b\sin^2\varphi}{\cos\alpha\sin\varphi} =$$
$$= \frac{z}{\sin\alpha} = v,$$

a jsou to zároveň rovnice plochy sborcené (P), kterou tak obdržíme vyjádřenu dvěma parametry φ a v

$$(2)\quad \begin{cases} x = a\cos^2\varphi + b\sin\varphi\cos\varphi + v\cos\alpha\cos\varphi \\ y = a\cos\varphi\sin\varphi + b\sin^2\varphi + v\cos\alpha\sin\varphi \\ z = v\sin\alpha. \end{cases}$$

Průmět libovolného bodu M této plochy P) má za polární souřadnice (osa $O\,x$, pól O) úhel φ a průvodič

$$(2^1)\quad r = a\cos\varphi + b\sin\varphi + v\cos\alpha = r_0 + v\cos\alpha.$$

Na řezích $z =$ konst. jest $v =$ konst., a odtud vychází, že „řezy plochy (P) s rovinami kolmými na dvojnou přímku $O\,z$ jsou konchoidy kruhu ležícího na válci daném kruhem středů (σ).“

Rovnice (2) možno psáti

$$(2^2)\quad x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = v\sin\alpha;$$

násobme (2^1) hodnotou $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, a u výsledku

$$x^2 + y^2 = a\,x + b\,y + v\,co\ \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$$

nahraďme hodnotou

$$v\cos\alpha = z\,\mathrm{cotg}\,\alpha;$$

obdržíme

$$(3)\quad (x^2 + y^2 - a\,x - b\,y)^2 = (x^2 + y^2)\,z^2\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha;$$

naše sborcená plocha je tedy stupně 4. Otočením soustavy souřadnic kolem $O\,z$ docílíme toho, že odpadne člen b, a tak můžeme předpokládati $\vartheta + \vartheta' = 0$, aniž učiníme újmu obecnosti.

Budeme tedy uvažovati plochu (P) pro případ tento

$$(3^*)\quad (x^2 + y^2 - a\,x)^2 = (x^2 + y^2)\,z^2\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha,$$

aneb v parametrickém vyjádření

$$(2^*)\quad x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad r = a\cos\varphi + v\cos\alpha,$$
$$z = v\sin\alpha.$$

K dané ploše (3^*) přísluší ∞^1 ploch isogonálních, poněvadž rovnice ta neobsahuje ϑ, a tyto plochy na ní vytínají ∞^1 hyppopéd se společným bodem dvojným A, diametrálně protilehlým bodu O.

Otočením soustavy souřadnic docílíme tvar (3), v němž litery a, b jsou nahraženy hodnotami a', b' závislými na veličině a a na velikosti otočení; základní kruh (σ) protne novou osu úseček v určitém bodě A', a ten jest opět dvojný bod ∞^1 hyppopéd ležících na naší sborcené ploše:

„Sborcená plocha (P) obsahuje ∞^2 hyppopéd; jich dvojné body leží na základním kruhu (σ)."

Ukažme to přímo. Pro průseč sborcené plochy s kruhovým válcem

$$x^2 + y^2 = (a + m)\, x + n\, y$$

platí

$$r = (a + m) \cos \varphi + n \sin \varphi = a \cos \varphi + v \cos \alpha,$$

t. j.

$$v \cos \alpha = m \cos \varphi + n \sin \varphi,$$

takže máme

$$x + i\, y = \frac{a + m + n\, i}{2} + \frac{a + m - n\, i}{2}\, e^{2 i \varphi},\ z = tg\, \alpha\, (m \cos \varphi + n \sin \varphi).$$

Položme

$$m = k \sin \mu,\quad n = k \cos \mu,$$

tedy

$$z = k\, tg\, \alpha \sin (\varphi + \mu) = k\, tg\, \alpha \sin \psi,\quad \psi = \varphi + \mu;$$

dále buď

$$a + m + n\, i = 2\, \varrho\, e^{i \nu},$$

tedy

$$x + i\, y = \varrho\, e^{i \nu} + \varrho\, e^{i (2 \varphi - \nu)} = \varrho\, e^{i \nu} + \varrho\, e^{-(\nu + 2 \mu) i}\, e^{2 i \psi},$$

takže substituce orthogonální

$$x + i\, y = \varrho\, e^{i \nu} + e^{-i (\nu + 2 \mu)}\, (\xi + i\, \eta)$$

podá

(4) $$\xi = \varrho \cos 2\, \psi,\quad \eta = \varrho \sin 2\, \psi,\quad z = k\, tg\, \alpha \sin \psi,$$

kteréžto rovnice charakterisují hyppopédu.

Její dvojný bod má souřadnice

$$\xi = \varrho,\quad \eta = 0 = z,$$

t. j.

$$\psi = 0,\quad \varphi = -\mu;$$

tu jest pak pro tento bod

$$x + i\, y = \varrho\, e^{i \nu} + \varrho\, e^{-i \nu}\, e^{-2 i \mu};$$

$$\varrho\, e^{i \nu} = \frac{a + m + i\, n}{2},\quad e^{-2 i \mu} = \frac{n - i\, m}{n + i\, m},$$

tedy

$$x + i\, y = \frac{a + m + i\, n}{2} + \frac{n - i\, m}{n + i\, m}\, \frac{a + m - i\, n}{2} = \frac{a\, n}{n + i\, m},$$

t. j.

$$x + i\, y = a \cos \mu\, e^{-i \mu} = \frac{a}{2}\, (1 + e^{-2 i \mu}).$$

XXXVI.

Dvojný bod hyppopédy je tudíž určitý bod A' kruhu základního $(O\,A)$. Půdorysy hyppopéd plochy sborcené (3*) majících společný bod dvojný A' tvoří svazek kruhů s vrcholy O, A'. —

Hledejme dále pronik sborcené plochy s rotačním kuželem

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2 z^2,$$

jehož vrchol $x_0\, y_0$ leží na kruhu základním $(O\,A)$,

$$x_0^2 + y_0^2 = a\, x_0.$$

Rovnice kužele

$$x^2 + y^2 - 2\, x_0\, x - 2\, y_0\, y + x_0^2 + y_0^2 - k^2 z^2 = 0$$

podá po dosazení hodnot (2*)

$$r^2 - k^2 v^2 \sin^2\alpha - 2\, r\, (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi) + x_0^2 + y_0^2 = 0,$$
$$r = a \cos\varphi + v \cos\alpha.$$

Obdržíme tak rovnici 2. stupně pro neznámou $v \cos\alpha$, značíme-li $g = 1 - k^2 tg^2\alpha$:

$$g\, v^2 \cos^2\alpha + 2\, v \cos\alpha\, (a \cos\varphi - x_0 \cos\varphi - y_0 \sin\varphi)$$
$$+ a^2 \cos^2\varphi - 2\, a \cos\varphi\, (x_0 \cos\varphi + y_0 \sin\varphi) + x_0^2 + y_0^2 = 0.$$

Diskriminant této rovnice

$$\Delta = [(x_0 - a) \cos\varphi + y_0 \sin\varphi]^2 - g\, (a^2 \cos^2\varphi - 2\, a\, x_0 \cos^2\varphi$$
$$- 2\, a\, y_0 \sin\varphi \cos\varphi + a\, x_0)$$

lze psáti jako kvadratickou formu

$$\Delta = (x_0 - a)\, (x_0 - a + a\, g) \cos^2\varphi + 2\, y_0\, (x_0 - a + a\, g) \cos\varphi \sin\varphi$$
$$+ (y_0^2 - a\, g\, x_0) \sin^2\varphi,$$

jejíž diskriminant

$$a^2 g^2 (x_0^2 + y_0^2 - a\, x_0) + a\, g\, (x_0 - a)\, (x_0^2 + y_0^2 - a\, x_0) = 0,$$

takže Δ jest úplným čtvercem, t. j.

$$\sqrt{\Delta} = l \cos\varphi + m \sin\varphi,$$

a obdržíme kořeny kvadratické rovnice ve tvaru

$$v \cos\alpha = \frac{(x_0 - a) \cos\varphi + y_0 \sin\varphi \pm (l \cos\varphi + m \sin\varphi)}{1 - k^2 tg^2\alpha},$$

jakožto parametrickou rovnici průseče kužele s plochou (3*). Tato průseč sestává ze dvou hyppopéd, jež jsou realné v případě

$$x_0 - a + a\, g \equiv x_0 - a\, k^2 tg^2\alpha < 0;$$

tyto hyppopédy splynou v případech

$$x_0 = a \text{ a } x_0 = a\, k^2 tg^2\alpha.$$

Pro případ $k\,tg\,\alpha = 1$ $(x_0 < a)$ stane se jedno řešení v nekonečně velkým, kužel má strany rovnoběžné s přímkami sborcené plochy; jedna hyppopéda se rozpadá v úběžnou kuželosečku a dvě přímky plochy procházející vrcholem.

V tomto jednoduchém případě $g = 0$ rovnice kvadratická přejde v lineární

$$2\,v\cos\alpha = \frac{(a^2 - a\,x_0)\cos^2\varphi - 2\,a\,y_0\sin\varphi\cos\varphi + a\,x_0\sin^2\varphi}{(x_0 - a)\cos\varphi + y_0\sin\varphi}$$

čili

$$2\,v\cos\alpha = -a\cos\varphi - \frac{a\,y_0}{x_0 - a}\sin\varphi.$$

Hyppopéda leží tedy na válci

$$x^2 + y^2 = \frac{a}{2}\,x - \frac{a}{2}\,\frac{y_0\,y}{x_0 - a},$$

který jest úplně určen tím, že jeho základna obsahuje body O, $A'\,(x_0, y_0)$ a že její střed leží na přímce

$$4\,x = a.$$

Pro polární souřadnice ϱ, Θ, ω,

$$x = \varrho\sin\Theta\cos\omega,\quad y = \varrho\sin\Theta\sin\omega,\quad z = \varrho\cos\Theta$$

vyjádří se rovnice (3*) nejprvé

$$(\varrho\sin\Theta - a\cos\omega)^2 = \varrho^2\cos^2\Theta\,cotg^2\,\alpha,$$

a odtud

(5) $$\varrho = \frac{a\cos\omega}{\sin\Theta \mp cotg\,\alpha\cos\Theta},$$

takže plocha náleží typu $\varrho = f(\Theta)\,\Phi(\omega)$, který má určité typické vlastnosti pokud se týče čar $\Theta =$ konst. a $\omega =$ konst., o nichž nám bude jednati v příští rozpravě.

Inversí

$$\varrho_0 = \frac{a^2}{\varrho}$$

vznikne

$$\varrho_0 = \varrho_1 \mp cotg\,\alpha\,\varrho_2,$$

$$\varrho_1 = \frac{a\sin\Theta}{\cos\omega},\quad \varrho_2 = \frac{a\cos\Theta}{\cos\omega};$$

plocha (ϱ_1) má rovnici

$$x\,(x^2 + y^2 + z^2) = a\,(x^2 + y^2),$$

a vznikne inversí z kruhového válce $x^2 + y^2 = a\,x$, kdežto (ϱ_2) jest plocha stupně 6.

$$x^2\,(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 z^2\,(x^2 + y^2),$$

inversní to plocha konoidu

$$(x^2 + y^2)\,z^2 = a^2 x^2.$$

XXXVI.

2. Povrchová přímka plochy sborcené má rovnice

$$x = a \cos^2\varphi + k z \cos\varphi$$
$$y = a \sin\varphi \cos\varphi + k z \sin\varphi, \quad k = \cot g\, \alpha.$$

Podmínka, aby se protínaly přímky φ a φ_1, zní

$$\begin{vmatrix} \cos^2\varphi - \cos^2\varphi_1, & \cos\varphi - \cos\varphi_1 \\ \dfrac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1}{2}, & \sin\varphi - \sin\varphi_1 \end{vmatrix} = 0;$$

vyloučí-li se činitel $\cos\varphi - \cos\varphi_1$ v prvním řádku, dále užije-li se identity

$$\frac{\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_1}{\sin\varphi - \sin\varphi_1} = 2\cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\,\frac{\cos(\varphi + \varphi_1)}{\cos\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}},$$

obdržíme po vynechání činitele $\sin\varphi - \sin\varphi_1$

$$\cos\varphi + \cos\varphi_1 = \cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\,\frac{\cos(\varphi + \varphi_1)}{\cos\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}},$$

tedy

$$\frac{\cos\dfrac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\cos\dfrac{\varphi + \varphi_1}{2}}\left[\cos(\varphi + \varphi_1) - 2\cos^2\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right] = 0;$$

připojením vynechaných činitelů $\sin\varphi - \sin\varphi_1$, $\cos\varphi - \cos\varphi_1$ se to přepíše na

$$\cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}(\cos\varphi - \cos\varphi_1) = 0.$$

Podmínka $\sin\dfrac{\varphi - \varphi_1}{2} = 0$ není splněna pro různé přímky, naproti tomu

$$\cos\frac{\varphi - \varphi_1}{2} = 0$$

dává $\varphi_1 = \varphi + \pi$, a podmínka $\cos\varphi - \cos\varphi_1 = 0$ pak $\varphi_1 = 2\pi - \varphi$. Přímky φ a $\varphi + \pi$ se protínají na rovině $z = 0$, t. j. na kruhu (OA). Rovina protínajících se přímek

$$x = m z + p, \quad y = n z + q; \quad x = m_1 x + p_1 \quad z = n_1 x + q_1$$

má rovnici

$$\begin{vmatrix} x - p & y - q & z \\ m & n & 1 \\ m_1 & n_1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

v našem případě tedy rovina přímek φ, $\varphi + \pi$ bude

$$\begin{vmatrix} x - a\cos^2\varphi, & y - a\sin\varphi\cos\varphi, & z \\ k\cos\varphi & k\sin\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

t. j.

$$x\sin\varphi = y\cos\varphi;$$

přímky naše protínají osu Oz v bodech různých, leží v téže rovině svazku Oz.

Dále přímky φ a $2\pi - \varphi$ jsou na rovině rovnoběžné s Oy

(6) $$x = a\cos^2\varphi + kz\cos\varphi,$$

a protínají se v bodě osy Oz:

$$y = 0, \quad kz = -a\cos\varphi, \quad x = 0.$$

Obě přímky splynou pro $\sin\varphi = 0$, t. j. pro $\varphi = 0$ a $\varphi = \pi$; máme tak dvě *přímky torsální*

$$x = a + kz, \quad y = 0; \quad x = a - kz, \quad y = 0.$$

Jsou to povrchové přímky procházející bodem A.

V rovnici (6) pišme $a\cos\varphi = g$, takže rovina přímek sekoucích se na ose Oz bude

(6^0) $$ax - g^2 = kgz;$$

pro její řez s plochou sborcenou máme

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = (x^2 + y^2)\left(\frac{ax - g^2}{g}\right)^2;$$

této rovnici hoví identicky

$$x^2 + y^2 = g^2,$$

t. j. čára se rozpadá; zbývající část sestává z průmětů obou přímek.

„Rovina určená povrchovýma přímkama, které se protínají na přímce dvojné Oz, protíná plochu ještě v ellipse na kruhovém válci

$$x^2 + y^2 = g^2;$$

při čemž

$$g = a\cos\varphi,$$

a průsek roviny s osou Oz je

$$z = -g\,tg\,\alpha.$$

Roviny (6) elliptických řezů sborcené plochy obalují válec parabolický

$$k^2z^2 + 4ax = 0;$$

jeho přímý řez na rovině xz má vrchol O, osu Ox, ohnisko $-a\,tg^2\alpha$:

XXXVI.

