Matyáš Lerch
Poznámky o počtu tříd kvadratických forem

Věstník Král. čes. spol. nauk, II. tř., 20 (1911), 120–144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501596

Poznámky o počtu tříd kvadratických forem.

Podává *M. Lerch* v Brně.

I.

Známé Gaussovo „lemma", sloužící k důkazu zákona reciprocity kvadratických zbytků, souvisí s arithmetickým vyjádřením Legendreova symbolu, jež zní

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{\sum_h\left[\frac{2mh}{n}\right]},\quad\left(h=1,2,3,\ldots\frac{n-1}{2}\right),\tag{1}$$

při čemž původně n značí kladné číslo kmenné, ale podle širší Jacobiovy definice znamenati může libovolné kladné číslo liché, a m číslo s n nesoudělné.

Číslo [1])

$$\left[\frac{2mh}{n}\right]-2\left[\frac{mh}{n}\right]$$

je rovno nulle aneb jedné, podle toho jak číslo $\left[\frac{2mh}{n}\right]$ je sudé neb liché.

Znamenáme-li tedy i_m počet zlomku z řady $\frac{n-1}{2}$ členné

$$\frac{2m}{n},\ \frac{4m}{n},\ \frac{6m}{n},\ \ldots\ \frac{(n-1)m}{n},$$

které mají *liché celky*, bude lze na místě (1) klásti [2])

$$\left(\frac{m}{n}\right)=(-1)^{i_m}.\tag{2}$$

V theorii kvadratických forem podle Gausse a Dirichleta má jednoduchý význam součet

$$h=\sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}\left(\frac{\alpha}{n}\right)=\sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}(n-1)}(-1)^{i_\alpha}.\tag{3}$$

Formy v řečené theorii uvažované $ax^2+2bxy+cy^2$ mají střední člen $2b$ sudý a výraz b^2-ac sluje determinantem jejich.

Danému zápornému determinantu $-n$ odpovídá sice nekonečný počet forem, ale ty se rozpadávají v konečný počet tříd; a tento počet jest, podržíme-li pouze třídy t. z. primitivní, napsané (3) číslo h, je-li n číslo tvaru $4k+3$ prosté kvadratických dělitelů; při tom druhé vyjádření (3) předpokládá, že se vynechají místa α mající s n společné dělitele, takže rovnice (3) doslovně platí toliko pro čísla kmenná tvaru $4k+3$.

---

[1]) Hranatá závorka, jak v arithmetice zvykem, značí celky uzavřené veličiny.

[2]) O těchto věcech bližší vývoje nalezne čtenář kromě ve známých učebnicích také ve fryburské dissertaci: Marco Salvadori, Esposizione della Teoria delle somme di Gauss e di alcuni teoremi di Eisenstein. Pisa, Fratelli Nistri, 1904.

Toto číslo h, počet tříd kvadratických forem determinantu $-n$, tedy udává, oč jest v řadě

$$(4) \qquad i_1, i_2, i_3, \ldots i_{\frac{n-1}{2}}$$

sudých čísel více než lichých.

Tato interpretace vzorce (3) vede k tomu, aby se hledal součet čísel (4) vzatých kladně pro sudá i, záporně pro lichá i; odpověď je dána vzorcem

$$(5) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} (-1)^{i_\alpha} i_\alpha = \frac{1}{2} h \left(\frac{n-1}{2} - h\right),$$

kde h má udaný význam, a ovšem n značí kladné kmenné číslo tvaru $4k+3$.

Tak na př. pro $n = 11$ máme $h = 3$, existují tři t. zv. redukované formy

$$x^2 + 11y^2, \quad 3x^2 \pm 2xy + 4y^2,$$

kdežto forma téhož determinantu -11

$$2x^2 + 2xy + 6y^2$$

se nečítá jakožto imprimitivní.

Čísla i_α v tomto případě jsou

$$i_1 = 0, \; i_2 = 3, \; i_3 = i_4 = i_5 = 2,$$

takže výraz (3) skutečně

$$h = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 3$$

a rovnice (5) se tu verifikuje hodnotami

$$0 - 3 + 2 + 2 + 2 = \frac{5-3}{2} 3 = 3.$$

Výsledky (3) a (5) lze shrnouti tak, že: Nejen počet nýbrž také součet jest u sudých i_α větší než u lichých; a sice jest rozdíl u počtů číslo h, u součtů číslo $\frac{1}{2} h \left(\frac{n-1}{2} - h\right)$.

Důkaz věty (5) spočívá na základě analytickém, i lze jej vyvinouti elementárně na základě vzorce,[3]) který jsem odvodil před čtrnácti lety:

$$\Sigma \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) E\left(\frac{\alpha m}{\Delta}\right) = -\left[m - \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right] \frac{2}{\tau} Cl(-\Delta).$$

II.

V Kroneckerově úpravě theorie kvadratických forem uvažují se formy

$$(a, b, c) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

bez ohledu na paritu středního členu b; výraz

$$b^2 - 4ac = D$$

sluje *diskriminant* formy; ten je buď tvaru $4k$ neb $4k+1$.

---

[3]) Bulletin des Sciences mathématiques, 2. řada, roč. 21 (1897).

U forem diskriminantu sudého je b sudé a obě theorie liší se toliko tím, že se v úpravě Gauss-Dirichletově píše $\frac{b}{2}$ za b, a číslo $\frac{D}{4}$ nazývá determinantem.

Formy determinantu $\frac{D}{4}$ splývají s formami diskriminantu D.

Naproti tomu u forem diskriminantu lichého D je b liché, v kterémžto případě Gauss a Dirichlet násobí formu číslem 2, aby obdrželi formu $(2a, 2b, 2c)$ se sudým členem středním; její determinant je pak $b^2 - 2a \cdot 2c = D$; tyto formy mají dělitele 2, nejsou primitivní; Gauss a Dirichlet je nazývají *nevlastně primitivní*, nemají-li jiných dělitelů (lichých).

U Kroneckerovy úpravy toto rozeznávání na formy primitivní vlastní a nevlastní odpadá; forma $(2a, 2b, 2c)$ tak jako každá forma (ad, bd, cd) prostě není primitivní.

Nevlastně primitivní formy determinantu D existují pouze pro D tvaru $4k+1$; ony však veškery formy determinantu D nevyčerpávají; existují totiž ještě formy vlastně primitivní $(a_1, 2b_1, c_1)$ determinantu $D = b_1^2 - a_1 c_1$, v nichž a_1 neb c_1 je liché; ty u Kroneckera jsou prostě formy diskriminantu $4D = 4b_1^2 - 4a_1 c_1$.

Přechod od úpravy Kroneckerovy k úpravě Gauss-Dirichletově je tedy velmi snadný, a poněvadž úprava Kroneckerova je značně *přehlednější*, náleží jí bezpodmínečně přednost. Ve skutečnosti veškery základní výsledky této theorie pocházejí od Dirichleta, a jest to skutečně pouze *úprava*, kterou se obě theorie liší.

Budu se tedy v následujícím vesměs vyjadřovati toliko ve smyslu theorie Kroneckerovy.

