Matyáš Lerch

Stanovení jistých arithmetických součtů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 20 (1911), č. 40, 1–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501597

Stanovení jistých arithmetických součtů.

Sdílí **M. LERCH** v Brně.

(Předloženo dne 11. prosince 1911.)

I.

Buď D kladný neb záporný diskriminant, $\left(\frac{D}{\nu}\right)$ Legendreovské znaménko v Kroneckerově zobecnění, m libovolné celistvé číslo; uvažujme součty

$$(1) \qquad H(D, m) = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu^2 m \pi i}{\Delta}},$$

kde $\Delta = |D|$ jest absolutní hodnota diskriminantu D. Na místě pravé strany možno klásti

$$(1^a) \qquad \sum_{\varrho} \left(\frac{D}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho^2 m \pi i}{\Delta}},$$

kde ϱ probíhá úplnou soustavou *kladných* zbytků modulu Δ. Zvolíme-li zejména zbytky

$$\varrho = \nu x,$$

kde x je libovolné celistvé číslo nesoudělné s diskriminantem, obdržíme

$$(2) \qquad H(D, m x^2) = \left(\frac{D}{x}\right) H(D, m); \quad (D, x) \sim 1.$$

Buďte dále D_1, D_2 dva diskriminanty nesoudělné (při čemž čtverce nejsou vyloučeny), Δ_1, Δ_2 jich absolutní hodnoty a položme v součtu (1^a)

$$\varrho = \alpha \Delta_2 + \beta \Delta_1, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, & 1, & \ldots & \Delta_1 - 1 \\ \beta = 0, & 1, & \ldots & \Delta_2 - 1 \end{pmatrix},$$

volíce $D = D_1 D_2$. Bude pak

$$\left(\frac{D}{\varrho}\right) = \left(\frac{D_1}{\varrho}\right)\left(\frac{D_2}{\varrho}\right) = \left(\frac{D_1}{\alpha}\right)\left(\frac{D_2}{\beta}\right) \varepsilon,$$

kde

$$(3)\quad \varepsilon = \left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right) = \begin{cases} -1, & \text{jsou-li oba diskriminanty } D_1,\ D_2 \text{ záporny,} \\ +1, & \text{je-li aspoň jeden z diskriminantů } D_1,\ D_2 \text{ kladný.} \end{cases}$$

Obdržíme tak

$$\sum\left(\frac{D}{\varrho}\right)e^{\frac{2\varrho^2 m\pi i}{\Delta}} = \varepsilon\sum_{\alpha=1}^{\Delta_1-1}\sum_{\beta=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_1}{\alpha}\right)\left(\frac{D_2}{\beta}\right)e^{\frac{2m\pi i}{\Delta_1}\alpha^2\Delta_2+\frac{2m\pi i}{\Delta_2}\beta^2\Delta_1}$$

$$= \varepsilon\, H\,(D_1,\, m\,\Delta_2)\; H\,(D_2,\, m\,\Delta_1),$$

t. j.

$$(4)\qquad H\,(D_1\, D_2,\, m) = \varepsilon\, H\,(D_1,\, m\,\Delta_2)\; H\,(D_2,\, m\,\Delta_1).$$

Předpokládáme-li diskriminant $D = -\Delta$ záporný, podá substituce $\nu = \Delta - \mu$ výsledek

$$H\,(-\Delta,\, m) = -H\,(-\Delta,\, m)$$

a tedy obecně pro záporné diskriminanty

$$(5)\qquad H\,(-\Delta,\, m) = 0.$$

Dle (4) bude $H\,(D,\, m) = 0$, jakmile existuje rozklad $D = -\Delta \,.\, D'$ v nesoudělné diskriminanty, z nichž aspoň jeden je záporný.

Funkce H může od nully se lišiti pouze pro případ, kdy D je kladný diskriminant aneb čtverec.

Buďte $D_1,\ D_2,\ \ldots\ D_r$ kladné diskriminanty neb čtverce vespolek nesoudělné, položme

$$(\alpha)\qquad D = D_1\, D_2\ \ldots\ D_r,\quad D_\nu{}' = \frac{D}{D_\nu},$$

i obdržíme ze vztahu (4) postupně

$$(4^*)\qquad H\,(D) = \prod_{\nu=1}^{r} H\,(D_\nu,\, m\, D_\nu{}').$$

Můžeme předpokládati, že rovnice (α) podává rozklad diskriminantu D v kmenné činitele, t. j. že

$$D_1 = p_1^{\alpha_1},\quad D_2 = p_2^{\alpha_2},\quad \ldots\quad D_r = p_r^{\alpha_r},$$

kde p_ν jsou čísla kmenná; při tom jsou exponenty α_ν čísla sudá při všech p_ν, jež jsou mod. 4 shodna s -1.