„Tečné roviny parabolického válce

(7) $$z^2 + 4\,a\,x\,tg^2\,\alpha = 0$$

protínají sborcenou plochu v dvojici přímek a v ellipse na kruhovém válci s osou $O\,z$.“

Torsální roviny ($g = a$ a $g = -a$)

$$x \pm k\,z = a$$

dotýkají se plochy podél torsálních přímek a sekou ji v ellipsách na válci

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Stále při označení $k = cotg\,\alpha$ můžeme plochu (3*)

$$(x^2 + y^2 - a\,x)^2 = k^2\,z^2\,(x^2 + y^2)$$

považovati za plochu obalovou soustavy ploch 2. stupně

$$k^2\,z^2\,\lambda^2 + 2\,\lambda\,(x^2 + y^2 - a\,x) + x^2 + y^2 = 0\,;$$

rovnici tu lze psáti

$$(1 + 2\,\lambda)\left[\left(x - \frac{a\,\lambda}{1 + 2\,\lambda}\right)^2 + y^2\right] + \lambda^2\,k^2\,z^2 = \frac{a^2\,\lambda^2}{1 + 2\,\lambda}\,,$$

a podává rotační plochy vepsané sborcené ploše (P), které jsou ellipsoidy při $2\,\lambda + 1 > 0$ a jednoploché hyperboloidy při $2\,\lambda + 1 < 0$; při $2\,\lambda + 1 = 0$ nám tato rovnice podává vepsaný válec parabolický (7), jehož nárysná stopa podává zároveň obrys plochy.

Přímka P

$$x = (a\,cos\,\varphi + k\,z)\,cos\,\varphi,\quad y = (a\,cos\,\varphi + k\,z)\,sin\,\varphi$$

protíná válec kruhový

$$x^2 + y^2 = a^2\,cos^2\,\varphi$$

v bodech, pro něž

$$a\,cos\,\varphi + k\,z = \pm\,a\,cos\,\varphi,$$

a tedy buď $z = 0$ aneb $k\,z = -2\,a\,cos\,\varphi$.

První řešení odpovídá stopě přímky na základní rovině a podává bod na dvojném kruhu ($O\,A$); druhá hodnota podává druhý průsek přímky P s ellipsou na rovině (P_φ, $P_{-\varphi}$), tedy bod, v němž se rovina ta dotýká plochy sborcené.

Souřadnice bodu toho jsou

(7ᵃ) $$x = -a\,cos^2\,\varphi,\quad y = -a\,cos\,\varphi\,sin\,\varphi,\quad z = -2\,a\,tg\,\alpha\,cos\,\varphi\,;$$

rovina uvažovaná dotýká se plochy sborcené dvojmo, druhý bod dotykový určuje přímka $P_{-\varphi}$, a je tento bod patrně s bodem (7ᵃ) symetrický vůči rovině $O\,x\,z$. Souhrn těchto bodů (7ᵃ) tvoří dotykovou čáru sborcené plochy s vepsaným válcem parabolickým (7). Souřadnice (7ᵃ) hoví rovnicím

$$x^2 + y^2 + a\,x = 0,\quad x^2 + y^2 + z^2 + (1 + 4\,tg^2\alpha)\,a\,x = 0,$$

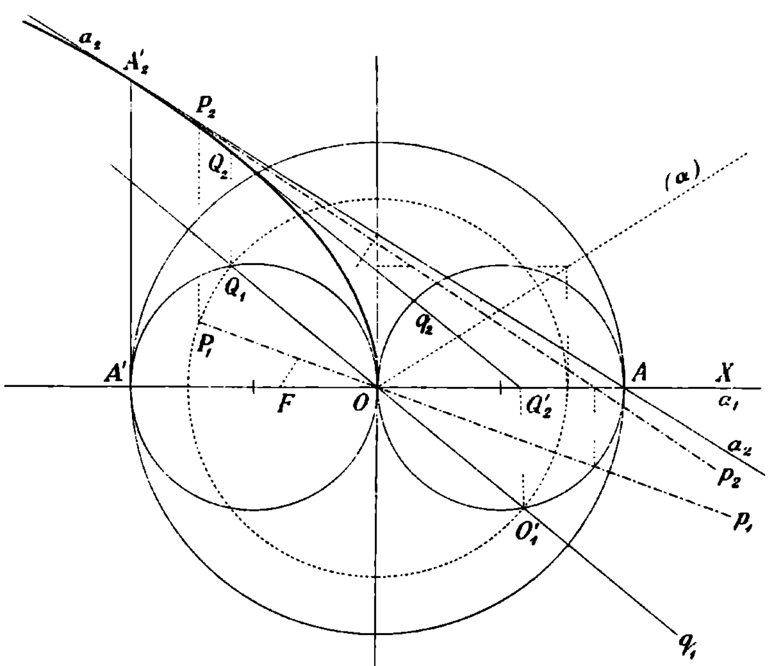
a je tedy uvažovaná čára dotyková hyppopédou.

Klade-li se $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$, obdržíme ostatně obvyklý tvar

$$x + i\,y = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\,e^{2i\psi},\quad z = 2\,a\,tg\,\alpha\,sin\,\psi.$$

V obr. 11. dán základní kruh $O\,A$, a směr (α) svírající úhel α s osou $O\,x$; (a_1, a_2) jsou průměty jedné z povrchových přímek (torsálních) a vedených z bodu A.

Je-li dán půdorys q_1 přímky povrchové q, jest její stopa Q' na kruhu $(O\,A)$ jednoznačně určena, vedeme kruh (g) poloměru $g = O\,Q_1'$, jehož



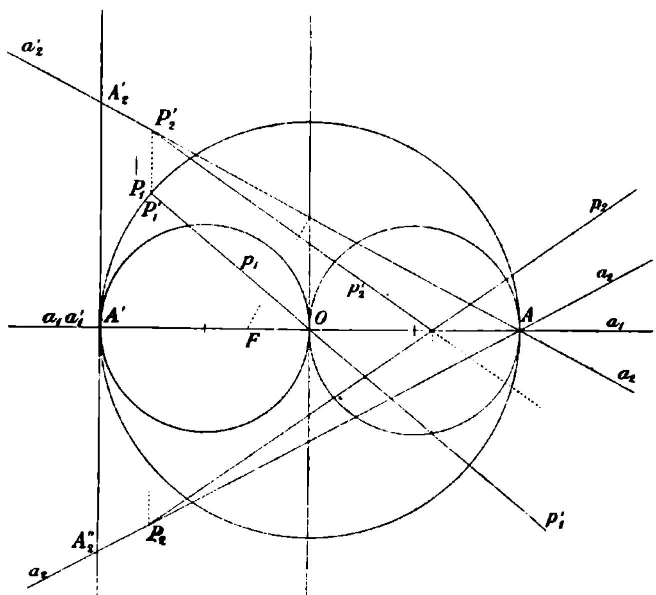
Obr. 11.

průseku s $O\,x$ lze použiti ke konstrukci průsečíku přímky q s přímkou dvojnou $O\,z$ — v obrazci směr φ je $O\,Q_1$ — a tedy k určení nárysu q_2. Přímka q_1 protíná kruh $(O\,A')$ — souměrný s kruhem $(O\,A)$ — v bodě Q_1, jenž je půdorysem bodu Q na hyppopédě dotykové, takže Q_2 jest dotykový bod přímky q_2 s obrysovou parabolou (7). Ohnisko této paraboly F je na kolmici vztýčené na přímku a_2 v její průseku s osou $O\,z$.

Obrazce lze též použiti k rychlé konstrukci povrchových přímek p sborcené plochy; průseky jejich s rovinou (q_2) vedenou přímkou q kolmo na $O\,x\,z$ — t. j. s rovinou dvojnásob tečnou — naplňují ellipsu, která se promítá v kružnici (g); je-li dán půdorys p_1, průsečík jeho s kruhem (g) je průmět P_1 průseku P s rovinou (q_2), a nárys P_2 leží na q_2. Pro nárys p_2 známe tak bod P_2 a rovněž nárys stopy.

V obr. 12. užito týmž způsobem přímek a, a' vedených z bodu A, jako zde naloženo s přímkou q. Je dán půdorys přímky p_1, druhý bod nárysu je bod P_2 na a_2 příslušný k půdorysu P_1 na průseku p_1 s kruhem $(A\,A')$, poněvadž tento bod P je průsek přímky p s torsální rovinou určenou přímkou a.

Operujeme-li současně s přímkou a' týmž způsobem, obdržíme



Obr. 12.

pohodlnou a přesnou konstrukci obou přímek p, p' o společném průmětu p_1; A_2' a A_2'' značí dotykové body přímek a_2', a_2 s obrysovou parabolou.

Vepsaná plocha 2. stupně

$$k^2 z^2 \lambda^2 + 2\lambda\,(x^2 + y^2 - a\,x) + x^2 + y^2 = 0$$

dotýká se plochy podél charakteristiky ležící na ploše

$$\lambda\,(x^2 + y^2 - a\,x) + x^2 + y^2 = 0,$$

t. j. na válci kruhovém

$$x^2 + y^2 = \frac{a\lambda}{1+\lambda}\,x\,;$$

týž seče plochu (P) v hyppopédě, jejíž parametrická rovnice zní

$$v\cos\alpha = -\frac{a}{1+\lambda}\cos\varphi\,,$$

takže

$$x = \frac{a\lambda}{1+\lambda}\cos^2\varphi,\ y = \frac{a\lambda}{1+\lambda}\sin\varphi\cos\varphi,\ z = -\frac{a\,tg\,\alpha}{1+\lambda}\cos\varphi;$$

dvojný bod hyppopédy jest O:

„Sborcené ploše (P) lze vepsati ∞^1 rotačníc ploch 2. stupně, jichž osy jsou směru $O\,z$, a které se plochy dotýkají podél hyppopéd s dvojným bodem O, jichž válce se v ose $O\,z$ vespolek (a roviny $y\,z$) dotýkají."

3. Aby rovina

$$A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$$

obsahovala přímku plochy (P)

$$x = a\cos^2\varphi + k\,z\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi\cos\varphi + k\,z\sin\varphi,$$

musí

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} a\,(A\cos\varphi + B\sin\varphi)\cos\varphi + D = 0,\\ (A\cos\varphi + B\sin\varphi)\,k + C = 0;\end{array}\right.$$

vyloučením φ z těchto rovnic obdržíme tangencialní rovnici plochy (P).

Vylučme nejprve výraz v závorce:

$$\begin{vmatrix} a\cos\varphi & D \\ k & C \end{vmatrix} = 0,\ \text{t. j.}\ a\cos\varphi = \frac{k\,D}{C},$$

a užijme toho pro druhou rovnici (8); vyjde

$$C + \frac{k^2 D\,A}{a\,C} = -k\,B\sqrt{1 - \frac{k^2 D^2}{a^2 C^2}},$$

čili

$$(a\,C^2 + k^2 A\,D)^2 + k^2 B^2 (k^2 D^2 - a^2 C^2) = 0,$$

aneb dosadí-li se hodnota $k = cotg\,\alpha$:

$$(9)\qquad (A\,D + a\,C^2 tg^2\alpha)^2 + B^2 (D^2 - a^2 C^2 tg^2\alpha) = 0.$$

Výjímku činí roviny procházející dvojnou přímkou $O\,z$, poněvadž ty nejsou tečnými rovinami.

1. Pro $D = 0$ vyjde

$$C^2 (B^2 - C^2 tg^2\alpha) = 0;$$

řešení $C = 0$ podává roviny svazku $O\,z$; druhá dvě řešení

$$B = \pm\,C\,tg\,\alpha$$

podávají roviny procházející jednou či druhou přímkou

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\pm\,tg\,\alpha};$$

jsou to přímky v rovině $O\,y\,z$. Jiné tečné roviny z bodu O nejsou.

XXXVI.

2. Položme $B = 0$, t. j. hledejme tečné roviny rovnoběžné s osou $O\,y$; rovnice podává řešení dvojnásobné

$$A\,D + a\,C^2\,tg^2\,\alpha = 0,$$

které přísluší vepsanému válci parabolickému

$$z^2 + 4\,a\,x\,tg^2\,\alpha = 0.$$

3. Pro $C = 0$ podává rovnice buď $D^2 = 0$, t. j. roviny svazku $O\,z$, aneb

$$A = \pm\, i\,B,$$

což odpovídá rovinám rovnoběžným s rovinami $y = \pm\, i\,x$; ty skutečně jsou tečnými rovinami plochy.

4. Substituce $A = 0$ podá

$$a^2\,C^4\,tg^4\,\alpha + B^2\,(D^2 - a^2\,C^2\,tg^2\,\alpha) = 0$$

akožto tangenciální rovnici čáry 4. třídy v rovině $O\,y\,z$, která je řídící čarou vepsaného válce směru $O\,x$.

Čára má dvojnou tečnu v úběžné přímce a v ose $O\,z$; a sice v úběžné přímce splynou body dotykové, tak že přímka platí za dvě tečny dvojné.

Rovnice (8) v tomto případě dávají

$$a\,B\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi + D = 0,\quad C + k\,B\,sin\,\varphi = 0,\quad k = cotg\,\alpha\,;$$

tedy rovina tečná obsahující směr $A\,x$ má rovnici

$$y - k\,z\,sin\,\varphi = a\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,;$$

charakteristika na obalovém válci hoví rovnici

(10) $$-\,k\,z\,cos\,\varphi = a\,cos\,2\,\varphi,$$

t. j.

$$z = \frac{a'}{cos\,\varphi} - 2\,a'\,cos\,\varphi,\quad y = a\,tg\,\varphi - a\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi,$$

$a' = a\,tg\,\alpha$. Při parametru $tg\,\dfrac{\varphi}{2} = t$ se to vyjádří

$$z = a\,\frac{t^4 - 4\,t^2 + 1}{t^4 - 1}\,tg\,\alpha,\quad y = 2\,a\,\frac{t^5 - 2\,t^3}{t^4 - 1},$$

t. j. stopa vepsaného válce (obrysová čára v $O\,y\,z$) směru $O\,x$ na rovině $y\,z$ je čára stupně 5, třídy 4, rodu 0.

Pro dotykovou čáru na ploše sborcené máme z (10)

$$v\,cos\,\alpha = -\,a\,\frac{cos\,2\,\varphi}{cos\,\varphi},$$

tedy

$$r = a \cos \varphi + v \cos \alpha = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = a \sec \varphi - a \cos \varphi$$

jakožto polární rovnici půdorysu.

„Dotyková čára sborcené plochy s vepsaným válcem směru $O\,x$ promítá se do roviny $O\,x\,y$ v cissoidu Diokletovu."

Fokála plochy sborcené hoví rovnici

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

a rovnice (9) podává — při značení $tg\,\alpha = h$ —

$$(A\,D + a\,h^2\,C^2)^2 = (A^2 + C^2)\,(D^2 - a^2\,h^2\,C^2)\,;$$

po rozvinutí odštěpí se faktor C^2 a zbývá

(11) $$A^2 + (1 + h^2)\,C^2 + \frac{2}{a}\,A\,D - \frac{1}{a^2\,h^2}\,D^2 = 0, \quad h = tg\,\alpha.$$

Řešení $C = 0$ podává asymptotické roviny rovnoběžné s rovinama $y = \pm\, i\,x$, řešení (11) pak odpovídá *kruhu fokálnímu*

(11*) $$(x + a\,h^2)^2 + z^2 = a^2\,h^2\,(1 + h^2), \quad y = 0 \quad (h = tg\,\alpha).$$

Společné roviny tečné kruhu fokálního a kruhu úběžného obalují rozvinutelnou plochu fokální, jejíž kruh (11*) je dvojnou čarou.