Formy (ad, bd, cd) s dělitelem d a diskriminantu D vzniknou z primitivních forem (a, b, c) diskriminantu $\frac{D}{d^2}$. Proto stačí se omeziti na vyšetření forem primitivních. Budeme znamenati symbolem $Cl(D)$ počet tříd primitivních forem diskriminantu D, a je-li diskriminant záporný, vynecháme ještě třídy záporné.[4])

V theorii této vyskytuje se rozsáhlou měrou *znaménko* Legendreovo z theorie kvadratických zbytků.

Je to symbol

$$\left(\frac{k}{p}\right) = \pm 1,$$

který v případě kladného *kmenného* p je definován shodou

$$k^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{k}{p}\right) \pmod{p}.$$

Jinak řečeno platí

$\left(\frac{k}{p}\right) = +1$, je-li k kvadratickým zbytkem vůči modulu p

$\left(\frac{k}{p}\right) = -1$, „ k „ nezbytkem „ p

---

[4]) Zde totiž a, c mají společné znamení, které nazýváme znamením formy; forma $(-a, -b, -c)$ vznikne z (a, b, c) bezprostředně výměnou znamení, a mimo to veškery formy téže třídy v tomto případě mají stejné znamení.

O dvou kladných číslech kmenných p, q platí zákon reciprocity

(1) $$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

Jacobi rozšířil symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ na případ složeného jmenovatele

Je-li
$$P=p'p''p'''\ldots.$$
součin čísel kmenných, která nemusí býti vesměs různa, klade Jacobi
$$\left(\frac{k}{P}\right)=\left(\frac{k}{p'}\right)\left(\frac{k}{p''}\right)\left(\frac{k}{p'''}\right)\ldots$$
a mimo to připouští jmenovatele záporné, definuje
$$\left(\frac{k}{-P}\right)=\left(\frac{k}{P}\right).$$

Pro dvě lichá čísla kmenná neb složená P, Q, pokud jsou *nesoudělná*, platí zákon reciprocity jako výše
$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right)=(-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}$$
s podmínkou, že aspoň jedno z obou čísel je kladné.

Kronecker udělil Legendreovu symbolu nejobecnější význam, aby docílil jednoduchosti v Dirichletových výsledcích. Klade
$$\left(\frac{P}{Q}\right)=0,$$
jakmile čísla P, Q mají společného dělitele > 1, tedy zejména
$$\left(\frac{0}{Q}\right)=\left(\frac{P}{0}\right)=0;\quad \text{dále}\left(\frac{P}{2^m n}\right)=\left(\frac{2}{P}\right)^m\left(\frac{P}{n}\right),$$
čímž zavedeni též sudí jmenovatelé.[5])

Zejména jednoduché jsou vlastnosti symbolu, kdy čítatel je diskriminant kladný nebo záporný.

Diskriminantem je číslo D buď tvaru $4k+1$ aneb tvaru $4k$.

1. $\left(\frac{D}{m}\right)=\left(\frac{m}{D}\right)$, $m>0$, D liché.

2. $\left(\frac{D}{m+k\,|D|}\right)=\left(\frac{D}{m}\right)$, $m>0$, $k>0$.

3. $\left(\frac{D}{|D|-m}\right)=\left(\frac{D}{m}\right)$ sgn. D, $0<m<|D|$.

---

[5]) Pro přehled vlastností v. M. Salvadori l. c.

4. $\left(\frac{P \pm kQ}{Q}\right) = \left(\frac{P}{Q}\right)$ pro lichá Q.

5. $\sum\limits_{m=1}^{|D|}\left(\frac{D}{m}\right) = 0$,

6. $\sum\limits_{m=1}^{D}\left(\frac{D}{m}\right) m = 0,\ D > 0$.

Poznamenejme ještě

$$\left(\frac{2}{k}\right) = (-1)^{\frac{k^2-1}{8}},$$

takže symbol je $+1$ při $k \equiv \pm 1 \pmod{8}$ a -1 při $k \equiv \pm 3 \pmod{8}$.

Je-li d^2 čtvercový dělitel diskriminantu D, a při tom podíl

$$\frac{D}{d^2} \text{ opět diskriminantem } D',$$

existují formy $(a'd,\ b'd,\ c'd)$ diskriminantu D s dělitelem d', a naopak.

Diskriminant sluje *hlavní* či *základní*, jsou-li veškery jeho formy primitivní. Každý diskriminant lze uvésti na tvar

$$Q^2 D_0,$$

kde D_0 je diskriminant základní.

Hlavní diskriminanty jsou buď

1. čísla lichá, kladná neb záporná, tvaru $4k + 1$, která se jeví jako součin kmenných čísel vespolek různých; aneb
2. sudá čísla tvaru $4P$, $P = 4k + 3$, aneb
3. čísla tvaru $8P$, $P = 2k + 1$,

při čemž $|P|$ v obou případech je součin čísel kmenných vespolek různých.

Existuje jednoduchý vztah mezi čísly $Cl\,(DS^2)$ a $Cl\,(D)$, a proto stačí se omeziti na diskriminanty hlavní.

Pro ty znějí základní výsledky Dirichletovy v Kroneckerově symbolice takto:

(1) $$Cl\,(-\Delta) = -\frac{\tau}{2}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta},$$

(2) $$Cl\,(D) \log E\,(D) = -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D},\ D > 0,$$

při čemž

$$\begin{aligned} \tau &= 2 \text{ pro } \Delta > 4 \\ 4 &\ \ ,, \ \ \Delta = 4 \\ 6 &\ \ ,, \ \ \Delta = 3, \end{aligned}$$

dále u kladných diskriminantů

$$E\,(D) = \frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

kde T, U značí nejmenší kladná čísla, hovící Fermatově rovnici

$$T^2 - D\,U^2 = 4.$$

Tyto vzorce mají pro základní diskriminanty platnost obecnou; ale v referátech o theorii Dirichletově z pravidla ustupují do pozadí, čímž jednotnost theorie trpí. Různé případy Dirichletovy zahrnuty jsou v následujících, pokud jde o diskriminanty záporné.

Především vzorec

$$\sum_{k=1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{2}{\tau}Cl(-\Delta) \tag{3}$$

má stejnou platnost jako (1) a jest poněkud jednodušší.

Dále

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{4}D]}\left(\frac{D}{h}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4D) \tag{4}$$

podává počet tříd pro diskriminanty tvaru $4P$, zvolíme-li $D = -P$, což je číslo tvaru $4k+1$, tedy diskriminant, a sice v našem případě kladný.

Na př. pro $D = 13$ máme tu stanoviti

$$\left(\frac{13}{1}\right)=1,\quad \left(\frac{13}{2}\right)=-1,\quad \left(\frac{13}{3}\right)=1,$$

načež

$$\frac{1}{2}Cl(-52)=1-1+1=1,\quad Cl(-52)=2.$$

Dospěli bychom k témuž výsledku počítajíce přímo dle (3) k čemuž ovšem třeba klásti $\Delta = 52$, a stanoviti

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \text{ od } \nu = 1 \text{ až do } \nu = 26; \text{ je však tu}$$

$$\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)=0,\quad \left(\frac{2}{\Delta}\right)=0$$

a proto zbude

$$2\,Cl(-52)=\left(\frac{-52}{1}\right)+\left(\frac{-52}{3}\right)+\left(\frac{-52}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{-52}{25}\right)=$$

$$=1-\left(\frac{13}{3}\right)+\left(\frac{13}{5}\right)-\left(\frac{13}{7}\right)+\left(\frac{13}{9}\right)-\left(\frac{13}{11}\right)\pm\ldots+\left(\frac{13}{25}\right).$$

Znaménka $\left(\frac{13}{\nu}\right)$ pro $\nu = 1, 3, 5, \ldots$ jsou postupně

$$+\;+\;-\;-\;+\;-\;0\;-\;+\;-\;-\;+\;+$$

a vyjde

$$2\,Cl(-52)=4,\quad Cl(-52)=2.$$

Případy, kde diskriminant je tvaru $8P$, jsou dva: $P = 4k+3$ a $P = 4k+1$; poněvadž máme na mysli diskriminanty záporné, máme tvary

$$-8D \text{ a } -8\Delta,$$

při čemž D a $-\Delta$ jsou liché diskriminanty základní.