Hledejme tedy nejprvé (při kmenném p)

$$H = H\,(p^{2n+1},\, m),\qquad p \equiv 1 \text{ (mod. 4)},\quad n > 0.$$

Substitucí

$$\nu = \varrho + \mu p^{2n},\qquad (0 < \varrho \leqq p^{2n},\ \mu < p)$$

přechází součet (1) ve výraz

$$H = \sum_{\varrho=1}^{p^{2n}} \left(\frac{\varrho}{p}\right) e^{\frac{2\varrho^2 m\pi i}{D}} \sum_{\mu=0}^{p-1} e^{\frac{4m\varrho\mu\pi i}{p}}.$$

Pro m nedělitelné číslem p jest vnitřní součet roven nulle, a tedy

(6[1]) $$H\,(p^{2n+1}, m) = 0,$$

$$\bigl(m \not\equiv 0 \ (\text{mod. } p),\quad n > 0,\quad p \equiv 1 \ (\text{mod. } 4)\bigr).$$

Dále jest pro lichá m očividně

$$H\,(8, m) = 0,$$

a pro diskriminanty tvaru $D = 2^{2n+1}$, $n > 1$, nám substituce

$$\nu = \varrho + \mu\, 2^{2n-1}, \quad (0 < \varrho \leqq 2^{2n-1},\quad \mu < 4)$$

podá vzhledem k okolnosti

$$\frac{\nu^2}{D} = \frac{\varrho^2}{D} + \frac{\varrho\mu}{2} + \mu^2 \,.\, 2^{2n-3}, \quad 2n - 3 > 0,$$

patrně

$$H\,(D, m) = \sum \left(\frac{2}{\varrho}\right) e^{\frac{2\varrho^2 m\pi i}{D}} \sum_{\mu=0}^{3} e^{2\varrho m\mu\pi i}.$$

Při lichém ϱ, m je vnitřní součet roven nulle, a tedy

(6[2]) $$H\,(2^{2n+1}, m) = 0, \quad (m \text{ liché},\quad n \geqq 1).$$

Buď dále p libovolné liché číslo kmenné, a položme

$$D = p^n,$$

při čemž n buď sudé v případě $p \equiv -1$ (mod. 4). Současně předpokládejme

$$m = m'\, p^{n'}, \quad (m', p) \sim 1, \quad n' < n,$$

takže tu čísla m a D nejsou více nesoudělná.

Znamenáme-li ještě

$$D' = p^{n-n'},$$

bude

$$H\,(p^n, m) = \sum_{\nu=1}^{p^n} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2m'\pi i}{D'}\nu^2},$$

a tento výraz substitucí

$$\nu = \varrho + \mu\, p^k$$

přechází v

(a) $$H\,(p^n, m) = \sum_{\varrho=1}^{p^k} \left(\frac{D}{\varrho}\right) e^{\frac{2\pi i m'}{D'}\varrho^2} \sum_{\mu=0}^{p^{n-k}-1} e^{\frac{4\pi i m'\varrho\mu}{p^{n-n'-k}}},$$

bylo-li cel. číslo k tak voleno, aby $2k \geqq n - n'$.

Je-li tu $n - n' > k$, bude vnitřní součet roven nulle (ježto se omezujeme na členy, v nichž ϱ je nesoudělno s p), a tedy vychází

$$H(p^n, m) = 0;$$

podmínkou tu jest, aby existovalo celistvé číslo k, pro něž současně

$$2k \geqq n - n', \quad n - n' > k.$$

Takové číslo neexistuje pouze v případě $n - n' = 1$, v tomto případě máme — lišíce $n = 2h + 1$ liché a $n = 2h$ sudé:

$$H(p^{2h+1}, m\,p^{2h}) = \sum_1^{p^{2h+1}} \left(\frac{\nu}{p}\right) e^{\frac{2m\pi i}{p}\nu^2},$$

z čehož

$$H(p^{2h+1}, m\,p^{2h}) = p^{2h} H(p, m),$$

dále

$$H(p^{2h}, m\,p^{2h-1}) = \sum_{\nu=1}^{p^{2h}} \left(\frac{\nu^2}{p}\right) e^{\frac{2m\pi i}{p}\nu^2} = p^{2h-1} \sum_1^{p-1} e^{\frac{2m\pi i}{p}\varrho^2}.$$