Body fokálního kruhu mají tu vlastnost, že jsou vrcholy kuželů opsaných ploše sborcené, které protínají roviny kolmé na vrcholovou tečnu kruhu fokálního v cirkulárních čarách 4. stupně.

4. Orthogonální trajektorie přímek naší plochy sborcené hoví rovnici differencialní

$$\cos \alpha \cos \varphi\, d\,x + \cos \alpha \sin \varphi\, d\,y + \sin \alpha\, d\,z = 0,$$

ježto dle (1) jsou v našem případě $b = 0$ cosinusy směrné přímky na ploše

$$\cos \alpha \cos \varphi, \quad \cos \alpha \sin \varphi, \quad \sin \alpha.$$

Rovnici tu lze psáti

$$\frac{x\,d\,x + y\,d\,y}{r} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\,dv = 0,$$

první člen má hodnotu $d\,r$, takže integrál zní

$$r + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}\,v = \text{konst.};$$

tedy

$$v + a \cos \alpha \cos \varphi = C$$

je (při stálém C) rovnice pravoúhlých trajektorií plochy sborcené.

XXXVI.

V polárních souřadnicích r, φ jest rovnice její průmětu

$$r = a \cos\varphi + v \cos\alpha = C \cos\alpha + a \sin^2\alpha \cos\varphi,$$

t. j.

„Pravoúhlé trajektorie přímek plochy (P) se do roviny $O x y$ promítají v konchoidy kruhu

$$x^2 + y^2 = a \sin^2\alpha \, . \, x,$$

vzaté z pólu O."

Pro tečnou rovinu obdržíme obvyklým způsobem součinitele

$$\begin{aligned} A &= (a \cos 2\varphi + v \cos\alpha \cos\varphi) \sin\alpha \\ B &= (a \sin 2\varphi + v \cos\alpha \sin\varphi) \sin\alpha \\ C &= -(a \cos\varphi + v \cos\alpha) \cos\alpha = -r \cos\alpha, \end{aligned}$$

a rovnice roviny tečné bude

$$(12) \qquad A\left(x - \frac{a}{2}\right) + B y + C z = \frac{a \sin\alpha}{2} (a + v \cos\alpha \cos\varphi).$$

Asymptotická rovina ($v = \infty$) má tedy rovnici

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) \sin\alpha \cos\varphi + y \sin\alpha \sin\varphi - z \cos\alpha = \frac{a}{2} \sin\alpha \cos\varphi,$$

j.

$$(13^a) \qquad (x - a) \cos\varphi + y \sin\varphi = z \cotg\alpha.$$

Rovina tato prochází bodem A, její stopa je kolmá na směr φ; při konstrukci bodu M na ploše isogonální vyskytne se jako rovina $A \sigma M$.

V parametru $u = e^{i\varphi}$ se rovnice tato dá psáti

$$(x - a - i y) u^2 - 2 u z \cotg\alpha + (x - a + i y) = 0,$$

z čehož vychází jako rovnice *asymptotického kužele*

$$(13) \qquad (x - a)^2 + y^2 = z^2 \cotg^2\alpha;$$

„asymptotická plocha rozvinutelná plochy (P) je tedy rotační kužel s vrcholem A a osou Az."

Tento kužel se plochy dotýká v úběžné kuželosečce a podél přímek torsálních, čímž všecky jeho body s ní společné jsou vyčerpány.

Buď v_0 parametr bodu na povrchové přímce (φ), jehož rovina tečná stojí kolmo na rovině asymptotické. Podmínka ta se dle (12) a (13^a) vyjádří rovnicí

$$A \cos\varphi + B \sin\varphi - C \cotg\alpha = 0,$$

čili po dosazení hodnot

$$\sin^2\alpha (a \cos\varphi + v_0 \cos\alpha) + \cos^2\alpha (a \cos\varphi + v_0 \cos\alpha) = 0,$$

t. j.

$$a \cos\varphi + v_0 \cos\alpha = 0,$$

čili $r = 0$, takže geometrickým místem centrálních bodů je osa $O z$:

XXXVI.

„Strikční čára plochy (P) splývá s její dvojnou přímkou."

Stopa tečné roviny na rovině $O\,x\,z$ má rovnici

$$(a \cos 2\varphi + v \cos\alpha \cos\varphi)\left(x - \frac{a}{2}\right) - (a \cos\varphi + v \cos\alpha)\, \operatorname{cotg} \alpha \,.\, z$$
$$= \frac{a}{2}\,(a + v \cos\alpha \cos\varphi)\,;$$

pro čáru $v =$ konst. patrně tato přímka obaluje kuželosečku; neboť můžeme rovnici seřadit dle mocnin $\cos\varphi$:

$$a\,(2\,x - a) \cos^2\varphi + \left[v \cos\alpha\left(x - \frac{a}{2}\right) - a\,z \operatorname{cotg}\alpha - \frac{a}{2}\,v \cos\alpha\right]\cos\varphi$$
$$- a\left(x - \frac{a}{2}\right) - v\,z \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha - \frac{a^2}{2} = 0,$$

a rovnice obalové čáry zní

$$[v\,(x - a) \cos\alpha - a\,z \operatorname{cotg}\alpha]^2 + 4\,a\,(2\,x - a)\,[a\,x + v\,z \cos\alpha \operatorname{cotg}\alpha] = 0.$$

Stejně nalezneme, že tečné roviny v bodech povrchové ellipsy

$$x^2 + y^2 = g^2$$

obalují rozvinutelnou plochu, jejíž stopa nárysná jest hyperbola

$$g^2\,(x - a)^2 + 4\,a\,x\,(a\,x + g\,k\,z) = 0, \qquad k = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Tečná rovina v bodě dvojné přímky na větvi obsahující přímku (φ) má rovnici

$$x \sin\varphi = y \cos\varphi\,;$$

horizontální řez bodem dotykovým leží na rovině

$$z = -\,a \cos\varphi \operatorname{tg}\alpha,$$

a tedy

„tečny v bodech dvojných (na $O\,z$) řezů $z =$ konst. tvoří konoid

$$(x^2 + y^2)\,z^2 = a^2 \operatorname{tg}^2\alpha\,.\,x^2."$$

Tečná rovina v bodě dvojného kruhu $(O\,A)$ má rovnici

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - k\,z \cos\varphi = \frac{a}{2}, \quad (k = \operatorname{cotg}\alpha)\,;$$

pro bod na úvratnici rozvinutelné plochy jí obalené máme ještě rovnice

$$-\,2\left(x - \frac{a}{2}\right)\sin 2\varphi + 2\,y \cos 2\varphi + k\,z \sin\varphi = 0,$$

$$-\,4\left(x - \frac{a}{2}\right)\cos 2\varphi - 4\,y \sin 2\varphi + k\,z \cos\varphi = 0.$$

XXXVI.

Z rovnic těchto plyne řešením

$$k z = -\frac{2}{3} a \sec \varphi,$$

$$x - \frac{a}{2} = -\frac{a}{12 \cos \varphi} (3 \cos \varphi - \cos 3 \varphi),$$

$$y = -\frac{a}{12 \cos \varphi} (3 \sin \varphi - \sin 3 \varphi),$$

jakožto parametrické vyjádření bodů na úvratnici.

Odtud vypočteme

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{12^2 \cos^2 \varphi} (10 - 6 \cos 2 \varphi) = \frac{a^2}{36 \cos^2 \varphi} (1 + 3 \sin^2 \varphi)$$
$$= \frac{a^2}{36} (4 \sec^2 \varphi - 3) = \frac{1}{4} k^2 z^2 - \frac{a^2}{12},$$

t. j. úvratnice leží na rotačním hyperboloidu dvojplochém

$$\frac{1}{4} k^2 z^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Hořejší výrazy dávají

$$x = \frac{a}{3} \cos^2 \varphi, \quad y = -\frac{a}{3} \frac{\sin^3 \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{a}{3} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi;$$

první rovnici přepišme na

$$x - \frac{a}{3} = -\frac{a}{3} \sin^2 \varphi = -\frac{a}{3} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \cos \varphi,$$

a odtud vysvitá, že průmět úvratnice uvažované jest cissoida Diokletova s asymptotou Oy a úvratníkem $x = \frac{a}{3}$, $y = 0$:

$$\left(x - \frac{a}{3}\right)^3 + x y^2 = 0.$$

Je-li $d\sigma$ differenciál oblouku na cissoidě a ds na úvratnici, máme při označení $c = \frac{a}{3}$:

$$d s^2 = d \sigma^2 + d z^2, \quad d \sigma^2 = c^2 tg^2 \varphi \left(3 + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) d \varphi^2,$$

$$-d z = 2 c \, tg \, \alpha \frac{\sin \varphi \, d \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad d s^2 = c^2 tg^2 \varphi \left(3 + \frac{1 + 4 tg^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\right) d \varphi^2,$$

$$s = c \int \sqrt{3 + \frac{1 + 4 tg^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}} \, tg \, \varphi \, d \varphi = -c \int \sqrt{1 + 4 tg^2 \alpha + 3 \cos^2 \varphi} \frac{d \cos \varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

XXXVI.

Částečná integrace podává vzorec

$$-\int \sqrt{m + n\,x^2}\,\frac{d\,x}{x^2} = \frac{1}{x}\sqrt{m + n\,x^2} - \int \frac{n\,d\,x}{\sqrt{m + n\,x^2}},$$

tedy v našem případě

$$s = \frac{c}{\cos\varphi}\sqrt{1 + 4\,tg^2\alpha + 3\cos^2\varphi} -$$

$$- c\sqrt{3}\,\log\left(\sqrt{3}\cos\varphi + \sqrt{1 + 4\,tg^2\alpha + 3\cos^2\varphi}\right) + \text{konst.};$$

při odvození nehleděno ke znamení $d\,s$, a druhá jeho forma

$$c\sqrt{1 + 4\,tg^2\alpha + 3\cos^2\varphi}\,\frac{\sin\varphi\,d\,\varphi}{\cos^2\varphi}$$

je kladná (při $d\,\varphi > 0$) v mezích $0 < \varphi < \pi$. Ježto však čára stoupá neb klesá do nekonečna pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi = \frac{3\,\pi}{2}$, je nutno rozeznávati kvadranty

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right), \quad \left(\frac{3\,\pi}{2}, 2\,\pi\right).$$

5. Naši sborcenou plochu (P)

$$(x^2 + y^2 - a\,x)^2 = k^2 z^2 (x^2 + y^2), \quad k = cotg\,\alpha,$$

protne koule procházející dvojným kruhem

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\,x + 2\,n\,z$$

v čáře 4. stupně, jež hoví rovnici

$$(2\,n - z)^2 z^2 = k^2 z^2 (x^2 + y^2);$$

$z^2 = 0$ podává dvojný kruh a vlastní čára 4. st. leží na ploše

$$k^2 (x^2 + y^2) = (z - 2\,n)^2,$$

která je rotační kužel s osou $O\,z$, který má za vrchol druhý průsek koule a osy $O\,z$.

Uvažovaná průseč plochy (P) s koulí procházející její dvojným kruhem je tedy průseč této koule s rotačním kuželem, jehož vrchol leží na kouli.

Stereografický průmět čáry této vzatý z vrcholu kužele je tedy kuželosečka.

Náš kužel má přímky kolmé na přímkách plochy. Protíná plochu (P) ještě v jedné čáře 4. stupně, která leží na rotačním hyperboloidu soustředném s koulí a obsahujícím dvojný kruh

$$x^2 + y^2 - z^2 = a\,x - 2\,n\,z,$$

vytvořeném rotací hyperboly rovnostranné; rovnici jeho lze psáti

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - (z - n)^2 = \frac{a^2}{4} - n^2;$$

pro $n = \frac{a}{2}$ se tato plocha redukuje na kužel.

Svazek ploch určený kuželem a hyperboloidem

$$(k^2 + \lambda)(x^2 + y^2) - (\lambda + 1) z^2 = \lambda a x - (4 + 2\lambda) n z + 4 n^2$$

obsahuje kouli příslušnou k hodnotě

$$\lambda = -\frac{1 + k^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 + k^2}{1 - k^2} a x + 2 \frac{3 - k^2}{1 - k^2} n z - \frac{8 n^2}{1 - k^2}$$

takže také druhá část průseče kužele s plochou (P) je čára sférická.

Rotační plocha druhého stupně obsahující kruh $(O A)$ má rovnici

(α) $$(x^2 + y^2 - a x) + m z^2 - 2 n z = 0;$$

její průseč s plochou (P) leží tedy na rotačním kuželi

(α') $$(2 n - m z)^2 = k^2 (x^2 + y^2),$$

jenž protíná plochu (P) v další čáře ležící na ploše rotační

(β) $$x^2 + y^2 - a x = m z^2 - 2 n z,$$

která má s původní plochou (α) společný střed a kruh $(O A)$.

Rotační plochy 2. stupně jdoucí kruhem $(O A)$ se tedy řadí v páry, jež sekou plochu (P) ve dvou křivkách na společném rotačním kuželi. Vrchol rotačního kužele leží na přímce dvojné $O z$.

Každý rotační kužel, jehož osa je v přímce dvojné, protíná plochu (P) ve dvou čarách stupně 4., jimiž lze vésti vždy jednu plochu rotační obsahující dvojný kruh.

Plocha (α) sama je kuželem při hodnotách hovících podmínce

(γ) $$\frac{a^2}{4} + \frac{n^2}{m} = 0.$$

Položme $n = m p$, takže rovnice kužele (α') bude

$$k^2 (x^2 + y^2) = m^2 (z - 2 p)^2,$$

kdež p určuje polohu vrcholu a m závisí pouze na úhlu stran s osou; podmínka (γ) nabude tvaru

$$m = -\frac{a^2}{4 p^2},$$

takže rotační kužel (α') vznikne otáčením přímky

$$4\,k\,p^2\,x + a^2\,(z - 2\,p) = 0$$

kolem osy $O\,z$. Tyto přímky v rovině $O\,x\,z$ obalují rovnostrannou hyperbolu

$$(\gamma^*) \qquad 4\,k\,x\,z = a^2.$$

„Kužely, jež vzniknou otáčením tečen hyperboly (γ^*) kolem osy $O\,z$, protínají plochu (P) ve dvou čarách 4. stupně, z nichž jedna leží na rotačním kuželi jdoucím kruhem dvojným $(O\,A)$.“

Vra[me se k rotačním plochám (α), (α'). Tyto plochy určují svazek ploch 2. stupně

$$(k^2 + \lambda)\,(x^2 + y^2) + m\,(\lambda - m)\,z^2 + \ldots = 0;$$

v tomto svazku obsažena jest koule a přísluší k hodnotě λ určené rovnicí

$$k^2 + \lambda = m\,(\lambda - m), \quad \lambda = \frac{k^2 + m^2}{m - 1};$$

rovnice koule zní pak

$$(\Sigma) \qquad m\,(\lambda - m)\,(x^2 + y^2 + z^2) - \lambda\,a\,x - 2\,n\,(\lambda - 2\,m)\,z = 4\,n^2.$$

Tečná rovina koule ve vrcholu kužele (α'), t. j. v bodě $\left(0,\,0,\,\frac{2\,n}{m}\right)$ má rovnici

$$-\frac{1}{2}\,a\,X + n\,Z = \frac{2\,n^2}{m};$$

její stopa

$$X = -\frac{4\,n^2}{a\,m}$$

dotýká se stopy kužele (α')

$$x^2 + y^2 = \frac{4\,n^2}{k^2},$$

je-li splněna podmínka

$$\frac{4\,n^2}{a\,m} = \pm\frac{2\,n}{k},$$

t. j.

$$\frac{2\,n}{m} = \pm\,a\,tg\,\alpha = \pm\frac{a}{k}.$$

To znamená, že vrchol kužele (α') je v tomto případě jedním z bodů kuspidálních, v nichž torsální přímky protínají přímku dvojnou.