Pro ty nacházíme přiměřené zjednodušení ve vzorcích

$$(5)\qquad \sum_{h=1}^{[\frac{1}{8}D]}\left(\frac{D}{h}\right)-\sum_{h=[\frac{3}{8}D]+1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{h}\right)=\frac{1}{2}Cl\,(-8\,D),$$

$$(6)\qquad \sum_{[\frac{1}{8}\varDelta]+1}^{[\frac{3}{8}\varDelta]}\left(\frac{-\varDelta}{h}\right)=\frac{1}{2}Cl\,(-8\,\varDelta).$$

Abychom stanovili na př. $Cl\,(-40)$, užijeme vzorce (5), poněvadž $D=5$ je diskriminant; vyjde

$$\frac{1}{2}Cl\,(-40)=0-\left(\frac{5}{2}\right)=1.$$

Pro $Cl\,(-56)$ dlužno užít (6), ježto $-\varDelta=-7$ je diskriminant; vyjde

$$\frac{1}{2}Cl\,(-56)=\left(\frac{-7}{1}\right)+\left(\frac{-7}{2}\right)=2,\quad Cl\,(-56)=4.$$

Tato Dirichletova zjednodušení obecných vzorců (1) a (3) jsou zvláštní případy vztahu

$$(7)\qquad \sum_{\alpha=1}^{[\frac{1}{2}\varDelta]}\left(\frac{-\varDelta}{\alpha}\right)\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha D}{\varDelta}\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl\,(-\varDelta D),$$

$$\sum_{\alpha=1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha\varDelta}{D}\right]}\left(\frac{-\varDelta}{\nu}\right)=-\frac{1}{2}Cl\,(-\varDelta D),$$

jejž jsem nalezl r. 1898 a vyložil ve svém spise[*]), poctěném hlavní cenou akademie věd v Paříži (r. 1900).

Dospěti lze k němu různými způsoby; jedna z cest velmi pozoru hodných má za východisko vzorec velmi obecný:

$$(8)\quad Cl\,(D_1D_2\ldots D_r)=(-1)^{\nu+1}\sum_{h_1=1}^{\varDelta_1-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\ldots\sum_{h_r=1}^{\varDelta_r-1}\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\Re\left(\frac{h_1}{\varDelta_1}+\ldots+\frac{h_r}{\varDelta_r}\right),$$

v němž $D_1, D_2, \ldots D_r$ značí diskriminanty základní, z nichž $2\,\nu+1$ jsou záporné, a které mají absolutní hodnoty $\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots \varDelta_r$. Symbol $\Re\,(z)=z-[z]$ značí nejmenší kladný zbytek veličiny z.

Pro $r=1$, tedy $\nu=0$, splývá (8) se vzorcem (1), neboť pak

$$\Re\left(\frac{h}{\varDelta}\right)=\frac{h}{\varDelta}.$$

Vzorec (7) vychází z případu $r=2$ po jednoduchých úpravách.

---

[*]) Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficientes entiers. Otištěno r. 1906 v Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, T. XXXIII. Částečně dříve s některými změnami v Acta mathematica sv. 29 (1905) a 30 (1906).

Příklady diskriminantů $-559 = 13(-43)$ a $-1159 = 21(-59)$ ukazují, že vzorec (7) může vésti rychleji k cíli než stanovení forem redukovaných.

Podobné, leč jiné podstaty jsou vzorce

$$(9)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{2}\, Cl\,(-\Delta),\ \Delta > 4,$$

$$(10)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\, Cl\,(-\Delta),\ \Delta > 4,$$

$$(11)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{-\Delta}{3}\right)-\left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{2}\, Cl(-\Delta),\ \Delta > 4$$

Na př. pro $\Delta = 24$ podá (11), poněvadž pro $\alpha = 2, 3, 4$ Legendreova znaménka jsou nullami, vztah

$$1 = \frac{1}{2}\, Cl\,(-24),\ Cl\,(-24) = 2.$$

Naproti tomu (10) podává v jiném postupu výsledek souhlasný:

$$\left(\frac{-24}{1}\right) + \left(\frac{-24}{5}\right) = 2 = Cl\,(-\Delta)$$

Ze vzorce (10) máme pro $\Delta = 8k + 7$, kdy $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 1$,

$$\sum_{\alpha=1}^{2k+1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = Cl\,(-\Delta),\ \sum_{\alpha=2k+2}^{4k+3} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0,\ (\Delta = 8k+7),$$

při čemž druhá část vychází z (3); ale v případě $\Delta = 8k + 3$

$$\sum_{\alpha=1}^{2k} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 0,\ \sum_{\alpha=2k+1}^{4k+1} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = 3\, Cl\,(-\Delta),\ (\Delta = 8k+3).$$

Levá strana rovnice (3) sestává tedy ze dvou částí

$$(10^*)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),\ \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

z nichž v případě *lichého* diskriminantu vždy jedna zmizí, druhá je pak

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) Cl(-\Delta).$$

V případě sudého diskriminantu je prvá strana (10) rovna $Cl\,(-\Delta)$; tedy tu jsou oba agregáty (10*) rovny číslu $Cl\,(-\Delta)$.

V každém případě je tím počet znamének redukován na polovici u porovnání se vzorcem (3).

Následující vzorec

$$(12) \qquad \sum_{1}^{[\frac{1}{10}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1+\left(\frac{\Delta}{5}\right)}{2} Cl(-\Delta)$$

byl odvozen pro čísla tvaru $\Delta = 8k + 3$.

Aby pravá strana nebyla nullou, dlužno by

$$1 = \left(\frac{8k+3}{5}\right) = \left(\frac{3k+3}{5}\right) = -\left(\frac{k+1}{5}\right); \quad \left(\frac{k+1}{5}\right) = -1$$

nastane pro $k + 1 = 5n + 2, 5n + 3$, tedy pro $k = 5n + 1, 5n + 2$; pravá strana (12) je rovna $Cl(-\Delta)$ pro $\Delta = 40n + 11$ a pro $\Delta = 40n + 19$, ale je nullou pro $\Delta = 40n + 3$, i pro $\Delta = 40n + 27$.

Obecný vzorec zní:[7]

$$\sum_{1}^{[\frac{1}{10}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{4} Cl(-5\Delta) +$$

$$+ \frac{3+\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{5}{\Delta}\right)-\left(\frac{10}{\Delta}\right)}{2\tau} Cl(-\Delta),$$

Δ nesoudělné s 5; je-li tedy $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 1$, t. j. $\Delta = 8k + 7$, zní pravá strana

$$Cl(-\Delta) - \frac{1}{2} Cl(-5\Delta),$$

takže ji nelze redukovati na výraz závislý na jednom diskriminantu.