Z theorie Gaussových součtů je známo, že

$$\sum_{\varrho=1}^{p} e^{\frac{2m\pi i}{p}\varrho^2} = \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p}, \quad \left(p \equiv \pm 1 \ (\mathrm{mod.}\ 4)\right),$$

při čemž odmocnina $\sqrt{\pm p}$ je buď kladná aneb kladně pomyslná. Tedy máme

$$(6^3) \qquad H(p^{2h}, m\,p^{2h-1}) = \left\{\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{\pm p} - 1\right\} p^{2h-1},$$

$$(6^4) \qquad H(p^{2h+1}, m\,p^{2h}) = p^{2h} H(p, m),$$

při čemž $(m, p) \sim 1$, a dále

$$(6^5) \qquad H(p^n, m\,p^{n'}) = 0, \quad (n' < n - 1).$$

V případě

$$D = 2^n, \quad m = m'\,2^{n'}, \quad (m' \text{ liché}, \quad n > n'),$$

máme

$$H(D, m) = \sum_1^D \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2m'\pi i}{2^{n-n'}}\nu^2},$$

a substituce

$$\nu = \varrho + \mu\,2^k$$

nám podá

$$H(2^n, m'\,2^{n'}) = \sum \left(\frac{D}{\varrho}\right) e^{\frac{2m'\pi i}{2^{n-n'}}\varrho^2} \sum_{\mu=0}^{2^{n-k}-1} e^{\frac{4\pi i m'\varrho\mu}{2^{n-n'-k}}}.$$

bylo-li k tak zvoleno, aby $2k \geqq n - n'$. Tu bude vnitřní součet roven nulle, jakmile $n - n' - k > 1$, takže tu číslo k omezeno podmínkami.

$$\frac{n-n'}{2} \leqq k < n - n' - 1.$$

Těm lze vyhověti, jakmile $n' < n - 3$. Pro ostatní případy máme vzorce

$$H(2^n, m'\, 2^{n-3}) = \sum_1^D \left(\frac{D}{\nu}\right) . e^{\frac{m' \pi i}{4}}$$

$$H(2^n, m'\, 2^{n-2}) = \sum_1^D \left(\frac{D}{\nu}\right) . i^{m'},$$

$$H(2^n, m' . 2^{n-1}) = (-1)^{m'} \sum_1^D \left(\frac{D}{\nu}\right);$$

tu však součet

$$\sum_1^D \left(\frac{D}{\nu}\right), \quad D = 2^n,$$

vymizí, jakmile n je liché $\geqq 3$, a máme tedy obecně

(6[6]) $$H(2^{2k+1}, m) = 0,$$

a to i v případě, kdy m je dělitelno modulem 2^{2k+1}.

Dále

(6[7]) $$H(2^{2k}, 2^{n'} m') = 0 \quad \text{pro } n' < 2k - 3, \quad m' \text{ liché},$$

avšak — též pro $k = 1$ —

(6[8]) $$H(2^{2k}, m) = 2^{2k-1} e^{\frac{2 m \pi i}{2^{2k}}}, \quad (m \equiv 0 \text{ mod. } 2^{2k-3}).$$

Aby tedy $H(D, m)$ bylo od nully různo, nutno, by D buď bylo liché, aneb lichý násobek čísla 4^k; v posledním případě musí $8m$ býti dělitelno číslem 4^k. V rozkladu čísla D v kmenné činitele přicházející čísla

$$D_1 = p^{2h+1}, \ (h \geqq 0), \ D_2 = q^{2h},$$

$$\big(p \equiv 1, \ q \equiv \pm 1 \text{ (mod. 4)}\big)$$

jsou taková, že

$$\frac{pm}{D_1}, \quad \text{resp.} \ \frac{qm}{D_2}$$

jsou čísla celistvá, z nich prvé nesoudělné s p.

