Matyáš Lerch

Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale Eulérienne de première espèce

Bull. Soc. Math. Fr. 15 (1887), 173–178

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501599

Démonstration nouvelle de la propriété fondamentale de l'intégrale eulérienne de première espèce; par M. Lerch, docent à l'École Polytechnique tchèque de Prague.

(Séance du 15 juin 1887.)

Plusieurs démonstrations ont été données de la formule

$$\int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)};$$

quoiqu'elles ne laissent rien à désirer à l'égard de la clarté et de la simplicité, je crois néanmoins que la démonstration suivante ne serait pas superflue en se fondant sur les principes de la théorie des fonctions et sur le théorème de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires.

Je suppose connues les deux propriétés fondamentales de la fonction *gamma*, savoir

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha), \qquad \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha},$$

dont la seconde prouve que $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ est une fonction transcendante entière de α.

Soient s, t deux quantités complexes dont les parties réelles sont positives et considérons l'intégrale

$$(1) \qquad B(s,t) = \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz,$$

où l'on pose

$$z^{s-1} = e^{(s-1)\log z}; \qquad (1-z)^{t-1} = e^{(t-1)\log(s-z)},$$

les logarithmes étant pris en sens arithmétique. En supposant que les parties réelles de s et de t sont supérieures à l'unité, l'intégration par parties nous donnera la formule

$$(2)\qquad B(s, t) = \frac{s-1}{s+t-1} B(s-1, t).$$

Pour déterminer la nature analytique de la fonction $B(s, t)$, considérons l'intégrale

$$(3)\qquad E(s, t) = \int_{(1,0,1)} z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz,$$

prise le long d'un contour fermé $(1\,\alpha\alpha'\alpha''\alpha\,1)$ enveloppant l'origine au moyen d'un cercle $\alpha\alpha'\alpha''\alpha$ du centre zéro et du rayon $\alpha < 1$.

D'après le théorème de Cauchy, cette intégrale ne dépend point de la valeur de α et nous aurons, comme il est facile de voir,

$$E(s, t) = \int_1^0 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz + e^{2\pi i(s-1)} \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(4)\qquad E(s, t) = 2ie^{s\pi i} \sin \pi s\, B(s, t).$$

Or l'intégrale (3) existe pour chaque valeur finie de s et l'on démontre aisément qu'elle est une fonction *transcendante entière* de la variable s, la partie réelle de t étant, bien entendu, supposée positive.

Donc la fonction

$$(5)\qquad \Phi(s) = \frac{B(s, t)\,\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)}$$

est une fonction analytique *uniforme* et l'équation (2) montre qu'elle admet la période 1. Il s'agit des infinis de cette fonction-ci. Comme le montre l'équation (4), nous aurons

$$\Phi(s) = \frac{E(s, t)\,\Gamma(s+t)}{2ie^{s\pi i} \sin \pi s\, \Gamma(s)}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(5\ bis)\qquad \Phi(s) = \frac{1}{2\pi i} e^{-s\pi i}\, \Gamma(1-s)\,\Gamma(s+t)\, E(s, t).$$

La fonction $\Gamma(1-s)$ ne devenant infinie que pour $s = 1, 2, 3, \ldots$ et $\Gamma(s+t)$ pour $s+t = 0, -1, -2, -3, \ldots$ on voit que les infinis de la fonction $\Phi(s)$ sont contenus parmi les valeurs de la forme $s = n, -t, -t-n$ en représentant par n un terme quelconque de la série des nombres naturels $1, 2, 3, \ldots$.

Quant aux valeurs de la forme $s = n$, on voit, d'après le théorème de Cauchy, que l'intégrale (3) s'annule de sorte qu'elles ne sont que des points ordinaires de la fonction $\Phi(s)$. Il ne s'agit donc que des points tels, que $s+t$ soit un nombre entier négatif ou nul, $s+t=-n$. Dans ce cas, la fonction $z^{s-1}(1-z)^{t-1}$ sera uniforme dans le plan affecté de la *coupure* $(0\ldots 1)$ et le théorème de Cauchy nous donne

$$E(s, t) = \int_C z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz,$$

cette intégrale-ci devant être prise le long d'une ligne fermée simple C enveloppant la coupure $(0\ldots 1)$. Soit, en particulier, C un cercle du rayon $\frac{1}{r} > 1$ et de centre zéro; posant $z = \frac{1}{x}$, il vient

$$E = \int_{(0)} x^{-s-t}(x-1)^{t-1}\,dx,$$

cette intégrale étant prise le long du cercle du centre zéro et du rayon $r < 1$. La fonction sous le signe $\int$ étant uniforme et finie pour $s+t=-n$ à l'intérieur de ce cercle, le théorème de Cauchy montre qu'on aura, pour $s+t=-n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$E(s, t) = 0,$$

et il s'ensuit que la fonction ne devient jamais infinie, de sorte qu'elle est une *fonction transcendante entière* de s et, puisqu'elle admet la période 1, elle sera représentée par une série de la forme

$$\Phi(s) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \xi^{2\nu}, \qquad \xi = e^{s\pi i}, \tag{6}$$

dont les coefficients A_ν ne dépendent que de t.