III.

Hlavní část pařížského Mémoiru tvoří analytické výrazy pro počet tříd; jeden z četných tam podaných vzorců zní (předpokládám $\Delta > 4$)

$$(1) \qquad Cl(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} M + \frac{2}{\sqrt{\pi}} N,$$

$$M = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z \pi}{\Delta}}, \quad N = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta z}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Vzorec podává vlastně vztah mezi dvěma funkcemi proměnné z, již k vůli jednoduchosti předpokládáme realnou a tedy kladnou, ale může sloužiti k stanovení počtu tříd na př. tím, že se zvolí $z = 1$, pokud ovšem výpočet řad M a N není obtížný.

---

[7]) Pařížské vydání obsahuje více vzorců tohoto druhu nežli vydání v Actech.

Výpočet možno tak zaříditi, že se určí hodnota řad

$$(2) \qquad \mathfrak{M} = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{n}\right) e^{-\frac{n^2 s \pi}{\Delta}}, \quad \mathfrak{N} = \sum_1^\infty \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta s}}}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

které vzniknou z řad M a N tím, že veškery Legendreovy symboly nahradíme jednotkami.

Když tyto veličiny $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ jsou známy, vypočtou se hodnoty M a N tím, že se od nich odečtou v dostatečném množství členy příslušných řad, a sice členy

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -1 \text{ dvakráte,}$$

a členy

$$\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 0 \text{ jednoduše.}$$

Stanovení sbližných hodnot pro M a N lze provésti pomocí semikonvergentních rozvojů, které jsem uvažoval na konci svého pařížského mémoiru;[8]) v podstatě jsou tyto rozvoje již delší dobu známy hlavně zásluhou Soninovou, původním byl však způsob ocenění zbytku, na němž zde mnohem více záleží než u řad konvergentních.

Tam na str. 239 podán vzorec $(0 < \sigma < 1,\ a > 0)$

$$(3) \qquad \frac{e^{-a^2\sigma^2}}{\sigma} + \sum_1^\infty \frac{e^{-a^2(n+\sigma)^2}}{n+\sigma} + \sum_1^\infty \frac{e^{-a^2(n-\sigma)^2}}{n-\sigma} = \psi(1) - \psi(\sigma) - \psi(1-\sigma)$$

$$-\log a^2 + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{a^{2\nu}}{\nu} \cdot 2\sum_1^\infty \frac{\cos 2 n \sigma \pi}{(n\pi)^{2\nu}} + R,$$

a ten si upravíme pro případ nekonečně malého σ.

Veličiny ψ znamenají, jak dlužno poznamenati, logarithmickou derivaci funkce gamma

$$\psi(\sigma) = \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)},$$

takže $-\psi(1)$ jest Eulerova konstanta $0{,}577\ldots = \gamma$.

Tu převeďme člen $\psi(\sigma)$ na levou stranu a uvažme, že z vlastnosti

$$\psi(\sigma) = \psi(\sigma+1) - \frac{1}{\sigma}$$

plyne

$$\psi(\sigma) + \frac{e^{-a^2\sigma^2}}{\sigma} = \psi(1+\sigma) + \frac{e^{-a^2\sigma^2} - 1}{\sigma},$$

a odtud

$$\lim_{\sigma=0} \left[\psi(\sigma) + \frac{e^{-a^2\sigma^2}}{\sigma}\right] = \psi(1) = -\gamma;$$

[8]) Ve vydání v Actech byla tato stať vynechána.

zbude tedy po přechodu ke krajní hodnotě $\sigma = 0$

$$2\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-a^2n^2}}{n} = \gamma - \log a^2 + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\frac{a^{2\nu}}{\nu}\,2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2\nu}} + 2R_m$$

při čemž $2R_m$ jest absolutně menší než první vynechaný člen násobený veličinou

$$\sqrt{\frac{(m+\frac{3}{2})^{m+\frac{3}{2}}}{(m+\frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}}}} \sim \sqrt{e(m+\tfrac{3}{2})}\,;$$

zde pravá strana udává sblížnou hodnotu multiplikátoru pro dosti veliká m, a ten případ nastane pro malé hodnoty a; pak ve zbylém konečném agregátu o $m-1$ členech podržíme při výpočtu jen prvních několik členů, poněvadž ostatní mají nepatrné hodnoty.

Značí-li

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_2 = \frac{1}{30},\quad B_3 = \frac{1}{42},\quad B_4 = \frac{1}{30},\ldots.$$

kladná čísla Bernoulliova, platí jak známo

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2\nu}} = \frac{4^\nu B_\nu}{(2\nu)!}\,,$$

a tak bude hledaný semikonvergentní rozvoj zníti

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{e^{-a^2n^2}}{n} = \frac{\gamma}{2} - \log a + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{4^\nu B_\nu}{(2\nu)!}\,\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\nu\sqrt{\pi}}\,a^{2\nu} + R_m\,, \tag{4}$$

kde zmíněná povaha zbytku R_m dovoluje zastaviti rozvoj, jakmile se vyskytnou malé členy.

Podle tohoto vzorce budeme počítati řadu $\mathfrak{M}$, volíce $z = 1$.

Zde

$$a^2 = \frac{\pi}{\Delta}$$

je malé pro velké diskriminanty, a poněvadž zde již první člen

$$\frac{4B_1}{2!}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\,a^2 = \frac{1}{12}\,a^2 = \frac{\pi}{12\Delta}\,,$$

vznikne při stanovení veličiny

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\mathfrak{M}$$

chyba asi

$$\frac{1}{12\sqrt{\Delta}}\,,$$

podržíme-li na pravé straně (4) pouze první dva členy.

Tedy

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\mathfrak{M} \doteq \frac{1}{2}\log\Delta\cdot\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} - \frac{\log\pi-\gamma}{2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\,; \tag{4'}$$

tento výraz podává dvě desetinná místa správná, jakmile $\Delta > 100$, a větší přesnost tu požadovati nemá účelu.

Běží ještě o veličinu

$$\mathfrak{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{na}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\,;$$

derivováním plyne

$$\frac{d\mathfrak{R}}{da} = -\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2 a^2}\,;$$

derivujeme-li pak (4) a krátíme výsledek $2a$, plyne

$$-\sum_{1}^{\infty} n e^{-n^2 a^2} = -\frac{1}{2a^2} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{4^\nu B^\nu}{(2\nu)!} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}} a^{2\nu-2} + R' \equiv \frac{d\mathfrak{R}}{da},$$

takže integrací vyjde

$$(a) \qquad \mathfrak{R} = K + \frac{1}{2a} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{4^\nu B_\nu}{(2\nu)!} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^{2\nu-1}}{2\nu-1} + R'',$$

kde veličiny R' a R'' bude lze opět zanedbati, což vychází z výrazů pro tyto veličiny na u. m. podaných.

Zbývá ještě stanoviti integrační konstantu K.