Rovnice koule Σ pak po dosazení této hodnoty n a hořejší hodnoty λ obdrží tvar

$$(\Sigma^*) \qquad m\,(k^2 + m)\,(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$= a\,(k^2 + m^2)\,x \pm \frac{a\,m}{k}\,(k^2 - m^2 + 2\,m)\,z + \frac{a^2\,m^2\,(m - 1)}{k^2}.$$

XXXVI.

Průseč rotačního kužele s koulí, která se ho ve vrcholu dotýká, jest však sférická kotálnice (epicykloida sf.) 4. stupně, která vznikne při kotálení kruhu po kruhu pevném stejně velikém s podmínkou, aby rovina hybného kruhu svírala s rovinou kruhu pevného stálý úhel, t. j. sama obalovala rotační kužel obsahující pevný kruh. Čára jest opsána určitým bodem hybného kruhu, a počáteční poloha tohoto bodu, kdy tento bod leží na kruhu pevném, jest úvratníkem čáry.

Pevný kruh je průseč koule s rovinou vedenou vrcholem sečného kužele kolmo na jeho osu, počáteční poloha hybného bodu je vrchol kužele, stálý sklon hybné roviny s rovinou pevnou rovná se úhlu, jejž svírají diametrálně protilehlé strany kužele sečného.

V našem případě, kdy vrchol je

$$x = 0 = y, \quad z = \pm \frac{a}{k}$$

(tečná rovina koule v něm jest

$$k\,x + \frac{a\,m}{k} = \pm\, m\,z),$$

znějí *rovnice pevného kruhu* (k)

$$z = \pm \frac{a}{k}, \quad m\,(k^2 + m)\,(x^2 + y^2) = a\,(k^2 + m^2)\,x.$$

Zvolíme-li tento základní kruh

$$x^2 + y^2 = b\,x,$$

bude tím dána pro konstantu m rovnice

$$(a - b)\,m^2 - b\,k^2\,m + a\,k^2 = 0$$

mající dvé řešení, a tedy budou existovati dva kužely uvažovaného typu, každý určí příslušnou kouli a kotálnici.

Kterémukoli z obou kuspidálních bodů V (jako vrcholu rotačního kužele) přísluší tedy dvě kotálnice 4. stupně, jež jsou odvozeny z pevného kruhu libovolného poloměru $\frac{1}{2}\,b$, jinými slovy:

„Plocha kotálnic 4. stupně mající svůj singulární bod v bodě kuspidálním V plochy (P), jejíž rovina symetrie je zároveň rovinou symetrie $A\,O\,z$ této plochy, a jejíž centrální kruh je v rovině kolmé na přímku dvojnou plochy (P), protíná tuto plochu m. j. ve dvou sférických kotálnicích."

Středy koulí (Σ^*) leží v rovině $O\,x\,z$ a naplňují dvě racionální čáry stupně 3; omezíme-li se na vrchní znamení, máme jakožto body jedné z těchto čar

$$x = a\,\frac{k^2 + m^2}{2\,m\,(k^2 + m)}, \quad k\,z = a\,\frac{k^2 - m^2 + 2\,m}{2\,(k^2 + m)},$$

pro druhou čáru třeba pouze změniti znamení veličiny k.

Eliminací máme nejprvé

$$m = \frac{a - k z}{x},$$

načež rovnice křivky bude

$$(2 x - a) (k z - a)^2 = k^2 x^2 (2 k z - a).$$

Tato křivka vztahuje se ke koulím procházejícím bodem

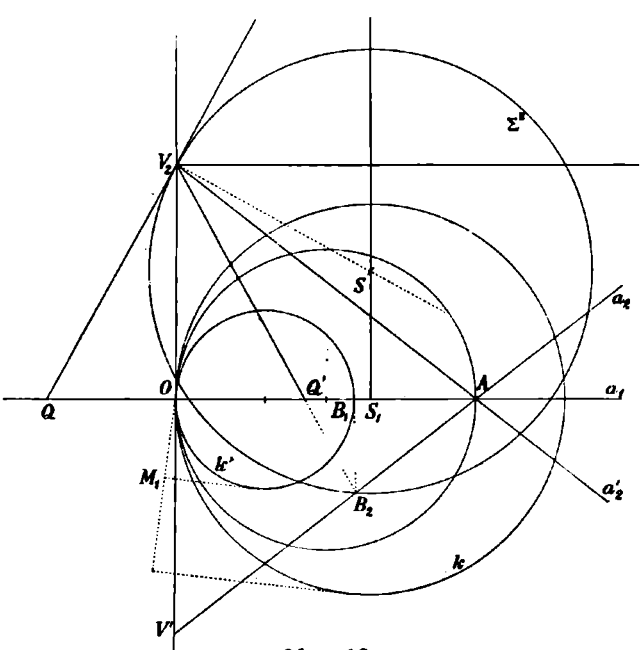
$$x = 0 = y, \quad z = \frac{a}{k};$$

pro druhý vrchol mění se jen znamení čísla k.

Touto křivkou jsou veškery koule uvažované řady určeny a s nimi také kužely, jež na nich vytínají sférické kotálnice stupně 4., ležící na naší ploše (P).

Průmětem sférické kotálnice uvažovaného typu do roviny základní jest kardioida mající dvojný bod (úvrat) O, vratní tečnu $O x$, a je tato kardioida úpatnicí jistého kruhu (k') procházejícího pólem O, a jehož střed leží na $O x$.

Můžeme vyjíti od libovolné kardioidy v rovině $x y$, jejíž úvratník jest O a jeho tečna $O x$; z předchozích výsledků plyne, že tato kardioida bude průmětem dvou sférických kotálnic 4. stupně, vůči rovině $x y$ navzájem souměrně ležících.



Obr. 13.

V obr. 13. dána plocha (P) základním (dvojným) kruhem $(O A)$ a torsálníma přímkama a, a'; dále dán libovolný rotační kužel s vrcholem v kuspidálním bodě V na a', svým průřezem $Q V Q'$ s rovinou nárysnou $x z$.

Přímka torsální a seče kužel v bodě B na nárysně, na přímce $V Q'$. Jeho půdorys B_1 náleží půdorysu průseče, i bude kruh $(O B_1)$ nad průměrem $O B_1$ oním kruhem $(k'$, jehož jest průmět proniku úpatnicí.

Koule Σ má svůj střed S v nárysně na přímce $V S$ kolmé na stranu kužele $V Q$, mimo to obsahuje bod B; tím určen střed S a koule Σ sama. Nárysná její stopa Σ^{II} je kruh o středu S a poloměru $V S$.

Pevný kruh (k) sloužící za základ k tvoření sférické kotálnice má za průmět kruh k o středu S_1 a poloměru $O\,S_1$; stálý sklon hybné roviny je roven úhlu $Q\,V\,Q'$.

Kdybychom vyšli z dané kardioidy, určili bychom její protiúpatní kruh (k'), jenž pak stanoví bod B_1 a tedy $B_2 \equiv B$ na a_2; přímka $B_2\,V$ je pak nárys strany kužele, čímž tento určen. Tento postup podává při daném V jen jeden kužel, problém jest jednoznačný.

Naproti tomu vycházejíce z daného kužele dospíváme ku dvěma koulím, vymění-li se body Q a Q'. Druhá koule Σ' dotýká se kužele ve vrcholu, a sice je druhá stopa tečné roviny v přímce $V\,Q'$.

Tím ukázáno, že

„rotační kužely s osou $O\,z$ a vrcholem v kuspidálním bodě protínají plochu (P) ve dvou sférických kotálnicích 4. stupně.“

V krajním případě, kdy sečný kužel je rovnoběžný s kuželem asymptotickým, zvrhá se druhá část průseče v úběžnou kuželosečku a v torsální přímku dvakrát vzatou.

Výše (č. 4) jsme viděli, že průměty pravoúhlých trajektorií přímek plochy (P) jsou konchoidy kruhu

$$x^2 + y^2 = a \sin^2 \alpha \,.\, x,$$

vzaté z pólu O; mezi nimi je též kardioida v uvažované poloze, a sice odpovídá kruhu (k') o poloměru $a \sin^2 \alpha$; tedy

„na ploše (P) leží kotálnice 4. stupně, která je pravoúhlou trajektorií přímek; příslušný kužel s vrcholem V bude určen přímkou $V\,Q'$ kolmou na torsální přímku a.“

Je-li totiž $V_2\,B_2 \perp a_2$, bude (obr. 13)

$$V'\,B_2 = V'\,V_2 \,.\, \sin \alpha, \quad O\,B_1 = V'\,B_2 \,.\, \cos \alpha, \quad V'\,V_2 = 2\,a\,tg\,\alpha,$$

tedy

$$O\,B_1 = 2\,a \sin^2 \alpha,$$

čímž tvrzení dokázáno.

Tu bude pak $V\,Q \perp A\,V$, tedy bod S padne na $A\,V$ a sice doprostřed, poněvadž trojúhelník $V\,B\,A$ je pravoúhlý; v našem případě tedy délka $A\,V$ je průměrem koule Σ. Pevný kruh je shodný se svým průmětem, který zde splývá s kruhem dvojným $(O\,A)$.

Plocha (P) je tedy geometrickým místem normál sférické kotálnice 4. stupně, které protínají kruh její koule shodný a rovnoběžný s její kruhem pevným.

Pro pravoúhlé trajektorie přímek jsme nalezli (č. 4.)

$$v = C - a \cos \alpha \cos \varphi,$$

průvodič průmětu a výška bodu jsou

$$r = a \cos \varphi + v \cos \alpha, \quad z = v \sin \alpha,$$

tedy po dosazení hodnot obdržíme pro souřadnice bodu na trajektorii

$$x = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)\cos^2\varphi + C\cos\alpha\cos\varphi,$$

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)\cos\varphi\sin\varphi + C\cos\alpha\sin\varphi,$$

$$z = -\frac{a}{2}\sin 2\alpha\cos\varphi + C\sin\alpha;$$

klademe-li

$$C\cos\alpha = a\sin^2\alpha,$$

obdržíme naši trajektorii zvláštní:

$$x = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos\varphi)\sin\varphi,$$

$$z - a\,tg\,\alpha = -\frac{a}{2}\sin 2\alpha\,(1 + \cos\varphi),$$

ze kterýchžto rovnic je zřejmo, že uvažovaná čára je sférickou kotálnicí stupně 4., příslušnou k pevnému kruhu na válci $(O\,A)$ v rovině $z = a\,tg\,\alpha$, při čemž stálý úhel sklonu $= -2\alpha$; a sice jest bodu φ přiřaděn odvalený úhel $\varphi - \pi$. Kotálnice leží pod rovinou pevného kruhu.

Pro druhý bod kuspidální $z = -a\,tg\,\alpha$ uvažme, že nalezená délka průvodiče $O\,B_1 = 2\,a\sin^2\alpha$ odpovídá také hodnotám

$$\varphi = \pi, \quad x = a\sin^2\alpha - C\cos\alpha,$$

tedy

$$C\cos\alpha = -a\sin^2\alpha,$$

a pro tuto hodnotu konstanty C rovnice trajektorie budou

$$x = -\frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)(1 - \cos\varphi)\cos\varphi,$$

$$y = -\frac{a}{2}(1 - \cos 2\alpha)(1 - \cos\varphi)\sin\varphi,$$

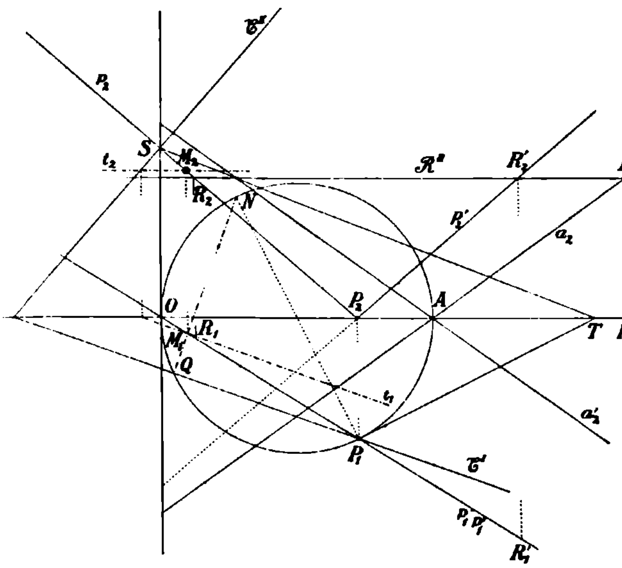
$$z + a\,tg\,\alpha = \frac{a}{2}\sin 2\alpha\,(1 - \cos\varphi),$$

a tato kotálnice leží nad rovinou pevného kruhu. Tímto vyjádřením zvláštní trajektorie hořejší tvrzení přímo verifikováno a z části doplněno.

Výše dokázaná povaha řezů $z =$ konst. je vhodným prostředkem konstruktivním jak pro sestrojení průmětů povrchových přímek p, tak pro konstrukci tečných rovin.

V obrazci 14. je dána plocha (P) dvojným kruhem $(O\,A)$ a přímkama torsálníma a, a'. Vedeme rovinu $\mathfrak{R}$ rovnoběžnou s $O\,x\,y$, její průsek K s torsální přímkou udává délku stálou $A\,K$ a její průmět $A\,K_1$, kterou vytínají povrchové přímky p mezi rovinama $O\,x\,y$ a $\mathfrak{R}$. Je-li dán průmět první $p_1 \equiv O\,P_1$ přímky p, naneseme na průmět délky $P_1\,R_1 = P_1\,R_1' = A\,K_1$, načež stanovíme nárysné průměty R_2, R_2' na stopě $\mathfrak{R}^{II}$, a průmět P_2 na $O\,A$; přímky $P_2\,R_2 \equiv p_2$, $P_2\,R_2' \equiv p_2'$ jsou nárysy obou přímek p, p' majících daný půdorys p_1.

Buď nyní dán bod M (M_1, M_2) přímky p; vedená jím rovina z = konst seče plochu v konchoidě kruhu ležícího na válci ($O\,A$), shodné se svým půdorysem. Polární subnormála konchoidy v průmětně splývá s polární subnormálou kruhu základního ($O\,A$) pro bod P_1, kterážto má



Obr. 14.

hodnotu $O\,N$, je-li N diametrální protějšek bodu P_1 na tomto kruhu; normála konchoidy je tedy přímka $N\,M_1$, a tečna promítnuté konchoidy $M_1\,t_1$ stojí kolmo na $N\,M_1$. Tečná rovina $\mathfrak{T}$ plochy (P) v bodě M obsahuje tečnu konchoidy t a přímku p; její půdorysná stopa $\mathfrak{T}^I$ obsahuje stopu P přímky p a je rovnoběžná s přímkou t_1; je tedy $\mathfrak{T}^I$ kolmice spuštěná z bodu P_1 na přímku $N\,M_1$, t. j. *stopa* $\mathfrak{T}^I$ *spojuje bod* P_1 *s bodem* Q, *v němž* $N\,M_1$ *seče kruh* ($O\,A$).