Buď nyní

$$P = p_1^{2\alpha_1 - 1} p_2^{2\alpha_2 - 1} \ldots . \ q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \ldots .$$

rozklad v různé činitele kmenné,

$$p_\nu \equiv 1, \quad q_\nu \equiv \pm 1 \quad \text{(mod. 4)}.$$

„Diskriminanty D, pro něž

$$H(D, m) \neq 0,$$

jsou buď tvaru $D = P$ a pak je součin

$$\frac{m\, p_1 p_2 \ldots q_1 q_2 \ldots}{D}$$

celistvé číslo nesoudělné s $p_1 p_2 \ldots$; aneb jest

$$D = 4^k P,$$

a pak je součin

$$\frac{8\, m\, p_1 p_2 \ldots q_1 q_2 \ldots}{D}$$

číslo celistvé nesoudělné s $p_1 p_2 \ldots$."

K doplnění důkazu třeba ještě ukázati, že součet

$$H = H(p, m) = \sum_{\nu=1}^{p} \left(\frac{\nu}{p}\right) r^{\nu^2}, \quad r = e^{\frac{2 m \pi i}{p}}, \quad (m, p) \sim 1,$$

je pro kmenná $p \equiv 1 \pmod{4}$ od nully různý.

K tomu cíli uvažujme součin

$$H^2 = \sum \left(\frac{\nu}{p}\right) r^{\nu^2} \sum \left(\frac{\mu}{p}\right) r^{\mu^2};$$

vnitřní součet přetvoříme substitucí $\nu \mu$ za μ, čímž vzejde

$$(\alpha) \qquad H^2 = \sum_{\nu=1}^{p} \left(\frac{\nu}{p}\right) r^{\nu^2} \sum_{\mu=1}^{p} \left(\frac{\mu \nu}{p}\right) r^{\mu^2 \nu^2} = \sum_{\mu=1}^{p-1} \left(\frac{\mu}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{p-1} r^{\nu^2 (\mu^2 + 1)}.$$

Ve vnitřním součtu dlužno rozeznávati případy, kdy $\mu^2 + 1$ obsahuje dělitele p, od případů ostatních. Shoda

$$\mu^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

má dvě řešení $\mu = \mu_0$ a $\mu = p - \mu_0$, a sice je obdržíme rozkladem ve čtverce

$$p = a^2 + b^2.$$

Určíme-li b_1 shodou

$$b\, b_1 \equiv 1 \pmod{p},$$

podává shoda

$$a^2 \equiv -b^2$$

patrně

$$(a\, b_1)^2 \equiv -1,$$

tedy buď $a\, b_1 \equiv \mu_0$ neb $p - \mu_0$. Můžeme tedy klásti

$$\mu_0 \equiv a\, b_1 \pmod{p},$$

načež Legendreovo znaménko

$$\eta = \left(\frac{\mu_0}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b_1}{p}\right)$$

se násobením činitelem

$$1 = \left(\frac{b\,b_1}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{b_1}{p}\right)$$

obdrží ve tvaru

$$\eta = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{a\,b}{p}\right).$$

Je však

$$(a+b)^2 = p + 2\,a\,b,$$

tedy

$$\left(\frac{2\,a\,b}{p}\right) = 1, \quad \left(\frac{a\,b}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right),$$

t. j. bude

$$\left(\frac{\mu_0}{p}\right) = \left(\frac{p-\mu_0}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right).$$

Pro $\mu = \mu_0$ a pro $\mu = p - \mu_0$ bude tedy

$$\left(\frac{\mu}{p}\right)\sum_{\nu=1}^{p-1} r^{\nu^2(\mu^2+1)} = \left(\frac{2}{p}\right)\left(p-1\right),$$

kdežto pro ostatní hodnoty μ jest

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} r^{\nu^2(\mu^2+1)} = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{\mu^2+1}{p}\right)\sqrt{p} - 1.$$

Náš výraz (α) tedy bude

$$H^2 = 2\left(\frac{2}{p}\right)\left(p-1\right) + \sum{}'\left(\frac{\mu}{p}\right)\left[\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{\mu^2+1}{p}\right)\sqrt{p} - 1\right],$$

kde v součtu Σ' scházejí členy $\mu = \mu_0$ a $\mu = p - \mu_0$.