K tomu cíli napíšeme rovnici (a) pro a, a pro $2a$, a utvoříme výraz

$$2\,\mathfrak{R}(2a) - \mathfrak{R}(a) = K + (a)\,,$$

kde symbol (a) znamená veličinu nekonečně malou zároveň s a; tedy máme infinitesimalní rovnici

$$K \backsim 2\,\mathfrak{R}(2a) - \mathfrak{R}(a)\,,$$

to jest

$$(b) \qquad K \backsim \sum_{1}^{\infty} 2 \int_{2na}^{\infty} e^{-x^2}\, dx - \sum_{1}^{\infty} \int_{na}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Tu jest pak

$$\int_{u}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{u^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

a dle známého vztahu Kummerova

$$\Gamma(s) \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^s} = \int_{0}^{\infty} e^{-\omega(1+x)} \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x}$$

bude tedy pro $s = \frac{1}{2}$

$$2\sqrt{\pi} \int_{u}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-u^2(1+x)} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\,.$$

čímž lze ekvivalenci (b) uvésti na tvar

$$(c)\qquad 2\sqrt{\pi}\,K \sim \int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\left\{2\sum_1^\infty e^{-4n^2a^2(1+x)} - \sum_1^\infty e^{-n^2a^2(1+x)}\right\}.$$

Ze vzorce Cauchyova a Poissonova

$$1 + 2\sum_1^\infty e^{-n^2v^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(1 + 2\sum_1^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2}{v^2}}\right)$$

však plyne

$$(d)\qquad \sum_1^\infty e^{-n^2v^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{v} + \frac{\sqrt{\pi}}{v}\sum e^{-\frac{n^2\pi^2}{v^2}},$$

kde poslední řada pro malá v intensivně se blíží nulle.

Tu jest pak v (c) integrální složka

$$\int\limits_{N_2}^\infty$$

pro $N_2 \geqq \frac{1}{a^2}$ absolutně menší než veličina tvaru

$$A\int\limits_{N_2}^\infty \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{2A}{\sqrt{N_2}},\quad (A \text{ jistá konstanta}),$$

dále integrál

$$\int\limits_{N_1}^{N_2}$$

se užitím transformace (d) ukáže býti menším než jistá veličina tvaru

$$B\int\limits_{N_1}^{N_2} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = 2B\left(\frac{1}{\sqrt{N_1}} - \frac{1}{\sqrt{N_2}}\right),\quad (B \text{ jistá konstanta}).$$

Zvolíme-li tedy N_1 nezávislé na a ale dosti veliké, bude pro dostatečně malá a

$$2\sqrt{\pi}\,K = \int\limits_0^{N_1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}\left\{-\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a}\,e^{-\frac{\pi^2}{a^2(1+x)}}\right)\right\}dx + \left(\frac{1}{\sqrt{N_1}}\right),$$

kde symbol

$$\left(\frac{1}{a}\,e^{-\frac{\pi^2}{a^2(1+x)}}\right)$$

značí veličinu infinitesimalně rovnomocnou s veličinou v závorce.

Odtud patrno, že

$$2\sqrt{\pi}K = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

což dle známého Eulerova vzorce (aneb též přímo substitucí $x = z^2$) podá

$$K = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Tudíž zní (a)

$$(5)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\int_{na}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} + \sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{4^\nu B_\nu}{(2\nu)!}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{a^{2\nu-1}}{2\nu-1} + R_m;$$

dle tohoto vzorce bude s postačujícím sblížením $\left(\text{při } a^2 = \frac{\pi}{\Delta}\right)$

$$(5^1)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{N} \doteq \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Z rovnice (1) plyne

$$Cl\,(-\Delta) < \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\,\mathfrak{M} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{N},$$

kterážto zajímavá nerovnost po dosazení hodnot (4^1) a (5^1) zní

$$(6)\qquad Cl\,(-\Delta) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left(\log\Delta + \gamma - \log\pi + 2\right) - \frac{1}{2}$$

čili

$$(6^1)\qquad Cl\,(-\Delta) < \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\left(\log\Delta + 1{,}4324758\right) - \frac{1}{2}.$$

Tak nacházíme pro $\Delta = 439$, že

$$Cl\,(-439) < 24{,}5$$

a skutečně jest

$$Cl\,(-439) = 15.$$

Již tento číselný příklad ukazuje, že počet členů, jež třeba od $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ odečísti, aby se docílilo dostatečného sblížení, není nepatrný; k otázce té se jednou vrátíme.

Obraťme se nyní k formám kladného hlavního diskriminantu; jeden ze vzorců mnou pro ně dokázaných jest

$$(7)\qquad Cl\,(D)\log E\,(D) = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\,K + L,$$

$$K = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{\varepsilon\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad L = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{D\varepsilon}}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}.$$

Podobně jako v předešlém případě uvažovati budeme řady kladných členů

$$(8)\qquad \mathfrak{K}\,(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{na}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,\quad \mathfrak{L}\,(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n^2a^2}^{\infty} e^{-x}\,\frac{dx}{x}.$$

Tu máme nejprvé derivováním

$$\frac{d\mathfrak{K}}{da} = -\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2a^2},$$

a užije-li se transformačního vzorce (*d*)

$$-\sum_1^\infty e^{-n^2a^2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2a} - \frac{\sqrt{\pi}}{a}\sum_1^\infty e^{-\frac{n^2\pi^2}{a^2}},$$

vyjde integrací

$$\mathfrak{K} = A + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\log a - \sqrt{\pi}\sum_1^\infty\int_0^a e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\frac{dx}{x}$$

je však

$$\int_0^a e^{-\frac{n^2\pi^2}{x^2}}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_{\frac{n^2\pi^2}{a^2}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

a tedy nacházíme vztah

(9) $$\mathfrak{K}(a) = A + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\log a - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{a}\right).$$

Dosadíme-li sem $a = \sqrt{\pi}$, máme

$$A = \mathfrak{K}(\sqrt{\pi}) + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\mathfrak{L}(\sqrt{\pi}) + \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\log\pi - \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Je však též

$$\mathfrak{K}(a) = \sum_{n=1}^\infty\int_a^\infty e^{-n^2x^2}dx = \int_a^\infty \varphi(x)\,dx,$$

$$\mathfrak{L}(a) = 2\sum_{n=1}^\infty\int_a^\infty e^{-n^2x^2}\frac{dx}{x} = 2\int_a^\infty \varphi(x)\frac{dx}{x},$$

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2x^2}.$$

Tedy z posledního výrazu pro A vychází

$$B = A + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\log\pi = \int_{\sqrt{\pi}}^\infty \varphi(x)\,dx + \sqrt{\pi}\int_{\sqrt{\pi}}^\infty \varphi(x)\frac{dx}{x}.$$

Bude však pohodlnější operovati s funkcí

$$\psi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2x\pi},$$

takže

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{x^2}{\pi}\right),$$

$$\int_{\sqrt{\pi}}^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_1^\infty \psi(x)\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\int_{\sqrt{\pi}}^\infty \varphi(x)\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \psi(x)\frac{dx}{x},$$

a dle toho

$$(a)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}B = \int_1^\infty \psi(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_1^\infty \psi(x)\frac{dx}{x}.$$

Uvažujme nyní integrál

$$J = \int_0^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx = \sum_1^\infty \int_0^\infty e^{-n^2 x \pi} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}} \zeta(s)$$

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Známý Riemannův postup z jeho slavné práce o počtu čísel kmenných podává rozkladem

$$J = \int_0^1 \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

a substitucí $x = \frac{1}{x'}$ v první části

$$J = \int_1^\infty \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{-\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

