Matyáš Lerch

Sur quelques formules concernat les formes quadratiques binaires d'un discriminant négatif

Ann. Acad. Polytech. Porto 6 (1911), 72–76

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501598

SUR QUELQUES FORMULES CONCERNANT LES FORMES QUADRATIQUES BINAIRES D'UN DISCRIMINANT NÉGATIF

PAR

M. LERCH

à Brunn (Moravie)

Les formes quadratiques binaires

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

du même discriminant négatif $b^2 - 4ac = -\Delta$ se distribuent en un nombre fini de classes, que je désigne par K. En supposant le discriminant fondamental c'est-à-dire tel qu'il ne lui correspond que des formes primitives, on a la formule suivante [1]

$$(1) \qquad \sum_{a=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{a}\right) \mathrm{E}\left(\frac{am}{\Delta}\right) = -\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right] \mathrm{K},$$

m désignant un entier positif arbitraire et $\left(\frac{-\Delta}{m}\right)$ signifiant le signe de LEGENDRE dans la façon de KRONECKER.

Le cas de $\Delta = 3$ et $\Delta = 4$ font toutefois l'exception et il faut prendre respectivement $\mathrm{K} = \frac{1}{3}$ et $\mathrm{K} = \frac{1}{2}$. Mais, comme nous pouvons supposer $\Delta > 4$, ces exceptions n'ont pas besoin de nous préoccuper.

Cela posé, retenons dans le premier membre les termes

---

(1) *Bulletin des Sciences Mathematiques*, 2e série, T. 21 (1897).

$\alpha = 1, 2, \ldots \left[\frac{\Delta - 1}{2}\right]$, et posons $\alpha = \Delta - \alpha'$ dans les termes suivants ; comme

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta - \alpha}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

$$E\left(\frac{\Delta - \alpha}{\Delta} m\right) = E\left(m - \frac{\alpha m}{\Delta}\right) = m - 1 - E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right)$$

le premier membre devient

$$2 \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) - (m-1) \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right),$$

et, en substituant la valeur connue

$$(2) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = (2 - \varepsilon) K, \quad \varepsilon = \left(\frac{2}{\Delta}\right),$$

il vient

$$(3) \quad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) = \left[(m-1)\frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2} - \frac{1 - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)}{2}\right] K.$$

Je ferais usage de cette formule pour évaluer l'expression

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) i_\alpha,$$

où l'on pose pour abréger

$$(4) \qquad i_\alpha = \sum_{m=1}^{n} \left\{ E\left(\frac{2m\alpha}{\Delta}\right) - 2E\left(\frac{m\alpha}{\Delta}\right) \right\},$$

n signifiant $\left[\frac{\Delta - 1}{2}\right]$; le symbole i_α indique évidemment combien parmi les quantités

$$\frac{2\alpha}{\Delta}, \quad \frac{4\alpha}{\Delta}, \quad \frac{6\alpha}{\Delta}, \quad \ldots \quad \frac{2n\alpha}{\Delta}$$

ont leur partie entière impaire.

On a en effet d'après (3) et (2)

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sum_{m=1}^{n} E\left(\frac{2\,am}{\Delta}\right)=\left[n^2\,\frac{1-\varepsilon}{2}-\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon}{2}(2-\varepsilon)\,K\right]K,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sum_{m=1}^{n} E\left(\frac{am}{\Delta}\right)=\left[\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{1-\varepsilon}{2}-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}(2-\varepsilon)\,K\right]K.$$

En retranchant le double de la deuxième expression de la première, il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=\left[n\,\frac{1-\varepsilon}{2}+\frac{n}{2}+\frac{\varepsilon-2}{2}(2-\varepsilon)\,K\right]K.$$

Ce résultat prend une forme particulièrement simple si l'on fait usage de l'écriture

$$h=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)K=(2-\varepsilon)\,K, \tag{5}$$

à savoir

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=\frac{(n-h)\,h}{2}; \tag{6}$$

les hypothèses sont que $-\Delta$ soit un discriminant fondadamental, $n=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]$, les i étant définis par (4).

Lorsque Δ est impar, h signifie le nombre de classes envisagé dans la théorie de Gauss et de Derichlet où il s'agit des formes telles que

$$ax^2+2bxy+cy^2,$$

l'expression $b^2-ac=-\Delta$ étant alors le déterminant de la forme.

Ainsi pour $\Delta=15$ on a $h=2$, $n=7$, et

$$\frac{(n-h)\,h}{2}=5;$$

et en effet ici est

$$i_1=0,\quad i_2=4,\quad i_4=4,\quad i_7=3$$

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)i_\alpha=4+4-3=5.$$

Les nombres impaires P de la forme $4k+1$ n'ont pas la forme de Δ et l'on fait dans notre théorie, qui est celle de Kronecker, $\Delta = 4P$, P devant être un produit de nombres premiers différents, pourvu que $-4P$ soit un discriminant fondamental.

Comme

$$\left(\frac{-4P}{2\nu}\right) = 0,$$

on peut se borner aux valeurs impaires de α et pour celles-ci

$$\left(\frac{-4P}{\alpha}\right) = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right),$$

puis $n = 2P - 1$.

Les formes $ax^2 + 2bxy + cy^2$ de déterminant $-P = b^2 - ac$ ont pour discriminant $4b^2 - 4ac$ c'est-à-dire $-4P = -\Delta$, le nombre de classes est exactement

$$K = \frac{h}{2}.$$

Comme

$$i_\alpha = \sum_{m=1}^{2P-1}\left\{E\left(\frac{m\alpha}{2P}\right) - 2E\left(\frac{m\alpha}{4P}\right)\right\} = i'_\alpha,$$

il s'ensuit

(7) $$\sum_\alpha (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) i'_\alpha = K(2P - 1 - 2K),$$

$$\alpha = 1, 3, 5, \ldots 2P - 1.$$

Le nombre $K = Cl(-4P)$ est donné par exemple par la formule

$$\sum_\alpha (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 2K, \quad (\alpha = 1, 3, \ldots 2P - 1).$$

Posons par exemple $P = 5$, on trouve

$$i'_1 = 0, \quad i'_3 = 3, \quad i'_7 = 3, \quad i'_9 = 4$$

$$-\left(\frac{3}{5}\right)3 - \left(\frac{7}{5}\right)3 + \left(\frac{9}{5}\right)4 = 3 + 3 + 4 = 10$$

et comme $K = 2$, on a en effet

$$K(2P - 1 - 2K) = 2(9 - 4) = 10.$$

Le cas où Δ est un nombre premier de la forme $4k+3$ parait toutefois le plus fécond; car ici en vertu du théorème élémentaire bien connu

$$\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)=(-1)^{\sum_m\left[\frac{2m\alpha}{\Delta}\right]}\left(m=1,\,2,\,\ldots\,n\,;\;n=\frac{\Delta-1}{2}\right)$$

le signe

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)$$

a pour valeur $(-1)^{i_\alpha}$ et il s'ensuit

$$(6^0)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{i_\alpha}i_\alpha=\frac{(n-h)h}{2},\quad n=\frac{\Delta-1}{2}.$$

La somme des i_α pairs surpasse donc toujours celle des i_α impairs, la différence étant

$$\frac{n-h}{2}h,$$

pourvu que Δ soit un nombre premier de la forme $4k+3$.

En vertu de (2) et (5), le nombre

$$h=\sum_{1}^{n}(-1)^{i_\alpha}$$

est précisement l'excès des i_α pairs sur les i_α impairs; la différence des sommes se présente comme fonction quadratique de l'excès.