Součet ten lze psáti

$$\left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p}\sum{}'\left(\frac{\mu}{p}\right)\left(\frac{\mu^2+1}{p}\right) + \left(\frac{\mu_0}{p}\right) + \left(\frac{p-\mu_0}{p}\right);$$

poslední dva členy dávají $2\left(\frac{2}{p}\right)$, a tak vychází

$$H^2 = 2\left(\frac{2}{p}\right)p + \left(\frac{m}{p}\right)\sqrt{p}\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right)\left(\frac{\mu^2+1}{p}\right),$$

poněvadž připojené členy $\mu = \mu_0$ a $\mu = p - \mu_0$ v posledním součtu rovnají se nulle.

XXXX.

Avšak*)

$$\sum_{\mu=1}^{p-1}\left(\frac{\mu}{p}\right)\left(\frac{\mu^2+1}{p}\right)=2\left(\frac{2}{p}\right)a,$$

kde a je liché číslo, vzaté s určitým znamením, dané rozkladem

$$p = a^2 + b^2.$$

Bude tedy

$$H^2(p, m) = 2\left(\frac{2}{p}\right)\left[p + \left(\frac{m}{p}\right)a\sqrt{p}\right];$$

ježto $|a| < \sqrt{p}$, je závorka kladnou, a tak vychází, že *veličina* $H(p, m)$ jest realná pro kmenná čísla p tvaru $8k+1$, a je ryze pomyslná pro kmenná čísla p tvaru $8k+5$.

II.

Buď $\mathfrak{R}(z) = z - [z]$ *nejmenší kladný zbytek* veličiny z; pak funkce

(7) $$\mathfrak{R}^*(z) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nz\pi}{n\pi}$$

obecně rovná se $\mathfrak{R}(z)$ a jen pro celistvá z je $\mathfrak{R}^*(z) = \frac{1}{2} = \mathfrak{R}(z) + \frac{1}{2}$.

Chceme stanoviti součet

(α) $$S = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\mathfrak{R}^*\left(\frac{s\nu^2}{\Delta}\right),$$

kde D značí diskriminant, Δ jeho prostý obnos, a s libovolné číslo celistvé.

Podle (7) obdržíme

$$S = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\sin\frac{2ns\nu^2\pi}{\Delta}$$

čili užívajíce v našich pracích obvyklého psaní

$$\text{Im.}\ (a + ib) = b,$$

(β) $$S = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\ \text{Im}\ H(D, ns).$$

Bude tedy $S = 0$, jakmile diskriminant D je tak volen, aby výrazy

$$H(D, ns)$$

*) Ernst Jacobsthal, Inaugural-Dissertation; Berlin 1906, str. 13.

byly vesměs nully aneb veličiny realné. Tudíž platí vztah

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \Re^* \left(\frac{s\,\nu^2}{\Delta}\right) = 0,$$

(A)
1. je-li $D = -\Delta$ diskriminant záporný, aneb existuje-li rozklad v nesoudělné činitele $D = \Delta_1 \Delta_2$, pro něž $-\Delta_1$, $-\Delta_2$ jsou záporné diskriminanty;
2. je-li D součin lichého čísla s lichou mocností čísla 2;
3. je-li $D = p_1^{2\alpha_1 - 1} p_2^{2\alpha_2 - 1} \ldots \, q_1^{2\beta_1} q_2^{2\beta_2} \ldots$, při čemž kmenní činitelé p_ν, q_ν jsou vesměs tvaru $4k + 1$, a z činitelů $p_1, p_2, \ldots$ první řady *sudý počet* má tvar $8k + 5$.

Na př. pro $D = 17$, $s = 1$ (počet činitelů tvaru $8k + 5$ rovná se nulle) po násobení 17 podává (I)

$$1 + 4 - 9 + 16 - 8 - 2 - 15 + 13 = 0,$$

poněvadž můžeme při $D > 0$ místo (I) psáti vzorec rovnomocný

$$\text{(I*)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} \left(\frac{D}{\nu}\right) \Re^* \left(\frac{s\,\nu^2}{D}\right) = 0$$

za podmínek (A).

Za stejných podmínek (A) platí vztah

$$\text{(II)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) R^* \left(\frac{s\,\nu^2}{\Delta}\right) = 0;$$

zde

$$R(z) = z - \left[z + \frac{1}{2}\right]$$

značí absolutně nejmenší zbytek veličiny z, a obecně

$$R^*(z) = R(z),$$

s výjimkou hodnot tvaru $z' = \frac{1}{2} +$ cel. číslo, pro něž

$$R(z') = -\frac{1}{2}, \quad R^*(z') = 0.$$

Plyne to z analytického vyjádření funkce $R^*(z)$ řadou

$$\text{(8)} \qquad R^*(z) = -\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 2nz\pi}{n\pi}.$$

Rovněž nám rovnice

$$\text{(9)} \qquad \text{sgn. } R^*(z) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (4n-2)z\pi}{(2n-1)\pi},$$

XXXX.

v níž levá strana podává znamení veličiny $R^*(z)$, t. j. hodnoty 1, 0, — 1, dle toho jak $R^*(z)$ je kladné, nulla, neb záporné, podá vztah

$$\text{(III)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{s\nu^2}{\Delta}\right) = 0$$

za podmínek (A).