V první části užije se vztahu

$$\psi\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\,\psi(x),$$

a vyjde

$$J = -\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-1} dx + \frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} dx +$$

$$+ \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{s+1}{2}} dx + \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx$$

čili

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx +$$

$$+ \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{s+1}{2}} dx$$

Tato Riemannova rovnice

$$(b)\qquad \int_1^\infty \psi(x)\, x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{s+1}{2}} dx = \frac{1}{1-s} + \frac{1}{s} + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

byla sice dokázána pro s, jichž realná část převyšuje 1, ale v této formě má všeobecnou platnost a podává propagaci funkce $\zeta(s)$; pro $s = 0$ splývá levá strana s výrazem (a), takže

$$(c) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} B = 1 + \lim_{s=0} \left[\frac{1}{s} + \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{\frac{s}{2}} \zeta(s) \right].$$

Zde závisí úspěch na znalosti funkce $\zeta(s)$ v okolí bodu $s = 0$; otázka ta řešena byla E. Schröderem[9]) pro obecnější funkce

$$R(w, s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^s},$$

jenž dokázal, že funkce ta se (pro $w > 0$) chová na místě $s = 0$ pravidelně a má tam rozvoj

$$R(w, s) = \left(\frac{1}{2} - w\right) + \log \frac{\Gamma(w)}{\sqrt{2\pi}} \, . \, s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \ldots .$$

Dříve již byl Kinkelin[10]) dokázal, že rozdíl

$$R(w, s) - \frac{1}{s-1}$$

je celistvá transcendenta vůči s, a že tedy platí rozvoj v celé rovině (s) konvergentní

$$R(w, s) = \frac{1}{s-1} - \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} + a_1(s-1) + a_2(s-1)^2 + \ldots .$$

Oba tyto výsledky stejně elegantní jako pozoruhodné vyskytují se v různých otázkách theorie čísel; jejich důkazy nalezne čtenář v různých rozpravách, které jsem vydal ve spisech České Akademie.

V rovnici (c) bychom tedy užili věty Schröderovy pro případ $w = 1$

$$\zeta(s) = -\frac{1}{2} - s \, . \log \sqrt{2\pi} + \ldots .$$

z níž ve spojení s řadami

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}} = \frac{2}{s} + \Gamma'(1) + \ldots .$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} = 1 - \frac{s}{2} \log \pi + \ldots ..$$

plyne

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = -\frac{1}{s} - \left[\frac{\Gamma'(1)}{2} - \frac{1}{2} \log \pi + 2 \log \sqrt{2\pi}\right] + \ldots$$

Stálý člen má tu hodnotu

$$-\left[\frac{1}{2} \log \pi + \log 2 - \frac{1}{2} \gamma\right]$$

---

[9]) Zürich, Progr. Kantonsschule, 1867.
[10]) Programm d. Gewerbeschule Basel 1861—2.

a tedy máme z (c)

$$(d)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} B - 1 = -\left[\frac{1}{2}\log\pi + \log 2 - \frac{1}{2}\gamma\right],$$

kde γ značí Eulerovu konstantu. Levá strana má hodnotu

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} A - \frac{1}{2}\log\pi$$

a tedy po redukci

$$(9')\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} A = -\left(\log 2 - \frac{1}{2}\gamma\right) = -C$$

Při tomto označení máme z (9) vzorce

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}(a) = \log\dfrac{1}{a} + \dfrac{a}{\sqrt{\pi}} - C - \mathfrak{L}\left(\dfrac{\pi}{a}\right) \\ \mathfrak{L}(a) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a} + \log a - (C + \log\pi) - \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}\left(\dfrac{\pi}{a}\right). \end{cases}$$

Ze vzorce (7) plyne

$$Cl\,(D)\log E\,(D) < \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}\sqrt{D} + \mathfrak{L},\quad a = \sqrt{\frac{\pi}{D}};$$

veličiny

$$\mathfrak{K}\left(\frac{\pi}{a}\right) \text{ a } \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{a}\right)\sqrt{D}$$

jsou velmi malé a proto platí s nepatrnou chybou

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}\sqrt{D} + \mathfrak{L} = \sqrt{D}\left[\frac{1}{2}\log D + 1 - \frac{1}{2}\log\pi - C\right] - $$
$$- \frac{1}{2}\log D + 1 - \frac{1}{2}\log\pi - C\Big]$$

Klademe-li tedy

$$(11)\qquad K = 1 - \frac{1}{2}\log\pi - C = 1 + \frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\log\pi - \log 2$$

$$(11^a)\qquad K = 0{,}02309,$$

máme

$$(12)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}\sqrt{D} + \mathfrak{L} \doteq \sqrt{D}\left(\frac{1}{2}\log D + K\right) + K - \frac{1}{2}\log D$$

a tedy též

$$(13)\qquad Cl\,(D)\log E\,(D) < \sqrt{D}\left(\frac{1}{2}\log D + K\right) + K - \frac{1}{2}\log D$$

Pro tento účel nebylo však třeba stanoviti konstantu A vzorce (9) přesně, poněvadž nám tu stejně vyhoví číselná hodnota na 2 neb 3 decimálky.

Máme totiž přímo

$$-C = \frac{2}{\sqrt{\pi}} A = \mathfrak{L}\left(\sqrt{\pi}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}\left(\sqrt{\pi}\right) + \frac{1}{2}\log\pi - 1$$

tedy dle (11)

$$(11^b)\qquad K = \mathfrak{L}(\sqrt{\pi}) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathfrak{K}(\sqrt{\pi}).$$

Tu jest při označení

$$J_{\omega}(s) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x^s}$$

patrně

$$\int_{n}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{n^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}J_{n^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{n}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = J_{n}(1),$$

takže dle (11^b) a (8)

$$K = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Sigma\frac{1}{n}J_{n^2\pi}\left(\frac{1}{2}\right) + \Sigma J_{n^2\pi}(1), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

Pro $n \geqq 2$ možno integrály J počítati semikonvergentní řadou

$$J_{\omega}(s) = \frac{e^{-\omega}}{\omega^s}\left(1 - \frac{s}{\omega} + \frac{s(s+1)}{\omega^2} - \frac{s(s+1)(s+2)}{\omega^3} + \ldots .\right)$$

Bude

$$J_{4\pi}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-4\pi}}{2\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{8\pi} + \frac{3 \cdot \Theta}{64\pi^2}\right), \quad 0 < \Theta < 1,$$

a poněvadž

$$e^{-4\pi} = 0{,}00000348\ldots .$$

možno pro naše účely již členy $n = 2, 3, 4, \ldots.$ vynechati.

Podobně máme

$$J_{4\pi}(1) = \frac{e^{-4\pi}}{4\pi}\left(1 - \frac{1}{4\pi} + \frac{2\Theta}{16\pi^2}\right),$$

takže také v druhé řadě členy $n = 2, 3, 4, \ldots.$ vynecháme.