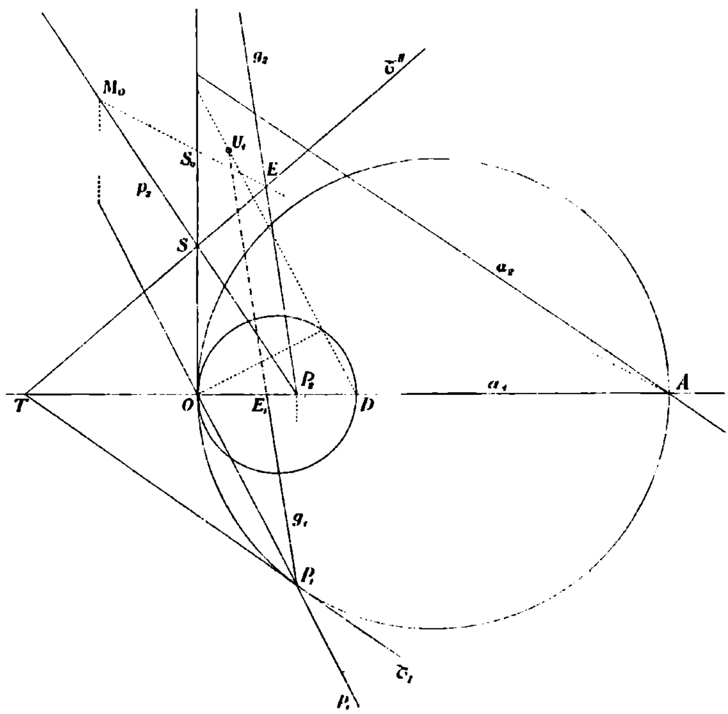
Nárysná stopa $\mathfrak{T}^{II}$ tečné roviny pak určena nárysnou stopou přímky p, jež leží na $O\,z$, t. j. bodem S.

Libovolně danou přímku $\mathfrak{T}^I$ v půdorysně, která seče dvojný kruh ($O\,A$) v realných bodech, možno považovati za stopu určitých čtyř rovin tečných. Jeden z obou průseků těchto Q určuje kolmicí $Q\,N$ na $\mathfrak{T}^I$ bod N, načež druhý průsek P_1 podává stopu přímky p a určuje její průmět $p_1 \equiv O\,P_1$; v průseku přímky p_1 s $Q\,N$ leží M_1, půdorys tečného bodu M a zároveň druhého bodu M' na druhé přímce p'.

Vyměníme-li body Q a P_1, obdržíme druhý pár tečných bodů. — Zvolíme-li za M úběžný bod přímky p, bude $N\,M_1 \parallel O\,P_1$ obsahovati bod A, bod Q splyne s bodem A, a bude $\mathfrak{S}^I$ procházeti pevným bodem A; odtud bezprostředně vlastnost asymptotických rovin jako tečných rotačního kužele s vrcholem A.

Tečné roviny v bodě P na dvojném kruhu podají $Q \equiv P_1$, stopa $\mathfrak{S}^I \equiv P_1 Q$ přejde v tečnu kruhu $(O\,A)$ v bodě P.

Předpokládejme nyní, že přímka (obr. 15.) $M_0 P_2 S$ otáčí se kol pevného bodu M_0; průsekem P_2 s osou $O\,x$ veďme $P_2 P_1 \perp O\,x$, a veďme tečnu $P_1 T$ kruhu $(O\,A)$; přímka $S\,T$ spojující její průsek T na $O\,x$ se stopou S první přímky na $O\,z$ prochází pevným bodem E $(x_1\, z_1)$. Neboť řady (S) a (P_2) jsou v perspektivní poloze, řady (P_2) a (T) jsou promětny;



Obr. 15.

tudíž jsou řady (S) a (T) promětny, a volba $P_1 \equiv O$ ukazuje, že tyto řady mají společný prvek, a jsou tudíž v poloze perspektivní.

Položme P_1 do A, přímka $M_0 P_2$ padne do $A\,M_0$, současně octne se bod T v poloze A, takže $T\,S$ octne se v poloze $A\,M_0$, ježto S přijde do S_0 na této přímce. Bod E leží tedy na $A\,M_0$. Současně platí rovnost dvojpoměrů $(A\,S_0\,M_0\,E) = (A\,O\,P_2\,T) = -1$ (bod P_2 leží na poláře bodu T), a tedy nacházíme involutorní kollineaci mezi body M_0 a E, které ležíce na paprscích svazku (A) oddělují harmonicky bod A od přímky $O\,z$.

Jsou-li $x_0 z_0$ souřadnice bodu M_0, $x_1 z_1$ souřadnice bodu E máme

$$\left(x_0 - \frac{a}{2}\right)\left(x_1 - \frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}, \quad \frac{x_0 - a}{z_0} = \frac{x_1 - a}{z_1},$$

čili

$$x_0 = \frac{a x_1}{2 x_1 - a}, \quad y_0 = -\frac{a z_1}{2 x_1 - a}.$$

Šine-li se nyní bod P_1 po kruhu $(O A)$ do polohy nekonečně blízké, otáčí se přímka $p_2 \equiv P_2 S$ kolem bodu $x_0 y_0$ na obrysové parabole, a přímka ST se dle předeslané právě úvahy otáčí kolem bodu $E\ (x_1 y_1)$. Ježto ST je nárysná stopa tečné roviny plochy (P) v bodě P na kruhu dvojném, leží bod E na obalové čáře této přímky, t. j. *bod E opisuje nárysnou stopu rozvinutelné plochy, kterou obalují tečné roviny v bodech dvojného kruhu.*

Přímka $g \equiv P E$ je povrchovou přímkou této plochy.

Rovnice obrysové paraboly zní

$$z_0^2 + 4\, a\, x_0\, tg^2\, \alpha = 0,$$

a naše kollinární transformace dává pro čáru (E) rovnici

$$z_1^2 + 4\, tg^2\, \alpha\, (2\, x_1^2 - a\, x_1) = 0,$$

takže čára ta jest ellipsou

(8) $$\frac{1}{8} k^2 z^2 + \left(x - \frac{a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{16}, \quad (k = cotg\, \alpha).$$

K témuž výsledku vede rovnice nárysné stopy tečné roviny v uvažovaných bodech P, která zní

$$\left(x - \frac{a}{2}\right) cos\, 2\, \varphi - k\, z\, cos\, \varphi = \frac{a}{2}.$$

Jak bylo výše ukázáno, musí $g_1 = P_1 E_1$ býti tečnou Diokletovy cissoidy s úvratníkem $x = \frac{a}{3}$ na $O x$ a s asymptotou $O y$; v obr. 15. značili jsme U_1 bod cissoidy příslušný ke směru $O P_1$ $\left(O D = \frac{a}{3},\ D U_1 \parallel O P_1\right)$. Užití cissoidy za okolností uplatnivších se u výkresu je po stránce přesnosti výhodné.

6. Uvažujme řez plochy (P)

$$(x^2 + y^2 - a\, x)^2 = k^2 z^2 (x^2 + y^2) \quad (k = cotg\, \alpha)$$

s rovinou

(1) $$z = L \equiv l\, x + m\, y + n.$$

Průmět řezu má rovnici

(2) $$K^2 = k^2 L^2 V, \quad K \equiv x^2 + y^2 - a\, x, \quad V = x^2 + y^2;$$

jeho body dvojné jsou jednak průseky stopy sečné roviny $L = 0$ s kruhem dvojným $K = 0$, jednak bod O jakožto průmět dvojného bodu na přímce dvojné Oz.

Differencování rovnice (2) podá

$$K\,dK = k^2 V L\,dL + k^2 L^2 (x\,dx + y\,dy)\,;$$

rovnice je splněna identicky pro body $K = 0$, $L = 0$ na kruhu dvojném, a opětné differencování podá rovnici platnou výhradně na těchto místech

$$dK^2 = k^2 V\,dL^2\,;$$

výraz $V = r^2$ je čtverec vzdálenosti singularního bodu od počátku O, máme tedy

$$dK = \pm k r\,dL,$$

t. j.

$$2x\,dx + 2y\,dy - a\,dx = \pm k r (l\,dx + m\,dy)$$

aneb

$$(2x - a \mp k l r)\,dx + (2y \mp k m r)\,dy = 0, \tag{3}$$

kterážto rovnice při interpretaci differenciálů jako přírůstků na tečně

$$dx = X - x, \quad dy = Y - y$$

je zároveň rovnicí tečen v bodě dvojném průmětu.

Podržíme-li stálé hodnoty l, m, a dosadíme-li hodnotu z rovnice dvojného kruhu $r = a\cos\varphi$, obdržíme

$$(\cos 2\varphi \mp k l \cos\varphi)\,X + (\sin 2\varphi \mp k m \cos\varphi)\,Y = \\ = a\cos\varphi\,[\cos\varphi \mp k(l\cos^2\varphi + m\sin^2\varphi)], \tag{3*}$$

jako dvě řady přímek, tečných ve dvojných bodech průmětů řezů s rovnoběžnými rovinami.

Aby tečny průmětu v bodě dvojném stály na sobě kolmo, musí dle (3)

$$(2x - a)^2 + 4y^2 - k^2 r^2 (l^2 + m^2) = 0,$$

čili ježto

$$r^2 - a x = 0,$$

$$k^2 (l^2 + m^2)\,r^2 = a^2, \tag{4}$$

což lze též psáti

$$k^2 (l^2 + m^2)\,x = a, \tag{4¹}$$

při čemž r a x vztahují se k bodu průsečnému roviny s kruhem (OA).

Značí-li γ úhel roviny sečné s rovinou xy, je

$$l^2 + m^2 = tg^2\gamma,$$

a máme tedy podmínku orthogonality tečen ve dvojném bodě průmětu ve tvaru

$$r = \pm a\,tg\,\alpha\,cotg\,\gamma, \quad x = a\,tg^2\alpha\,cotg^2\gamma, \tag{4²}$$

aneb pro polární úhel φ bodu dvojného

$$(4^3)\qquad \cos\varphi = \pm\, tg\,\alpha\, cotg\,\gamma .$$

Zvolíme-li γ, obdržíme dva body na kruhu $(O\,A)$, a každým z nich prochází nekonečně mnoho rovin obalujících rotační kužel, které mají tu vlastnost, že tečny ve dvojném bodě průmětu řezu stojí na sobě kolmo.

Tečná rovina v bodě $(\psi,\, v)$

$$A\left(x - \frac{a}{2}\right) + B\,y + C\,z = \frac{a\sin\alpha}{2}\,(a + v\cos\alpha\cos\psi)$$

protíná kruh $(O\,A)$ v bodě φ, pro nějž platí

$$A\cos 2\,\varphi + B\sin 2\,\varphi = \sin\alpha\,(a + v\cos\alpha\cos\psi)\,;$$

t. j. při hodnotách A, B závislých na úhlu ψ

$$a\cos 2\,(\varphi - \psi) + v\cos\alpha\cos(\psi - 2\,\varphi) = a + v\cos\alpha\cos\psi\,;$$

můžeme voliti φ, ψ neodvisle, načež tato rovnice určuje v, t. j.

$$(5)\qquad v\cos\alpha = \frac{a\sin(\psi - \varphi)}{\sin\varphi}\,,$$

výraz pro vzdálenost v na přímce ψ, kterou se určuje dotykový bod na ploše s rovinou procházející bodem φ na kruhu $(O\,A)$.

Aby dále tečny dvojného bodu φ měly průměty na sobě kolmé, musí dle (4^3)

$$k^2\cos^2\varphi = \frac{C^2}{A^2 + B^2} = k^2\,\frac{(a\cos\psi + v\cos\alpha)^2}{a^2 + v^2\cos^2\alpha + 2\,a\,v\cos\alpha\cos\psi}\,,$$

t. j.

$$a^2 + v^2\cos^2\alpha + 2\,a\,v\cos\alpha\cos\psi = \left(\frac{a\cos\psi + v\cos\alpha}{\cos\varphi}\right)^2;$$

vložíme-li sem za $v\cos\alpha$ hodnotu (5), vyjde nejprvé

$$\sin^2\varphi + \sin^2(\psi - \varphi) + 2\sin\varphi\cos\psi\sin(\psi - \varphi)$$
$$= \left(\frac{\sin\varphi\cos\psi + \sin(\psi - \varphi)}{\cos\varphi}\right)^2 = \sin^2\psi\,,$$

a ježto

$$\sin^2\psi - \sin^2\varphi = \sin(\psi - \varphi)\sin(\psi + \varphi),$$

je poslední vztah splněn pro všecka φ a ψ, t. j. orthogonalita tečen dvojných bodů průmětu je zajištěna pro všechny řezy s rovinami tečnými.

Cirkulární čára 3. stupně, jejíž tečny v bodě dvojném stojí na sobě kolmo, je strofoida. Rovinné řezy plochy (P) se promítají v čáry cirkulární, a tedy:

„Tečné roviny plochy (P) ji protínají v čarách stupně třetího, jež se do roviny $x\,y$ promítají ve strofoidy.“

XXXVI.

K témuž výsledku dospějeme pomocí tangenciálních souřadnic na základě rovnice (4[1])

$$x = \frac{a\, tg^2 \alpha}{l^2 + m^2},$$

k níž se pojí vztahy

$$x^2 + y^2 = a\, x, \quad l\, x + m\, y + n = 0.$$

Z posledních dvou máme

$$m^2\, a\, x = m^2\, x^2 + (l\, x + n)^2,$$

t. j.

$$m^2\, a\, x = (l^2 + m^2)\, x^2 + 2\, l\, n\, x + n^2;$$

dosadíme-li sem hodnotu x, obdržíme

$$\frac{a^2\, m^2\, tg^2 \alpha}{l^2 + m^2} = \frac{a^2\, tg^4 \alpha}{l^2 + m^2} + \frac{2\, a\, l\, n\, tg^2 \alpha}{l^2 + m^2} + n^2$$

čili

$$a^2\, m^2\, tg^2 \alpha - 2\, a\, l\, n\, tg^2 \alpha - a^2\, tg^4 \alpha = n^2\, (l^2 + m^2).$$

Pro rovinu řezu

$$u\, x + v\, y + w\, z + 1 = 0$$

však jest

$$l = -\frac{u}{w}, \quad m = -\frac{v}{w}, \quad n = -\frac{1}{w},$$

a po dosazení těchto hodnot poslední vztah nabývá tvaru

$$w^2\, (a^2\, v^2\, tg^2 \alpha - 2\, a\, u\, tg^2 \alpha - a^2\, w^2\, tg^4 \alpha) = u^2 + v^2$$

čili

$$(u + a\, tg^2 \alpha\, w^2)^2 + v^2\, (1 - a^2\, w^2\, tg^2 \alpha) = 0;$$

to je však rovnice (9), jíž hoví roviny tečné. Tím dokázán nanovo hořejší výsledek.