V případě kladných diskriminantů lze levé strany rovnic (II) a (III) redukovati na polovici členů.

Tak pro $D = 17$, $s = 1$ máme od $\nu = 1$ do $\nu = 8$

$$17\,R^*\left(\frac{\nu^2}{17}\right) = 1,\ 4,\ -8,\ -1,\ 8,\ 2,\ -2,\ -4$$

$$17\sum_1^8\left(\frac{17}{\nu}\right)R^*\left(\frac{\nu^2}{17}\right) = 1+4+8-1-8-2+2-4 = 0;$$

dále

$$\operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{\nu^2}{17}\right) = 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1$$

$$\sum_1^8\left(\frac{17}{\nu}\right)\operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{\nu^2}{17}\right) = 1+1+1-1-1-1+1-1 = 0.$$

Naproti tomu pro absolutní hodnotu $|R(z)|$ platí

$$\text{(10)} \qquad |R(z)| = \frac{1}{4} - 2\sum_1^{\infty}\frac{\cos\,(4n-2)\,z\,\pi}{(2n-1)^2\,\pi^2},$$

a tu bude rovnice

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\left|R\left(\frac{s\nu^2}{\Delta}\right)\right| = 0$$

platit za podmínek poněkud změněných. Zůstávají alternativy A) 1. a 2., ale podmínka A) 3. se změní v ten způsob, že v rozkladu kladného diskriminantu

$$D = p_1^{2\alpha_1-1}\,p_2^{2\alpha_2-1}\ \ldots\ q_1^{2\beta_1}\,q_2^{2\beta_2}\ \ldots\ .$$

mezi čísly p_1, p_2, . . . *lichý* počet má tvar $8k+5$.

Tak na př. diskriminant $D = 17$ této podmínce nehoví, a skutečně máme od $\nu = 1$ do $\nu = 8$

$$17\left|R\left(\frac{\nu^2}{17}\right)\right| = 1,\ 4,\ 8,\ 1,\ 8,\ 2,\ 2,\ 4$$

$$17\sum_1^8\left(\frac{17}{\nu}\right)\left|R\left(\frac{\nu^2}{17}\right)\right| = 1+4-8+1-8-2-2+4 = -10,$$

takže tu součet (IV) má hodnotu $-\dfrac{20}{17}$ od nully různou.

XXXX.

Za to hoví podmínce věty (IV) číslo $D = 13$; absolutní hodnoty zbytků od $\nu = 1$ do $\nu = 6$ jsou tu

$$1, 4, 4, 3, 1, 3,$$

tedy

$$13 \sum_{\nu=1}^{6} \left(\frac{13}{\nu}\right) \left| R\left(\frac{\nu^2}{13}\right) \right| = 1 - 4 + 4 + 3 - 1 - 3 = 0.$$

Dle definice

$$\Re^* (z) = z - E^* (z),$$

kde $E^* (z) = E (z) = [z]$ pro z lomená, ale $E^* (z) = E (z) - \frac{1}{2}$ pro z celistvá, platí

$$E^* (z) = z - \frac{1}{2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2 n z \pi}{n \pi}. \tag{11}$$

Rovnici (I) lze pak psáti

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \mathbf{E}\left(\frac{s \nu^2}{\Delta}\right) = \frac{s}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \nu^2,$$

při čemž D hoví podmínkám (A). Rovnice poslední platí zejména pro všecky diskriminanty záporné.

Zejména je-li $D = -\Delta_0$ diskriminant základní (hlavní), bude pravá strana zníti

$$- s \Delta_0 \frac{2}{\tau} Cl (-\Delta_0),$$

kde $Cl (-\Delta_0)$ značí počet tříd kladných forem diskriminantu $-\Delta_0$ *) a symbol τ značí 2 v případě $\Delta_0 > 4$, $\tau = 4$ pro $\Delta_0 = 4$ a $\tau = 6$ pro $\Delta_0 = 3$.