C'est en combinant les propriétés de la fonction $\Phi(s)$ exprimées par les formules (5^a) et (6) que nous pourrons prouver la formule en question. Supposons à cet effet que la partie réelle de t est contenue entre 1 et 2, tandis que celle de s doit être prise ou nulle ou entre les limites $(0\ldots 1)$. La partie réelle de $s+t$ étant contenue entre les limites $(1 \ldots 3)$, nous aurons

$$|\Gamma(s+t)| = \left| \int_0^\infty e^{-z} z^{s+t-1}\, dz \right| < \int_0^\infty e^{-z} z^2\, dz,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha) \qquad |\Gamma(s+t)| < 2.$$

Soit ui la partie imaginaire de s; je dis qu'on peut déterminer une quantité m telle, qu'on ait, pour chaque valeur de u supérieure ou égale en valeur absolue à m, l'inégalité

$$(\beta) \qquad |\Gamma(1-s)| < \frac{1}{e} + \delta,$$

δ étant une quantité positive donnée d'avance.

C'est ce qui résulte d'un théorème donné par M. Prym ([1]) et démontré d'une manière plus simple par M. Hermite ([2]), savoir

$$\Gamma(1-z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1-s)} + \int_1^\infty e^{-z} z^{-s}\, dz.$$

En effet, on a, la partie réelle de $-s$ étant négative,

$$\left| \int_1^\infty e^{-z} z^{-s}\, dz \right| < \int_1^\infty e^{-z}\, dz = \frac{1}{e};$$

on peut supposer d'ailleurs m tel que, pour $|u| \geqq m$, on ait

$$\left| \sum_{\nu=0} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\nu+1-s)} \right| < \delta,$$

d'où il suit ce que nous avons affirmé.

On a de plus

$$E(s, t) = (e^{2\pi is} - 1) \int_\alpha^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\, dz + \int_{(\alpha\alpha'\alpha''\alpha)} z^{s-1}(1-z)^{t-1}\, dz.$$

Dans la seconde intégrale du second membre la variable z peut se mettre sous la forme

$$z = \alpha e^{\vartheta i}, \qquad \vartheta = (0 \ldots 2\pi);$$

([1]) *Journal de Borchardt*, t. 82.
([2]) *Ibid.*, t. 90, Lettre à M. H.-A. Schwarz.

en se rappelant que

$$|z^{s-1}| = e^{-u\vartheta}|\alpha^{s-1}|,$$

nous aurons

$$\left|\int_{(\alpha\alpha'\alpha''\alpha)} z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz\right| < |\alpha^s(1-\alpha)^{t-1}| \int_0^{2\pi} e^{-u\vartheta}\,d\vartheta,$$

et, puisque la partie réelle de s et de $t-1$ est positive, cette quantité est moindre que

$$\int_0^{2\pi} e^{-u\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1-e^{-u2\pi}}{u}.$$

On a enfin

$$\left|\int_\alpha^1 z^{s-1}(1-z)^{t-1}\,dz\right| < \int_\alpha^1 z^{-1}\,dz = \log\frac{1}{\alpha},$$

de sorte que

$$|\mathrm{E}(s,\ t)| < |e^{2\pi is}-1|\log\frac{1}{\alpha} + \int_0^{2\pi} e^{-u\vartheta}\,d\vartheta.$$

Le premier membre étant indépendant de α, on doit, en faisant α converger vers l'unité, que

$$(\gamma) \qquad |\mathrm{E}(s,\ t)| \leqq \frac{1-e^{-u2\pi}}{u}.$$

En combinant la formule (5 *bis*) avec les inégalités (α), (β), (γ), on trouve

$$|\Phi(s)e^{s\pi i}| < \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{e}+\delta\right)\frac{1-e^{-u2\pi}}{u}.$$

Si donc u est positif on peut déterminer m tel que pour $u \geqq m$ on ait $\frac{1-e^{-u2\pi}}{u} < \delta$, de sorte que

$$(a) \qquad |\Phi(s)e^{s\pi i}| < \frac{\delta}{\pi}\left(\frac{1}{e}+\delta\right),$$

et, si u est négatif, on pourra trouver m tel que, pour $-u \geqq m$, on ait

$$e^{2u\pi}\frac{(1-e^{-2u\pi})}{u} < \delta,$$

de sorte qu'on aura

$$(a') \qquad |\Phi(s)e^{-s\pi i}| < \frac{\delta}{\pi}\left(\frac{1}{e}+\delta\right).$$

La fonction $\Phi(s)$ admettant la période 1, il suit des inégalités (a), (a') qu'on pourra déterminer une quantité $\rho\,(= e^{-m\pi})$ telle que, pour chaque valeur de ξ moindre en valeur absolue que ρ et pour chaque ξ' plus grand en valeur absolue que $\frac{1}{\rho}$, il subsiste des inégalités

$$(b) \qquad |\Phi(s)e^{s\pi i}| = \left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \xi^{\nu+1} \right| < \delta',$$

$$(b') \qquad |\Phi(s)e^{-s\pi i}| = \left| \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu \xi'^{3\nu-1} \right| < \delta',$$

δ' étant une quantité positive donnée d'avance. Or il suit de (b) qu'on a nécessairement

$$A_n = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et l'on obtient de même de (b')

$$A_{-n} = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

de sorte que nous aurons

$$\Phi(s) = A_0,$$

c'est-à-dire que la fonction $\Phi(s)$ ne dépend point de s. La formule (5) nous donne d'ailleurs

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)A_0}{\Gamma(s+t)},$$

d'où l'on conclut aisément que l'on a

$$A_0 = \Gamma(t),$$

de sorte qu'il vient

$$B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)},$$

ce qui est la formule dont nous avions en vue la démonstration.