Rovnici průmětu řezu můžeme psáti

$$K = k\, r\, (l\, x + m\, y + n), \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

čili po zavedení polárních souřadnic r, φ:

$$r = \frac{k\, n + a \cos \varphi}{1 - k\, (l \cos \varphi + m \sin \varphi)}.$$

Rovnice $l^2 + m^2 = tg^2 \gamma$ umožňuje klásti

$$l = tg\, \gamma \cos \varkappa, \quad m = tg\, \gamma \sin \varkappa,$$

a úhel γ závisí pouze na poloze bodu dvojného φ_0, nikoli na rovině řezu, pokud se jedná o řezy s tečnými rovinami.

XXXVI.

A sice jest dle (4^3)

$$cotg\,\gamma = k\cos\varphi_0,\quad k\,tg\,\gamma = \frac{1}{\cos\varphi_0},$$

takže

$$k\,(l\cos\varphi + m\sin\varphi) = \frac{\cos(\varphi - \varkappa)}{\cos\varphi_0},$$

a polární rovnice průmětu bude

$$r = \frac{k\,n + a\cos\varphi}{\cos\varphi_0 - \cos(\varphi - \varkappa)}\cos\varphi_0\,.$$

Nekonečně vzdálený bod průmětu řezu odpovídá jedné z hodnot

$$\varphi = \varkappa \pm \varphi_0,$$

druhá musí dávati konečnou hodnotu r; ve zvláštním případě tečné roviny v bodě dvojném φ_0 obdržíme přímo z rovnice tečné roviny

$$k\,n = -a\cos\varphi_0,\quad \varkappa = 2\,\varphi_0,$$

tedy dlužno bráti znamení spodní pro bod v konečné vzdálenosti, a bude

$$k\,n + a\cos(\varkappa - \varphi_0) = 0,$$

takže rovnice čáry zní

$$r = a\cos\varphi_0\frac{\cos\varphi - \cos(\varkappa - \varphi_0)}{\cos\varphi_0 - \cos(\varphi - \varkappa)},$$

čili po redukci

$$(6)\qquad r = a\cos\varphi_0\,.\,\frac{\sin\dfrac{\varkappa + \varphi - \varphi_0}{2}}{\sin\dfrac{\varkappa + \varphi_0 - \varphi}{2}},$$

při čemž polární osa $O\,x$ a pól O, a φ_0 značí úhel polární dvojného bodu.

Úhel $\varkappa$ je dán, jakmile známe veličiny l, m, které závisejí na poloze roviny řezu, t. j. přímky obsahující tečný bod roviny a plochy; jsou-li tato přímka i bod známy, určuje předchozí rovnice hodnotu $\varkappa$ přímo.

Buď dán v souřadnicích pravoúhlých bod $\Delta\,(p,\,q)$, a veďme libovolnou přímku $O\,K$, její stopa na přímce $x = p$ buď K; délku $\Delta\,K$ nanesme na přímku $K\,O$ po obou stranách od bodu K, $K\,M_1 = K\,M_2$. Geometrické místo bodů M_1, M_2 je strofoida.

Znamenejme φ úhel přímky $O\,K$ s osou $O\,x$, bod K má souřadnice p, $p\,tg\,\varphi$, délka $\Delta\,K = q - p\,tg\,\varphi$; kruh o středu K a poloměru $\Delta\,K$ má rovnici

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,x - 2\,p\,y\,tg\,\varphi + p^2\sec^2\varphi - (q - p\,tg\,\varphi)^2 = 0,$$

a je sečen přímkou $O\,K$, t. j. $y = x\,tg\,\varphi$ v bodech M_1, M_2:

$$(x - p)^2 = (q\cos\varphi - p\sin\varphi)^2,$$

t. j.

$$x - p = \pm (q \cos \varphi - p \sin \varphi), \quad y = x \operatorname{tg} \varphi.$$

jest parametrické vyjádření strofoidy. Poněvadž spodní znamení se docílí substitucí $\varphi + \pi$ za φ, stačí uvažovati čáru

(7) $$x = p + q \cos \varphi - p \sin \varphi, \quad y = x \operatorname{tg} \varphi.$$

Pro její průvodič — polární úhel jest φ — máme

$$r = \frac{x}{\cos \varphi} = q + p \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = q + p \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)};$$

znamenáme-li $O\Delta = g$, úhel této přímky a osy pak β, bude

$$p = g \cos \beta, \quad q = g \sin \beta,$$

a tedy

(7^a) $$r = g \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = g \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}.$$

Při druhém znamení bychom obdrželi

(7^b) $$r = g \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)},$$

poněvadž tu průvodič vychází vzorcem

$$\frac{x}{\cos \varphi},$$

po změně φ na $\varphi + \pi$.

Položí-li se v rovnici (6)

$$\varphi = \left(\varkappa + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) + \psi,$$

vyjde tvar

$$r = g \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)}$$

s hodnotami

(8) $$g = a \cos \varphi_0, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \varkappa.$$

Pro úhel $\varkappa$ máme

$$tg\,\varkappa = \frac{m}{l} = \frac{B}{A},$$

kde A, B jsou koefficienty v rovnici roviny tečné; přísluší-li tato k úhlu φ_1, bude

$$\frac{B}{A} = \frac{a \sin 2\varphi_1 + v \cos \alpha \sin \varphi_1}{a \cos 2\varphi_1 + v \cos \alpha \cos \varphi_1},$$

při čemž dle (5)

$$v \cos \alpha = \frac{a \sin (\varphi_1 - \varphi_0)}{\sin \varphi_0};$$

po dosazení této hodnoty objeví se

$$(8^1) \qquad tg\,\varkappa = tg\,(\varphi_1 + \varphi_0),$$

a tedy

$$(8^2) \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi_1)\,.$$

Úhel mezi normálou řídící přímky $\overline{\varDelta K}$ a průvodičem dvojného bodu $\varDelta$ je tedy $\beta = \frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi_1)$, a úhel mezi přímkou řídící a průvodičem bodu dvojného tedy $\varphi_0 + \varphi_1$.

Budiž dán bod M; jeho tečnou rovinu určíme obvyklým způsobem (v. obr. 14.), její stopa $\mathfrak{T}^I$ protne kruh $(O\,A)$ v bodech P_1 na $O\,M_1$ a $\varDelta$; tento jest bod dvojný strofoidy.

Pro tuto obdržíme dva body určíce průseky roviny $\mathfrak{T}$ s torsálníma přímkama a, a'. Nárysy těchto přímek protne $\mathfrak{T}^{II}$ ve dvou bodech, jichž půdorysy leží na $O\,x$ a jsou to průseky osy $O\,x$ se strofoidou $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$. Střed těchto dvou bodů určuje řídící přímku (K) strofoidy, její pól jest O.

Půdorysná stopa torsálních rovin je společná, totiž kolmice v bodě A na $O\,x$ vztýčená; její průsek se stopou $\mathfrak{T}^I$ leží na obou tečnách řezu a jeho průmětu, tedy určuje tečny strofoidy v bodech $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$.

Tečny v bodě dvojném $\varDelta$ jsou průseče roviny $\mathfrak{T}$ s tečnýma rovinama plochy (P) v bodě $\varDelta$, jich půdorysy jsou tečny ve dvojném bodě strofoidy. Vedeme nárysné stopy obou těchto rovin $(\varDelta)$, $(\varDelta')$ a promítneme jich průseky se stopou $\mathfrak{T}^{II}$ do $O\,x$; průměty leží na tečnách strofoidy.

Strofoida prochází body M_1 a P_1, a jak ihned se ukáže, jest její tečna v bodě O symetrická s přímkou $O\,M_1$ vůči $O\,x$.

Rovnice (5) a úvahy předcházející ukazují, že tečné roviny procházející stálým bodem φ_0 na kruhu dvojném obalují rotační kužel s osou směru $O\,z$, a že parametrická rovnice dotykové čáry kužele a plochy (P) zní

$$v \cos \alpha = \frac{a \sin (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi_0};$$

úhel γ, jejž strany kužele svírají s rovinou $O\,x\,y$, je dán rovnicí

$$cotg\,\gamma = k \cos \varphi_0 = cotg\,\alpha \cos \varphi_0.$$

XXXVI.

Průvodič průmětu bodu na čáře dotykové

$$r = a \cos \varphi + v \cos \alpha = a \cos \varphi + a \frac{\sin (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi_0}$$

má hodnotu

$$r = a \operatorname{cotg} \varphi_0 \sin \varphi,$$

t. j.

„kužel opsaný ploše (P) z vrcholu φ_0 na dvojném kruhu jest rotační, a průmět dotykové čáry je kružnice

$$x^2 + y^2 = a\, y \operatorname{cotg} \varphi_0.\text{“}$$

Čára dotyková je hyppopéda, o níž byla výše (č. 1.) učiněna zmínka.

Chceme ještě určiti rovinné řezy, u nichž tečny dvojného bodu na kruhu dvojném splynou; rovnice (3*) nám podává

$$\frac{\cos 2\varphi + k\, l \cos \varphi}{\cos 2\varphi - k\, l \cos \varphi} = \frac{\sin 2\varphi + k\, m \cos \varphi}{\sin 2\varphi - k\, m \cos \varphi}$$

čili

$$\frac{k\, l \cos \varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{k\, m \cos \varphi}{\sin 2\varphi};$$

máme tedy

$$\frac{l}{\cos 2\varphi} = \frac{m}{\sin 2\varphi} = \pm \sqrt{l^2 + m^2} = \operatorname{tg} \gamma .$$

Aby rovina

$$z = \operatorname{tg} \gamma \cos 2\varphi \,.\, x + \operatorname{tg} \gamma \sin 2\varphi \,.\, y + n$$

obsahovala bod φ na kruhu dvojném, musí

$$-n = a \operatorname{tg} \gamma \cos^2 \varphi,$$

a tedy jest nejobecnější rovinný řez plochy (P), jehož tečny ve dvojném bodě φ na dvojném kruhu splývají, na rovině

$$z = \operatorname{tg} \gamma\, (x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi - a \cos^2 \varphi),$$

kde γ jest libovolný úhel; to jest však rovnice libovolné roviny tečné ke dvojnému kruhu $(O\,A)$. Řez takovéto roviny s plochou sborcenou je čára 4. stupně, mající v bodě φ bod samotyčný, platící za dva obyčejné body dvojné.

Buď nyní φ_0 bod na kruhu $(O\,A)$, v němž se rovina řezu dotýká tohoto kruhu, tedy rovina řezu

$$z = \operatorname{tg} \gamma\, (x \cos 2\varphi_0 + y \sin 2\varphi_0 - a \cos^2 \varphi_0),$$

rovnice řezu v průmětu zní

$$(9) \qquad (x^2 + y^2 - a\, x)^2 = h^2 (x^2 + y^2)(x \cos 2\varphi_0 + y \sin 2\varphi_0 - a \cos^2 \varphi_0)^2,$$

a v polárních souřadnicích r, φ $(x = r \cos \varphi,\ y = r \sin \varphi)$

$$r - a \cos \varphi = h\, [r \cos (\varphi - 2\varphi_0) - a \cos^2 \varphi_0].$$

XXXVI.

kde

$$h = \pm k \, tg \, \gamma,$$

t. j.

(10) $$r = a \frac{\cos\varphi - h \cos^2 \varphi_0}{1 - h \cos(\varphi - 2\varphi_0)}.$$

Zvětšíme-li úhel φ o π a změníme-li znamení r, obdržíme větev příslušnou k opačné hodnotě konstanty h, a tak se můžeme omeziti na tento tvar pro jediné h, abychom vyčerpali celou křivku.

V případě $\varphi_0 = 0$, π a $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ je čára naše fokální konchoida kuželosečky.*) V obecném případě můžeme provésti její konstrukci na základě rovnice (9)', která se geometricky interpretuje vzorcem

$$t^2 = h r \delta,$$

při čemž t je tangencialní vzdálenost bodu křivky M od kruhu $(O A)$, r průvodič $O M$, δ vzdálenost bodu M od tečny kruhu tohoto v daném bodě φ_0.

Nechť dále seče přímka $O M$ kruh $(O A)$ v bodě S; bude pak

$$t^2 = r s, \quad s = \overline{S M}$$

takže uvedený posledně vztah přejde na tvar

$$s = h \delta.$$

Abychom určili bod M ležící na daném paprsku $O S M$, vedeme kolmici $S K$ na pevnou tečnu (φ_0), a považujeme přímky $S M$, $S K$ za osy kosoúhlé soustavy souřadnic s a δ; poslední rovnice $s = h \delta$ určuje přímku $S N$ jdoucí počátkem S, jež protne tečnu v bodě N; kolmice $N M$ na tečnu v tomto bodě vztýčená stanoví bod M na $O S$.

Zvolíme-li bod φ_0 kruhu $O A$ za pól inverse, a provedeme-li vhodnou transformaci souřadnic, bude rovnice transformované čáry tvaru

$$x^2 + y^2 - p^2 = q^2 \left(\frac{x - b}{x - c}\right)^2.$$

Obraťme se nyní k stanovení tečen ve dvojném bodě O u průmětu řezu plochy (P) s rovinou

$$z = l x + m y + n;$$

dvojím differencováním obdržíme pro $x = 0$, $y = 0$

$$d K^2 = k^2 L^2 (d x^2 + d y^2),$$

t. j.

$$a^2 d x^2 = k^2 n^2 (d x^2 + d y^2), \quad k = cotg \, \alpha.$$

*) Výklad a literaturu viz F. G. Teixeira, Traité des courbes, I. díl, str. 312 a násl. Dle (10) vytvoří se čára jako cissoidála fokální konchoidy kuželosečky s Ponceletovou „capricorne" (Teixeira, II. díl, str. 387).

Odtud

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pm\sqrt{a^2 - k^2 n^2}}{kn};$$

tudíž tečny průmětu ve dvojném bodě O jsou vůči ose Ox vespolek symetrické, a jich poloha závisí pouze na n, t. j. na průseku roviny s osou Oz, a nikoli na směru roviny.

Zvláště máme pro $n = \pm\, a\, tg\, \alpha$ a pro $n = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\, a\, tg\, \alpha$.

„Řezy na rovinách procházejících jedním z kuspidálních bodu (na dvojné přímce a přímkách torsálních) mají v bodě kuspidálním úvrat."

„Řezy vedené jedním z bodů $(0, 0, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\, a\, tg\, \alpha)$ mají u průmětu tečny ve dvojném bodě O na sobě kolmé."

Jde-li rovina tečná tímto bodem, bude týž nárysnou stopou povrchové přímky; řez rozpadá se v přímku a čáru 3. stupně, průmět jeho ve přímku $O\varphi$ a strofoidu; obě čáry se protnou pod pravým úhlem, t. j. bude $\varphi = \pm 45^0$, a přímka $O\varphi$ bude normálou strofoidy. Roviny tečné této vlastnosti tedy tvoří svazek. Existují takové čtyři svazky rovin tečných, pro něž průměty řezů se v bodě O dotýkají jedné z přímek $x \pm y = 0$.

Zajímavé svým tvarem, méně svými vlastnostmi jsou řezy s rovinami kolmými na Oxy; zejména řezy s rovinami tečnými kruhového válce (OA) směru Oz, t. j. s rovinami

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi = a \cos^2 \varphi$$

se transformací

$$x \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi = \eta, \quad x \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi = \xi$$

převedou na

$$\eta = a \cos^2 \varphi, \quad z = \pm\, tg\, \alpha \frac{\left(\xi - \frac{a}{2} \sin 2\varphi\right)^2}{\sqrt{\xi^2 + a^2 \cos^4 \varphi}}.$$

Asymptoty této křivky

$$\pm\, kz = \xi - a \sin 2\varphi, \quad \eta = a \cos^2 \varphi$$

mají v původních souřadnicích rovnice

$$\begin{aligned} &(x - a) \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi = v \cos \alpha, \\ &(x - a) \cos 2\varphi + y \sin 2\varphi = a \sin^2 \varphi, \\ &z = \pm\, v \sin \alpha, \end{aligned}$$

kde parametr v zaveden k vůli symetrii. Odtud vypočteme

$$x + iy = a + e^{2i\varphi} (a \sin^2 \varphi - iv \cos \alpha).$$

XXXVI.