Tedy máme pro záporné hlavní diskriminanty $-\Delta_0$

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta_0 - 1} \left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right) \mathbf{E}\left(\frac{s \nu^2}{\Delta_0}\right) = - s \Delta_0 \frac{2}{\tau} Cl (-\Delta_0); \tag{V}$$

avšak tu výsledek ten nepodává nic podstatně nového, neboť podržíme-li členy až po $\nu \leqq \frac{1}{2} \Delta_0$, v ostatních kladouce $\nu = \Delta_0 - \mu$, máme

$$\mathbf{E}\left(\frac{s \Delta_0^2 - 2 s \Delta_0 \mu + s \mu^2}{\Delta_0}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{s \mu^2}{\Delta_0} + s \Delta_0 - 2 s \mu\right)$$
$$= \mathbf{E}\left(\frac{s \mu^2}{\Delta_0}\right) + s (\Delta_0 - 2 \mu),$$

---

*) t. j. forem $a x^2 + b x y + c y^2$, $a > 0$, pro něž
$$b^2 - 4 a c = -\Delta_0.$$

takže v levo části

$$\sum_{\nu<\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)E\left(\frac{s\nu^2}{\Delta_0}\right)-\sum_{\mu<\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{-\Delta_0}{\mu}\right)E\left(\frac{s\mu^2}{\Delta_0}\right)$$

se zruší a zbývá na levé straně rovnice (V)

$$-\sum\left(\frac{-\Delta_0}{\mu}\right)(\Delta_0-2\mu)\,s=2s\sum_{\mu<\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{-\Delta_0}{\mu}\right)\mu-s\Delta_0\sum_{\mu<\frac{\Delta}{2}}\left(\frac{-\Delta_0}{\mu}\right)$$

tedy veličiny již známé.

Při označení

$$A(D)=\sum_{\nu=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu^2$$

můžeme hořejší výsledek psáti

$$\text{(VI)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)E\left(\frac{s\nu^2}{\Delta}\right)=\frac{s}{\Delta}A(D)$$

při podmínkách (A).

Tu pak se podaří agregát $A(D)$ zjednodušiti, resp. převésti na případ diskriminantu hlavního.

Uvedeme-li diskriminant na tvar

$$D=D_0Q^2,\quad -\Delta=-\Delta_0Q^2,$$

kde D_0 resp. $-\Delta_0$ je činitel hlavní (základní diskriminant), Q^2 vedlejší, obdržíme známým způsobem vzorce

$$\text{(VI}^1\text{)}\qquad A(-\Delta)=-\Delta^2\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta_0)\prod_q\left[1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right],$$

$$\text{(VI}^2\text{)}\qquad A(D)=A(D_0)\,Q^2\prod_q\left[1-\left(\frac{D_0}{q}\right)q\right],\quad D>0,$$

při čemž q probíhá v součinu různé kmenné činitele vedlejšího činitele Q.

Pro hlavní kladné diskriminanty jsem svým časem nalezl výraz

$$\text{(VI}^3\text{)}\qquad A(D_0)=-\frac{4D_0}{4-\left(\frac{2}{D_0}\right)}\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}D_0\right]}\left(\frac{D_0}{\nu}\right)\nu.$$

Tyto vzorce mohou sloužiti k vyjádření součtu (VI) pro případ, že diskriminant D hoví podmínkám (A).

XXXX.

Na konec uvažujme ještě součet

$$L = \sum_{\alpha=1}^{\Delta_1} \sum_{\beta=1}^{\Delta_2} \left(\frac{D_1}{\alpha}\right)\left(\frac{D_2}{\beta}\right) E\left(\frac{s\,\Delta_2}{\Delta_1}\alpha^2 + \frac{s\,\Delta_1}{\Delta_2}\beta^2\right),$$

v němž D_1, D_2 jsou dva diskriminanty nesoudělné, Δ_1, Δ_2 pak jejich absolutní hodnoty; za pomoci vzorce (11) obdržíme pro tento součet vyjádření analytické

$$(\gamma) \qquad L = \sum\sum\left(\frac{D_1}{\alpha}\right)\left(\frac{D_2}{\beta}\right)\left(\frac{s\,\Delta_2\,\alpha^2}{\Delta_1} + \frac{s\,\Delta_1\,\beta^2}{\Delta_2}\right) +$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{1}{n\pi} \quad \mathrm{Im.}\ H\,(D_1, n\,s\,\Delta_2)\ H\,(D_2, n\,s\,\Delta_1).$$