Zbude pak sbližná hodnota

$$K \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{\pi}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

Tu jest z tabulek pro funkci [11])

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\omega} e^{-x^2}\,dx = f(\omega)$$

$$f(\sqrt{\pi}) = f(1{,}7724) = 0{,}9878,$$

[11]) Jahnke u. Emde, Funktionentafeln, str. 36.

tedy

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 1 - f(\sqrt{\pi}) = 0{,}0122$$

dále[12]) po interpolaci

$$\int\limits_{\pi}^{\infty} e^{-x}\, \frac{dx}{x} = 0{,}01092$$

čímž vychází

$$K = 0{,}0231$$

jako výše.

V rovnici (13) přicházejí logarithmy přirozené; abychom si uspořili převádění v applikacích, přepišme jej na logarithmy desetinné, které znamenejme *Log*:

$$(13^*)\quad Cl\,(D)\,\mathrm{Log}\,\frac{T+U\sqrt{D}}{2} < \sqrt{D}\,\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,D + k\right) + k - \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,D$$

$$k = 0{,}01003$$

Poněvadž

$$T - U\sqrt{D} = \frac{4}{T+U\sqrt{D}},$$

je sblíženě

$$\mathrm{Log}\,T \doteq \mathrm{Log}\,(U\sqrt{D}) \doteq \mathrm{Log}\,E\,(D)\,,$$

jakmile čísla T, U jsou dosti veliká.

Podle tabulek na konci něm. překladu Legendrova spisu o theorii čísel [13]) jest pro

$$D = 561 = 3\,.\,11\,.\,17$$

$$\frac{1}{2}\,T = 522785,\quad \frac{1}{2}\,U = 22072$$

tedy

$$T = 1045570$$

$$\mathrm{Log}\,E\,(D) = 6{,}019,\quad \frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,D = 1{,}37448,\quad \sqrt{D} = 23{,}68$$

Pravá strana (13*)

$$\doteq 22{,}68 \times 1{,}37 + 0{,}24 = 31{,}3$$

tedy vychází

$$Cl\,(561) < \frac{31{,}3}{6{,}02} = 5, \ldots .$$

Jest odjinud známo, že počet tříd jest násobkem čísla 2^{n-1}, obsahuje-li diskriminant n různých čísel kmenných; v našem případě $n = 3$, tedy Cl (561) dělitelen 4; tudíž bude $Cl\,(561) = 4$.

Dirichletův vzorec lze upraviti na tvar

$$Cl\,(D)\,\log E\,(D) = -2\sum_{h=1}^{\left[\frac{D}{2}\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D}\,;$$

---

[12]) Ibid. str. 22.

[13]) Tabulky, jež počátkem minulého století vydal C. Degen v Kodani, jsou dnes velmi vzácný.

kdybychom ho měli v našem případě $D = 561$ užiti, musili bychom určiti bez mála 280 znamének Legendreových a tolikéž logarithmů vyhledati.

Úspěch naší methody by byl[14]) zřejmě veliký, kdyby byl znám způsob stanovení přibližné hodnoty čísla T z nejmenšího řešení Fermatovy rovnice

$$T^2 - D U^2 = 4.$$

Pro dosti veliká T postačí znalost počtu číslic, aby se určil počet tříd.

Známé nám algorithmy nejsou o mnoho pohodlnější než vyhledávání period redukovaných forem (dle Gausse neb Hermitea), takže výhoda našich vzorců nepřichází k platnosti, pokud není přístupu k pohodlnému určení Fermatovy jednotky $E(D)$.

Řešení T, U Fermatovy rovnice mohou býti čísla lichá jen při lichém diskriminantu; v tom případě jest

$$T^2 \equiv U^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$D U^2 \equiv D \equiv T^2 + 4 \equiv 5 \pmod{8},$$

tedy *čísla T, U mohou býti lichá pouze pro diskriminanty tvaru $D = 8k + 5$.*

Jsou-li tato čísla sudá, $T = 2x$, $U = 2y$, máme

$$x^2 - D y^2 = 1;$$

tabulky obyčejně obsahují nejmenší kladné řešení této rovnice. Jde o to, ze známého řešení x, y určiti (v případě $D = 8k + 5$) řešení liché T, U, a ovšem vyšetřiti, zda existuje.

Všecka řešení rovnice Fermatovy vzniknou z identit

$$\frac{t_n + u_n \sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T + V\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

Předpokládejme T, U lichá; pak

$$t_2 = \frac{T^2 + D U^2}{2}, \quad u_2 = T U$$

jsou rovněž lichá, a teprvé

$$t_3 = T\,\frac{T^2 + 3U^2 D}{4}, \quad t_4 = U\,\frac{3T^2 + D U^2}{4}$$

jsou čísla sudá. Existuje-li řešení liché T, U, je tedy tvaru

$$(14) \quad \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \sqrt[3]{\frac{t + u\sqrt{D}}{2}}, \quad t = 2x, \quad u = 2y; \quad x^2 - D y^2 = 1.$$

Současně platí

$$\frac{T - U\sqrt{D}}{2} = \sqrt[3]{\frac{t - u\sqrt{D}}{2}}$$

---

[14]) Jak se určí mez až kam třeba jíti při odčítání členů $\left(\frac{D}{\nu}\right) = 0$ a $\left(\frac{D}{\nu}\right) = -1$, o tom jsem pojednal v Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1903: Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental.

a tedy

$$(14^1)\qquad \begin{cases} T = \sqrt[3]{\dfrac{t+u\sqrt{D}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{t-u\sqrt{D}}{2}} \\ U\sqrt{D} = \sqrt[3]{\dfrac{t+u\sqrt{D}}{2}} - \sqrt[3]{\dfrac{t-u\sqrt{D}}{2}} \end{cases}$$

Veličina

$$s = \frac{t-u\sqrt{D}}{2} = \frac{2}{t+u\sqrt{D}} = \frac{1}{t-s}$$

je pro veliká t typu

$$\frac{1}{t} + \left(\frac{1}{t^3}\right),$$

podobně jest

$$\sqrt[3]{\frac{t+u\sqrt{D}}{2}} = \sqrt[3]{t-s} \doteq \sqrt[3]{t} - \frac{1}{3}\frac{1}{t^{\frac{5}{3}}},$$

$$\sqrt[3]{\frac{t-u\sqrt{D}}{2}} \doteq \frac{1}{\sqrt[3]{t}} + \frac{1}{3t^{\frac{7}{3}}},$$

a tedy

$$(15^1)\qquad T = \sqrt[3]{t} + \frac{1}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{3t^{\frac{5}{3}}} + \ldots.$$

$$(15^2)\qquad U\sqrt{D} = \sqrt[3]{t} - \frac{1}{\sqrt[3]{t}} - \frac{1}{3t^{\frac{5}{3}}} + \ldots.$$

Stane-li se tedy, že rozdíl mezi $\sqrt[3]{t} = \sqrt[3]{2x}$ a mezi celistvým číslem nejblíže vyšším není veličina typu

$$\frac{1}{\sqrt[3]{t}},$$

bude (15^1) nemožno a hlavní řešení T, U jsou čísla sudá. Naopak možno tím způsobem snadno určiti řešení liché, když existuje.

Na př. pro $D = 597$ máme $x^2 - Dy^2 = 1$,

$$x = 463287093751,$$

tedy $t = 2x = 926574187502$,

Log $t = 11{,}96689$

Log $\sqrt[3]{t} = 3{,}98896$, $\sqrt[3]{t} \doteq 9749 = a$.