Stopy $v = 0$ těchto přímek opisují kardioidu

$$\varrho = \frac{a}{2}(1 - \cos \omega), \quad \omega = 2\varphi,$$

(pól A, osa $A\,x$), což vychází konstruktivní cestou bezprostředně.

Hledáme-li obecně asymptoty řezů, jichž roviny obalují válec směru $O\,z$, ukazuje konstrukce, že jich stopy opisují úpatnici základny válce, vzatou z pólu A.

Je-li válec kruhový s osou $A\,z$, jsou stopy asymptot na základně válce, a uvažované asymptoty tvoří rotační hyperboloid.

V případě, kdy řídící čára válce jest kuželosečka s ohniskem A, opisují stopy její vrcholovou kružnici (neb přímku), a asymptoty řezů jsou pak přímky v rovinách tečných válcové plochy 2. stupně, které protínají její základnu pod stálým úhlem a to na kružnici (přímce).

Redukuje-li se válec na přímku $O\,z$, základní kuželosečka na body O, A, jest úpatnice tečen z pólu A kruh $(O\,A)$, a tak se jeví plocha (P) jako velmi zvláštní případ sborcených ploch této kategorie, k nimž sama dává podnět.

Plochu (P) možno vytvořiti kinematicky. Uvažujeme pevnou osu $O\,z$ a rotační kužel (A), jehož osa je s touto rovnoběžna — t. j. náš kužel asymptotický. Šine-li se pak pravoúhlý dvojstěn tak, aby jedna stěna procházela osou $O\,z$ a druhá se dotýkala kužele (A), vytvoří hrana kužele P naši plochu (P).

Okamžitá osa otáčení o při tomto pohybu leží v normální rovině kužele příslušné k jeho straně tečné s rovinou dvojstěnu, dále v normální rovině kruhu $O\,A$ příslušné k patě hybné hrany σ, a také v rovině vedené osou $O\,z$ kolmo na hybnou stěnu; osa okamžitá o vytvoří tedy kruhový válec $(O\,A)$ směru $O\,z$.

Lze pak konstruktivně ukázati, že řezy kolmé na osu $O\,z$ jsou konchoidy kruhu $(O\,A)$ z pólu O.

Jiný způsob vytvoření plochy připomíná úpatnice. Šine-li se dvojstěn se stálým úhlem α tak, aby jedna stěna spočívala na rovině $O\,x\,y$, a jeho hrana procházela pevným bodem A, tu rovina vedená osou $O\,z$ kolmo na druhou stěnu protíná tuto v povrchové přímce naší plochy.

Dodatek I.

Na str. 7. bylo vyloženo, že řez $z =$ konst. na ploše isogonální jest obalovou čarou kružnic s parametrem β

$$(K_\beta) \quad x^2 + y^2 + \frac{2\,a \sin\beta \cos\beta}{\sin\vartheta}\, y - 2\,a \cos^2\beta \,.\, x + (a^2 + z^2) \cos^2\beta = 0.$$

Existuje určitý bod G, jehož mocnost pro všecky tyto kruhy je stejná, t. j. nezávislá na β; bod ten má souřadnice

$$(G) \qquad y = 0, \quad 2\,a\,x = a^2 + z^2,$$

mocnost má hodnotu

$$\left(\frac{a^2 + z^2}{2\,a}\right)^2;$$

kruh Σ poloměru

$$\frac{a^2 + z^2}{2\,a},$$

jehož středem je bod G, tudíž protíná orthogonálně veškery kruhy K_β. Rovnice kruhu Σ zní

$$\left(x - \frac{a^2 + z^2}{2\,a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a^2 + z^2}{2\,a}\right)^2,$$

čili

$$(\Sigma) \qquad x^2 + y^2 - \frac{a^2 + z^2}{a}\, x = 0.$$

Středy kruhů K_β naplňují ellipsu v rovině $z =$ konst.

$$(d) \qquad \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_0^2 \sin^2\vartheta = \frac{a^2}{4},$$

která má jednu osu ve směru $O\,x$, střed $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$, a poloosy

$\frac{a}{2}$ a $\frac{g}{2} = O\,B$. Její dva vrcholy na menší ose promítají se do bodů O, A, ohniska pak mají průměty ve středech základních kruhů B, B'.

„Řez $z =$ konst. na ploše isogonální jest obalová čára kružnic majících středy na ellipse (d) a protínajících orthogonálně pevný kruh (Σ).“

Jinými slovy, řez $z =$ konst. jest cyklika (Darboux), pro niž jeden kruh řídící je Σ a příslušná deferenta jest ellipsa (d).

Pro různé řezy podává nám souhrn kruhů Σ plochu stupně třetího, deferenty pak tvoří elliptický válec; středy G řídících kruhů Σ leží na parabole v rovině $O\,x\,z$.

Čára $z =$ konst. se nemění při inversi s řídícím kruhem Σ, jest anallagmatická. Obecně má čára bicirkulární 4. st. takové anallagmatie čtyři; zbývající tři centra anallagmatická jsou diagonální body úplného čtyřhranu tvořeného průsečíky kruhu Σ s deferentou (d).*)

V našem případě se tyto čáry dotýkají v bodě O_z (t. j. $x = 0$, $y = 0$), a mají dva průseky o společné úsečce; jeden diagonální bod jest úběžný bod osy $O\,y$ a přísluší mu symetrie jako zvláštní případ anallagmatie, druhé dva body diagonální splývají s bodem na ose O_z. Příslušný kruh řídící má střed na O_z a protíná orthogonálně kruh Σ, t. j. je to kruh nullový; nová deferenta jest kuželosečka konfokální s původní deferentou (d), a sice je to hyperbola. Pro tu známe ohniska (půdorysy v B a B'); dále určíme bod P na řezu příslušný k parametru $\varphi = \frac{\pi}{2}$; středem délky $P\,O_z$ vedeme přímku $p \parallel O\,A$, která jest osou symetrie bodů O_z a P, a musí býti tečnou nové deferenty; je kolmá na fokální osu její, tedy je to její tečna vrcholová; tím jest deferenta určena.

Sestrojíme-li hyperbolu dvojnásobných rozměrů, ležící s předešlou homotheticky vůči bodu O_z jako středu podobnosti, objeví se čára $z =$ konst. jako úpatnice této hyperboly z pólu O_z, jenž leží na její ose pobočné (laterální).

Bod $P\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ má souřadnice $x = 0$, $y = c \cos \alpha$, $z = c \sin \alpha$, vrcholová tečna hyperboly deferenty p má rovnici

$$y = \frac{1}{2}\, c \cos \alpha = p,$$

*) Výklad základních vět sem spadajících viz na př. v Leçons de l'agrégation classique de Mathématiques par G. Koenigs (Paris, Hermann, 1892) str. 152 — nebo F. Gomes Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches (Coimbra, 1908) díl I. str. 234.

střed hyperboly jest $x = \frac{a}{2}$, $y = 0$, dálka ohniska $\frac{c}{2}$, tedy rovnice hyperbolické deferenty zní

$$\frac{y^2}{p^2} - \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{q^2} = 1, \quad p^2 + q^2 = \frac{c^2}{4};$$

tu musí vzhledem k udané hodnotě p tedy býti $q = \frac{c}{2} \sin \alpha = \frac{z}{2}$.

Po dosazení hodnot máme tedy rovnici hyperbolické deferenty ve tvaru

$$(h) \qquad \frac{4 y^2}{c^2 - z^2} - \frac{(2 x - a)^2}{z^2} = 1.$$

Z bodu O_z na ose $O z$ (v průseku s rovinou řezu) spustíme kolmici na libovolnou tečnu hyperboly h a prodloužíme ji o plnou délku; koncový bod náleží uvažovanému řezu.

Řez $z =$ konst. se jeví jako úpatnice hyperboly

$$(H) \qquad \frac{y^2}{c^2 - z^2} - \frac{(x - a)^2}{z^2} = 1,$$

vzatá z pólu O_z.

Všem řezům $z =$ konst. přísluší hyperboly (H), jež naplňují plochu 4. stupně. Na této ploše leží čáry

$$x - a = m z, \quad y^2 = (1 + m^2)(c^2 - z^2);$$

poněvadž z těchto rovnic plyne

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = (1 + m^2) c^2,$$

nacházíme, že čáry ty jsou kruhy; tyto jsou v rovinách vedených přímkou $A y$ a mají společný střed A, takže protínají rovinu $x z$ orthogonálně, a sice v bodech přímek $z = \pm c$. Tato plocha (H) sestává tedy z kruhů, jež protínají orthogonálně tři pevné přímky

$$1.\ A y; \quad 2.\ y = 0,\ z = c; \quad 3.\ y = 0,\ z = -c,$$

z nichž prvá obsahuje společný jich střed.

Inversí pro pól A vzniká z této plochy hyperbolicko-kruhové plocha kruhů, jež mají společný střed A, protínají přímku $A y$ a dva kruhy v rovině na ni kolmé, jež se v bodě A vespolek dotýkají. Tato plocha jest krajní případ plochy isogonální ($a = 0$, $\vartheta = 0$); dvojná přímka její zde položena do $A y$.

XXXVI.

Dodatek II.

Chceme se tuto blíže zabývati orthogonálními trajektoriemi přímek sborcené plochy, o níž bylo jednáno v kap. II. K tomu cíli bude nám předeslati několik slov o kotálnici 4. stupně.

Předpokládejme, že se valí kruh poloměru c po pevném kruhu stejně velikém, při čemž rovina hybného kruhu zůstává k rovině pevné stejně nakloněna; určitý bod hybné roviny při tom opíše čáru, kterou nazýváme sférickou kotálnicí (sf. epicykloidou) 4. stupně.

Poznamenejme M_0 bod na pevném kruhu, v němž kotálení začalo; vzdálenost opisujícího bodu od středu hybného kruhu znamenejme g — je to veličina stá á — a budiž G bod, do nějž by padl opisující bod, kdybychom v počáteční poloze sklopili hybný kruh kolem společné tečny tak, aby se sjednotil s kruhem pevným.

Přímku směřující od středu pevného kruhu do bodu G zvolme za osu x, bod G za počátek soustavy souřadnic pravoúhlých, tak aby pevná rovina splývala s xy. Znamenáme-li γ úhel sevřený rovinami obou kruhů, čítaný kladně v polovici prostoru určené podmínkou $z > 0$, při čemž polourovina základní $\gamma = 0$ obsahuje kruh pevný, bude analytické vyjádření kotálnice dáno rovnicemi*)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

$$r = (c - g \cos \varphi)(1 - \cos \gamma), \quad z = (c - g \cos \varphi) \sin \gamma,$$

při čemž φ jest úhel odvalený při kotálení.

Z rovnic těchto vychází nejprvé, že čára tato leží na rotačním kuželi

$$\frac{z}{r} = \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

čili

(1) $$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2},$$

jehož osa je Gz, vrchol G, a jehož strany svírají s osou úhel $\frac{\gamma}{2}$. Dále je tato čára na kouli

(2) $$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx - 2cz \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 0,$$

obsahující vrchol kužele G.

---

*) Bližší odvození nalezne čtenář mimo učebnice kinematiky ve spise již citovaném F. G. Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables etc., sv. II. str. 348 a násl.

Pro přítomnou detailní čáru základní vlastnosti nalezne čtenář též v práci p. M. Pelíška (O plochách vytvořených sférickými kotálnicemi; Rozpravy čes. Akad. roč. 22, čís. 24), na jehož nalehavé přání jsem těmto čarám věnoval dlouhé studie, jež mi bude lze uveřejniti teprvé v dalších rozpravách.

Naopak je průseč libovolného rotačního kužele s koulí, která prochází jeho vrcholem, sférickou kotálnicí. Při tom rovina pevného kruhu prochází vrcholem kužele a je kolma na jeho osu; pevný kruh je dán jako průseč této roviny s rotačním kuželem majícím svůj vrchol ve středu koule, jehož strany stojí kolmo na stranách kužele kotálnice. Bod G je ve vrcholu tohoto a poloměr pevného kruhu tímto bodem vedený určuje základní polohu (počátek kotálení) M_0, t. j. $\varphi = 0$.

Pokud jsou délky c a g vespolek různy, prochází čarou ještě jeden kužel rotační (veškery plochy 2. stupně naši čáru obsahující jsou až na parabolický válec plochy rotační s osami vespolek rovnoběžnými — jako u každé průseče dvou rotačních ploch 2. stupně). Rovnici jeho obdržíme ve tvaru $\left(\text{klademe } \varkappa = tg \frac{\gamma}{2}\right)$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2gx - 2c\varkappa z - \nu(x^2 + y^2 - \varkappa^2 z^2) = 0,$$

určíme-li ν tak, aby vymizel diskriminant rovnice, t. j.

$$\begin{vmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & g \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varkappa^2\nu, & -c\varkappa \\ g & 0 & -c\varkappa & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Tato je 2. stupně, takže má dvojné řešení $\nu = \infty$, jemuž přísluší kužel (1), a řešení jednoduché $\nu = 1$ dávající parabolický válec; čtvrté řešení

$$\nu = \frac{c^2\varkappa^2 + g^2}{(c^2 - g^2)\varkappa^2}$$

dává kuželovou plochu hledanou, jejíž rovnice se po krátké modifikaci objeví ve tvaru

$$\left(gx - \frac{c^2 - g^2}{1 + \varkappa^2}\varkappa^2\right)^2 + g^2y^2 = \varkappa^2\left(cz - \frac{c^2 - g^2}{1 + \varkappa^2}\varkappa\right)^2. \tag{3}$$

Vrchol kužele tohoto V má souřadnice

$$x_0 = \frac{c^2 - g^2}{g}\sin^2\frac{\gamma}{2}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{c^2 - g^2}{2c}\sin\gamma; \tag{V}$$

pro jeho konstrukci poznamenejme především, že značí-li S střed koule naší čáry, vychází uvažováním směrnic věta, že *přímky GV a GS stojí na sobě kolmo.*

Kromě toho musí nárysná stopa (v rov. Gxz) kužele obsahovati stopní body kotálnice; ty jsou patrně průseky stop koule (2) a kužele (1) různé od bodu G; jich spojivá přímka je stopou kužele (3) a obsahuje bod V.

Tyto dvě vlastnosti určují bod V konstruktivně. Stopa kužele (3) na rovině $G\,x\,y$ prochází bodem G.

Sférická epicykloida $g \gtreqless c$ se tedy jeví jako průseč dvou rotačních kuželů s rovnoběžnými osami, z nichž pouze jeden má svůj vrchol (G) na čáře. Vrchol druhého kužele je středem inverse, jíž křivka přechází v samu sebe (anallagmatie).

Dotýká-li se osa rotačního kužele (1) koule (2), padne střed koule do roviny pevného kruhu a bude $c = 0$, t. j. poloměr kruhu pevného vymizí. Čára tu přejde v hyppopédu, výrazy (V) dávají x_0 a y_0 konečné, z_0 nekonečné, kužel (3) přechází v kruhový válec směru $G\,z$, který hyppopédu na kouli vytíná.