Podle (4) bude

$$H\,(D_1, n\,s\,\Delta_2)\ H\,(D_2, n\,s\,\Delta_1) = \varepsilon\, H\,(D_1\,D_2, n\,s)$$

a tedy

$$\sum \frac{1}{n\pi} \quad \mathrm{Im.}\ H\,(D_1, n\,s\,\Delta_2)\ H\,(D_2, n\,s\,\Delta_1)$$

$$= \varepsilon \sum \frac{1}{n\pi} \quad \mathrm{Im.}\ H\,(D_1\,D_2, n\,s$$

$$= -\varepsilon \sum_1^{\Delta_1 \Delta_2} \left(\frac{D_1\,D_2}{\nu}\right) \Re\left(\frac{s\,\nu^2}{\Delta_1\,\Delta_2}\right).$$

Poněvadž ε se liší od 1 pouze v případě záporných diskriminantů, kdy výrazy se rovnají nulle, možno tu klásti vesměs $\varepsilon = 1$. Mimo to je první část pravé strany v (γ) identicky nullou, a máme tedy

$$(\mathrm{VII}) \qquad \sum_1^{\Delta_1 \Delta_2} \left(\frac{D_1\,D_2}{\nu}\right) \Re\left(\frac{s\,\nu^2}{\Delta_1\,\Delta_2}\right) +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{\Delta_1} \sum_{\beta=1}^{\Delta_2} \left(\frac{D_1}{\alpha}\right)\left(\frac{D_2}{\beta}\right) E\left(\frac{s\,\Delta_2}{\Delta_1}\alpha^2 + \frac{s\,\Delta_1}{\Delta_2}\beta^2\right) = 0.$$

Okolnost, která odtud vychází, že totiž součet

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\nu}\right) \Re\left(\frac{s\,\nu^2}{\Delta}\right)$$

je číslo celistvé, jakmile diskriminant D je součin dvou diskriminantů nesoudělných, vychází přímo bez tohoto omezení z identity

$$\Phi = \frac{s}{\Delta} \sum_1^{\Delta} \left(\frac{D}{\nu}\right) \nu^2 - \sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\nu}\right) \left[\frac{s\,\nu^2}{\Delta}\right],$$

jejíž druhá část v pravo je číslo celistvé, a první má hodnotu

$$\frac{s}{\Delta} A\,(D);$$

tu je však dle (VI^1) a (VI^2)

$$\frac{A\,(D)}{\varDelta}$$

pro $D = -\varDelta$ číslo celistvé, pro $D = +\varDelta$ pak celistvý násobek čísla

$$\frac{A\,(D_0)}{D_0},$$

které dle (VI^3) je celistvé, jakmile základní činitel diskriminantu D t. j. D_0 neobsahuje číslo 3 neb 5, ježto jest $4 - \left(\frac{2}{D_0}\right) = 3$ aneb 5. Je-li D_0 děliteno 3^{mi}, musí obsahovati ještě aspoň jednoho činitele tvaru $4\,k - 1$, a je tedy číslo $\varPhi$ v tom případě celistvé. Rovněž je tomu v případě, kdy $D_0 > 5$ je násobkem čísla 5, takže součet $\varPhi$ může býti lomeným jen v případě

$$D = 5\,Q^2$$

t. j. $D_0 = 5$. Tu skutečně pro $D = D_0 = 5$ při $s = 1$

$$\varPhi = \frac{1 - 4 - 4 + 1}{5} = -\frac{6}{5},$$

rovněž pro $D = 20 = 5 \,.\, 2^2$ ($D_0 = 5$, $Q = 2$) máme

$$\frac{1}{2}\,\varPhi = \frac{1 - 9 - 9 + 1}{20} = -\frac{4}{5},$$

číslo lomené.

V případě $D = 45 = 5 \,.\, 3^2$ jsou ve členech součtu $\varPhi$ čitatelé zlomků

$$1 - 4 + 16 - 19 + 31 - 34,$$

a sice každý čtyřikráte; bude tedy

$$\frac{1}{4}\,\varPhi\,(45) = -\frac{9}{45} = -\frac{1}{5}$$

opět lomené.