Obraťme se nyní k orthogonálním trajektoriím přímek na sborcené ploše 4. stupně, kterou jsme studovali v kap. II. Jejich vyjádření jsme podali na str. 116 ve tvaru

$$x = r \cos \varphi\,, \quad y = r \sin \varphi$$

$$r = \frac{a}{2}\left(1 - \cos 2\,\alpha\right) \cos \varphi + C \cos \alpha$$

$$z = C \sin \alpha - \frac{a}{2} \sin 2\,\alpha \cos \varphi .$$

Znamenejme k vůli pohodlí

$$\frac{C}{\sin \alpha} = C_1;$$

snadno vypočteme, že

$$\frac{z - C_1}{r} = - \operatorname{cotg} \alpha,$$

t. j. trajektorie leží na rotačním kuželi

$$x^2 + y^2 = (z - C_1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\,;$$

mimo to leží na kouli

$$x^2 + y^2 + z^2 - a\,x - C_1\,z = 0,$$

která obsahuje dvojný kruh ($O\,A$) sborcené plochy (P), a vrchol kužele.

Abychom porovnali s rovnicemi (1) a (2), přeložme počátek do vrcholu kužele, kladouce

$$z = C_1 + \zeta\,;$$

obdržíme

$$\zeta = -C_1 \cos^2 \alpha - \frac{a}{2} \sin 2\alpha \cos \varphi,$$

a pro rovnici koule

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 - a x + C_1 \zeta = 0.$$

Trajektorie naše je tedy sférická kotálnice příslušná k parametrům

$$g = -\frac{a}{2}, \quad c = -\frac{1}{2} C_1 \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}, \quad tg^2 \frac{\gamma}{2} = tg^2 \alpha.$$

Můžeme vždy zvoliti znamení $tg \frac{\gamma}{2}$ tak, aby vyšlo c kladné.

Pravoúhlé trajektorie přímek plochy (P) jsou tedy sférické kotálnice 4. stupně. Při jich kinematickém vytvoření přicházejí dva prvky stálé: délka ramene $g = -\frac{a}{2}$ a sklon $\gamma = \pm 2\alpha$. Rovina pevného kruhu má polohu

$$z = C_1,$$

jeho poloměr jest $\pm \frac{1}{2} C_1 \operatorname{cotg} \alpha$.

Rotační kužely jsou vespolek shodny a rovnoběžny; jejich osy leží v Oz a svírají se stranami kuželů úhel α Vrcholy kuželů G leží na Oz, střed délky AG je středem příslušné koule (která prochází základním dvojným — kruhem (OA)).

Pevný (základní) kruh naší kotálnice má rovnice

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \left(C_1 \operatorname{cotg} \alpha\right)^2, \quad z = C_1,$$

tedy kruhy základní, sloužící ku kinematickému vytvoření pravoúhlých trajektorií přímek plochy (P) jakožto sf. kotálnic, naplňují rotační kužel

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \operatorname{cotg}^2 \alpha \cdot z^2, \tag{4}$$

jehož vrchol leží ve středu dvojného kruhu (OA).

Zvláštní hodnotě konstanty $C = 0$ odpovídá základní rovina procházející vrcholem tohoto kužele, takže tu pevný kruh je nullový a trajektorie přechází v hyppopédu.

Vedeme libovolnou rovinu $z =$ konst.; její průseč s kuželem (4) je pevný kruh kotálnice, její průsek s osou Oz je bod G; sférická kotálnice příslušná ke sklonu $\pm 2\alpha$ je pak orthogonální trajektorie přímek plochy (P).

XXXVI.

Přeložme počátek soustavy do bodu G; pak znějí rovnice koule a kužele jak následuje:

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 - a\,x + C_1\,\zeta = 0,$$
$$x^2 + y^2 - \zeta^2\,tg^2\,\alpha = 0;$$

odečtením vychází rovnice parabolického válce

$$\zeta^2 - a\,x\,cos^2\,\alpha + C_1\,\zeta\,cos^2\,\alpha = 0,$$

na němž leží trajektorie. Rovnici tu lze psáti

$$\left(\zeta + \frac{1}{2}\,C_1\,cos^2\,\alpha\right)^2 = a\,x\,cos^2\,\alpha + \frac{1}{4}\,C_1^2\,cos^4\,\alpha;$$

jeho stopa na nárysně má stálý parametr $\frac{1}{2}\,a\,cos^2\,\alpha$, a její vrchol

$$\zeta = -\frac{1}{2}\,C_1\,cos^2\,\alpha$$

čili

$$z = C_1\left(1 - \frac{1}{2}\,cos^2\,\alpha\right),\quad x = -\frac{C_1^2\,cos^2\,\alpha}{4\,a}$$

opisuje parabolu

$$\frac{z^2}{x} = -\frac{a\,(1 + sin^2\,\alpha)^2}{cos^2\,\alpha},\quad y = 0. \tag{5}$$

Veškery parabolické válce našich trajektorií jsou vespolek shodny a vzniknou translací jednoho z nich; mimo to se dotýkají vepsaného válce parabolického (směru $O\,y$), a každý z nich obsahuje příslušný vrchol kužele G.

„Pošinuje-li se parabolický válec, kolmý na nárysnu, o parametru $\frac{1}{2}\,a\,cos^2\,\alpha$, tak aby jeho hlavní rovina zůstávala rovnoběžnou s $O\,x\,y$ a vrcholová hrana protínala parabolu (5), bude válec se dotýkati opsaného válce ve směru $O\,y$, a jeho průseč s kuželem (G), jehož vrchol je průsečík hybného válce s osou $O\,z$ (vzdálenější od roviny $O\,x\,y$ než vrcholová hrana válce), bude orthogonální trajektorií přímek plochy (P)."

Tyto vytvořují se tedy jako proniky shodných parabolických válců se shodnými rotačními kuželi, při vhodném pošinutí obou ploch. —

Tečny ve dvojných bodech G našich trajektorií budou tvořiti jistou plochu, kterou chceme určiti. Tyto tečny tvoří průseč kužele (G) s tečnou rovinou koule v bodě G vedenou.

XXXVI.

Tečná rovina koule

$$x^2 + y^2 + z^2 = a\,x + C_1\,z$$

v bodě G $(0,\ 0,\ C_1)$ má rovnici

$$a\,X = C_1\,(Z - C_1).$$

Její průseč s kuželem

$$X^2 + Y^2 = (Z - C_1)^2\,tg^2\,\alpha$$

tvoří pár tečen příslušné trajektorie v bodě dvojném G.

Z těchto dvou rovnic vylučme C_1; klaďme $cotg\,\alpha = k$, máme postupně — píšíce malé litery místo velkých —

$$z - C_1 = k\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$(z - k\sqrt{x^2 + y^2})\,k\sqrt{x^2 + y^2} = a\,x,$$

a odtud

(6) $$(x^2 + y^2 + a\,x\,tg^2\,\alpha)^2 = (x^2 + y^2)\,z^2\,tg^2\,\alpha.$$

Plocha (P) má rovnici

$$(x^2 + y^2 - a\,x)^2 = (x^2 + y^2)\,z^2\,cotg^2\,\alpha;$$

rovnice (6) z ní vyjde po záměně α, a za $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $-a\,tg^2\,\alpha$, a odtud věta:

„Tečny pravoúhlých trajektorií přímek plochy (P) v jich dvojných bodech tvoří sborcenou plochu téhož typu (P_0), která má tutéž dvojnou přímku $O\,z$, dvojný kruh

$$x^2 + y^2 + a\,x\,tg^2\,\alpha = 0$$

a úhel $\frac{\pi}{2} - \alpha$."

Souvislost tato obou ploch je reciproká.

Průsečnice obou ploch sborcených sestává z osy $O\,z$ a z hyppopédy na válci

$$x^2 + y^2 - \frac{2\,a\,x}{1 - k^2} = 0,\quad k = cotg\,\alpha.$$

XXXVI.

OBSAH.

I.

Strana

1. Definice plochy isogonální; parametry α, φ 1
2. Rovnice plochy, rovnice polární. Průseč s koulí o středu A sestává ze dvou kruhů. Kruhové válce s osou Oz protínají plochu v čáře na rotačním kuželi. Řezy $z =$ konst.; tečny ve dvojných bodech tvoří přímý konoid 4. stupně. Geometrické místo ohnisek těchto řezů 3
3. Opsaný kužel z vrcholu A, kužel tečen v bodě A. Kužel opsaný z vrcholu O; průmět dotykové čáry je Sluseova konchoida 2. typu. 8
4. Opsané kužele a válce. Válce ve směru Oy; obrys plochy nárysný sestává ze dvou parabol. Průsečnice s kruhovými válci $x^2 + y^2 = 2px$; čtyři pomyslné kruhy na ploše 11
5. Hyppopédy na ploše; středy jich koulí naplňují kruh (L). Rozvinutelná plocha tečen protíná rovinu xy v cissoidě Diokletově. Konstrukce tečné roviny v daném bodě plochy 15
6. Studium hyppopédy na základě komplexního parametru; vlastnosti rovinné čtveřiny. Tětivy protínající danou tětivu hyppopédy tvoří rotační hypperboloid. Dvojné čáry na ploše tečen. Oskulační doplněk daného bodu na hyppopédě 20
7. Koule různých hyppopéd obalují plochu kotálnic 4. stupně. Daná hypopéda náleží nekonečnému množství ploch isogonálních. Příslušné místo bodů C je Boothova lemniskata. 25
8. Obalová plocha rovin čtveřin harmonických a ekvianharmonických. Rotační kužel promítající z vrcholu A. Parabolické válce obsahující hyppopédy; jich řídící roviny obalují parabolický válec. Normály cissoidy stop tečen. Stopy roviny normální a oskulační; osa křivosti. Stereografická projekce hyppopédy; její sférická ohniska. Geometrické místo sférických ohnisek hyppopéd na ploše isogonální jsou dva kruhy 28
9. Normální rovina hyppopédy; polární plocha je kužel, jehož řezy $z =$ konst. jsou Huygensovy nefroidy. Rovina oskulační; stopa hlavní normály opisuje Pascalovu závitnici 35
10. Přechod od zvláštních souřadnic k původní soustavě. Určité zvláštní body na kruhu (L). Tečny hyppopédyv bodech téhož kruhu Γ_φ; jich průměty obalují parabolu, jejíž vrchol leží na stálé kardioidě 40
11. Normála plochy isogonální. Plocha normál v průsečnici s válcem $x^2 + y^2 =$ konst. protíná rovinu Oxy v růžici. Plocha normál podél hyppopédy protíná základnu v čáře inversní s rovnostrannou hyperbolou. Normály v bodech dotykové čáry s opsaným kuželem z vrcholu A, a s opsanými válci ve směru Oy. Plocha normál parabolického válce daného pronikem koule s rotačním válcem. Normály v bodech dotykové čáry s opsaným kuželem z vrcholu O 43

Strana
12. Osvětlení 48
13. Vepsané ellipsoidy rotační. Charakteristika jako pronik kruhového válce a koule. Rozvinutelná plocha opsaná podél charakteristiky protíná základní rovinu v ellipse. Stopy normál podél charakteristiky. Isogonální čáry na rotačním ellipsoidu vejčitém 50
14. Rovnice tečné roviny. Stopa rozvinutelné plochy opsané podél kruhu Γ_φ jest hyperbola; rozvinutelná plocha opsaná podél hyppopédy protíná základní rovinu v ellipse 61
15. Planimetrické určení opsaných válců rovnoběžných s rovinou základní . . 68
16. Lineární prvek na ploše; pravoúhlé trajektorie kruhů. V bodech řezu z = konst. protínají se kruhy a hyppopédy pod stálým úhlem. Problém trajektorií hyppopéd vede na rovnici typu Riccatiova. Prométné řady vytvořené trajektóriemi. Komplanace a kubatura 69
17. Čáry na kruhových válcích obsahujících přímku Oz. Rozvinutelná plocha fokální; realné kruhy fokální 80
18. Hlavní vlastnosti plochy inversní pro pól A 86
19. Zobecnění plochy isogonální . . 91

II.

1. Sborcená plocha (P); redukovaný tvar rovnice. Obsahuje ∞^2 hyppopéd. Rotační kužely s vrcholem na kruhu základním a osou kolmou na jeho rovině protínají plochu ve dvou hyppopédách. Rovnice v polárních souřadnicích 94
2. Ellipsy na ploše (P). Jich roviny obalují vepsaný parabolický válec; jeho dotyková čára. Vepsané rotační plochy 2. stupně. Konstruktivní užití ellips 99
3. Tangenciální rovnice plochy; opsaný válec směru Ox; jeho dotyková čára má za průmět cissoidu. Fokální čára jest kruh v rovině Oxz . . . 104
4. Pravoúhlé trajektorie povrchových přímek se promítají v konchoidy kruhu. Tečná rovina; rovina asymptotická; tato obaluje rotační kužel. Strikční čára splývá s dvojnou přímkou. Rozvinutelné plochy opsané podél konchoidy a ellipsy mají za stopy kuželosečky. Úvratnice rozvinutelné plochy, kterou obalují tečné roviny v bodech dvojného kruhu; její oblouk . . . 106
5. Koule procházející kruhem dvojným. Rotační plochy 2. stupně procházející kruhem dvojným (OA) protínají plochu v čáře konicko-sférické. Na ploše jest dvé řad ∞^1 sférických kotálnic 4. stupně. Průseč plochy s rotačními kuželi s osou Oz sestává ze dvou čar 4. stupně. Plocha (P) jako souhrn normál sférické kotálnice. Konstruktivní užití řezů z = konst.; konstrukce tečné roviny; rozvinutelná plocha tečných rovin v bodech dvojného kruhu . . 110
6. Rovinné řezy, pro něž tečny průmětu ve dvojném bodě na kruhu (OA) stojí na sobě kolmo, jsou v rovinách tečných a průměty jejich jsou strofoidy. Tečné roviny, pro něž tento dvojný bod je společný, obalují rotační kužel. Jeho dotyková čára jest hyppopéda. Řezy s rovinami tečnými kruhu (OA). Řezy v rovinách kolmých na rovinu základní. Jich asymptoty vedou ke plochám obecnějším. Kinematické vytvoření plochy (P) . . . 112
Dodatek I. Čáry z = konst. na ploše isogonální jakožto Darbouxovy cykliky. Jejich vytvoření jako úpatnic hyperbol. 130
Dodatek II. Pomocné věty o sférických kotálnicích. Pravoúhlé trajektorie přímek plochy (P) jsou sf. kotálnice; základní kruhy leží na rotačním kuželi. Čáry ty se vytvoří jako proniky shodných parabolických válců se shodnými rotačními kuželi. 133

XXXVI.

OPRAVY.

Str. 37, obr. 5: Značku $\boldsymbol{v}$ na přímce $U'S$ čti V.
Str. 39, obr. 6: Bod P buď ve směru VP pošinut o 9 mm.
Str. 63, obr. 8: Písmě K na úsečce $O\boldsymbol{\sigma}$ čti K'.
Str. 102, obr. 11: Místo O'_1 čti Q'_1.
Str. 103, obr. 12: Písmě a_2 na pravo od bodu A pod osou čti a'_2.
Svislá čára nad lit. P_1 v levo nepatří do výkresu.
Str. 118, obr. 15: Místo $\mathfrak{S}_{\mathrm{I}}$ čti $\mathfrak{S}^{\mathrm{I}}$.