Zde není a veliké, i zkusíme hned

$$U \doteq \frac{T}{\sqrt{D}} \doteq \frac{a}{\sqrt{597}} = 399;$$

a po té se přesvědčíme, že skutečně

$$T = 9749,\ U = 399$$

podává

$$T^2 - 597\,U^2 = 4.$$

Dále číslo $D = 653$ jest opět tvaru $8k + 5$, řešení

$$x = 2291286382$$

podá

$$t = 4582572764 = 2x$$

$\text{Log } t = 9{,}65111$

$\text{Log } \sqrt[3]{t} = 3{,}21704, \ \sqrt[3]{t} = 1648{,}3$

Kdyby liché řešení existovalo, musilo by

$$T = 1649;$$

avšak

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{1648}$$

není blízko rozdílu

$$T - \sqrt[3]{t} = 0{,}7,$$

tedy liché řešení pro diskriminant 653 neexistuje.

Nejsou-li čísla x, y, tedy též t, u dosti veliká, ustanovíme T, U z rovnic (14^1); jsou-li tak získané veličiny čísla celistvá, je problém řešen.

Buď nyní D kladný diskriminant tvaru $8k + 5$, jenž má liché základní řešení rovnice Fermatovy

$$T^2 - DU^2 = 4.$$

Z rovnice té plyne

$$DU^2 = T^2 - 4 = (T - 2\varepsilon)(T + 2\varepsilon), \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Rozdíl lichých čísel $T \pm 2\varepsilon$ jest 4 a tedy jsou nesoudělna.

Následkem toho štěpí se rovněž levá strana v nesoudělné faktory

$$(a) \qquad \begin{cases} T + 2\varepsilon = PU_1^2, \quad T - 2\varepsilon = QU_2^2 \\ PQ = D. \quad U_1 U_2 = U, \end{cases}$$

a z těchto rovnic plyne

$$(b) \qquad 2T = PU_1^2 + QU_2^2$$

$$(c) \qquad PU_1^2 - QU_2^2 = 4\varepsilon.$$

Rozeznávejme nyní případy:

1. V rozkladu (a) jsou čísla P, Q různá od 1. Čísla ta jsou lichá a číslo

$$(A) \qquad \frac{U_1\sqrt{P} + U_2\sqrt{Q}}{2} = \sqrt{E(D)}$$

jest algebraickou jednotkou 4. stupně.

Skutečně máme dle (b)

$$\left(\frac{U_1\sqrt{P} + U_2\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{T + U\sqrt{PQ}}{2} = E(D).$$

2. Je-li jedno z čísel P, Q jednotkou, takže se rovnicemi (a) diskriminant nerozkládá, buď $P = D$, $Q = 1$, a znamenejme $U_2 = T_1$; pak máme

$$T - 2\varepsilon = T_1^2, \quad T + 2\varepsilon = DU_1^2$$

$$T_1^2 - DU_1^2 = -4\varepsilon.$$

Kdyby ε bylo $= -1$, měli bychom v T_1, U_1 řešení Fermatovy rovnice menší než T, U, což vyloučeno. Je tedy $\varepsilon = +1$, a máme

(B) $$T - 2 = T_1^2, \quad T_1^2 - D U_1^2 = -4,$$

a číslo

(C) $$\frac{T_1 + U_1 \sqrt{D}}{2} = \sqrt{E(D)}$$

jest algebraickou jednotkou 2. stupně.

Poněvadž případy (A) a (C) se navzájem vylučují již formou odmocniny čísla $E(D)$, je zřejmo, že nastane případ (C), jakmile rovnice

$$t^2 - D U^2 = -4$$

má řešení, a naopak.

Mimo to případ (A) není možný pro diskriminanty kmenné.

Legendreovy tabulky podávají veskrz čísla x, y hovící rovnici

(D) $$x^2 - D y^2 = -1,$$

když tato je řešitelna, tedy zejmena pro všechny diskriminanty kmenné hovící x, y této rovnici a nikoli rovnici $x^2 - D y^2 = 1$.

Pro řešení x, y rovnice (D) pak platí

$$x + y\sqrt{D} = E(D)^{\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{E(D)} = \sqrt[3]{x + y\sqrt{D}}.$$

Rovnice $T_1^2 + 4 = D U_1^2$ vyžaduje, aby D se skládalo ze samých činitelů tvaru $4k + 1$. Obsahuje-li tedy D činitele tvaru $4k + 3$, bude $\sqrt{E(D)}$ algebraickou jednotkou stupně 4. V hořejším případě $D = 597 = 3 \times 199$ máme $T + 2 = 199 \times 7^2$, $T - 2 = 3 \times 57^2$,

$$\sqrt{E(D)} = \frac{7\sqrt{199} + 57\sqrt{3}}{2}.$$

Buď nyní D lichý diskriminant, jemuž přísluší sudé hodnoty $T = 2X$ $T = 2Y$.

Máme pak

(a′) $$X^2 - D Y^2 = 1, \quad E(D) = X + Y\sqrt{D}.$$

Z podmínky $D \equiv 1$ (mod. 4) plyne, že X je liché, Y sudé; bude tedy při $\varepsilon = \pm 1$

(b′) $$\begin{cases} X + \varepsilon = 2 P Y_1^2, \quad X - \varepsilon = 2 Q Y_2^2, \\ P Q = D, \quad 2 Y_1 Y_2 = Y, \quad X = P Y_1^2 + Q Y_2^2 \end{cases}$$

kdež Y_1 a Y_2 jsou nesoudělná čísla, a při tom

(c′) $$P Y_1^2 - Q Y_2^2 = \varepsilon.$$

Zde bude opět

(A′) $$Y_1 \sqrt{P} + Y_2 . \sqrt{Q} = \sqrt{E(D)}$$

algebraickou jednotkou 4. stupně, pokud P ani Q není $= 1$.

Je-li však na př. $Q = 1$, zní rovnice (c′) při $Y_2 = X_1$

$$X_1^2 - D Y_1^2 = -\varepsilon,$$

a zároveň jest $\varepsilon = +1$, poněvadž

$$X - \varepsilon = 2 X_1^2$$

vyžaduje

$$X_1 < X.$$

Máme tedy

$$(B') \qquad X - 1 = 2 X_1^2, \quad X_1^2 - D Y_1^2 = -1,$$

a při tom jest

$$(C') \qquad X_1 + Y_1 \sqrt{D} = \sqrt{E(D)}$$

algebraickou jednotkou 2. stupně. Tento případ nastane vždy u kmenného diskriminantu, pro nejž T, U jsou čísla sudá.

Případ sudého diskriminantu $D = 4n$ vede na rovnici

$$X^2 - n Y^2 = 1;$$

čísla X a Y nemohou býti současně lichá, pokud není n dělitelno osmi.

Je-li X sudé, máme rozklady

$$X + \varepsilon = n_1 Y_1^2, \quad X - \varepsilon = n_2 Y_2^2, \quad n_1 Y_1^2 - n_2 Y_2^2 = 2\varepsilon,$$

i jsme vedeni k rovnici

$$x'^2 - n y'^2 = \pm 2$$

pro případ, že jedno z čísel n_1, n_2 jest $= 1$, při čemž musí

$$\left(\frac{\pm 2}{n}\right) = 1.$$

Je-li X liché, bude

$$X + \varepsilon = 2 n_1 Y_1^2, \quad X - \varepsilon = 2 n_2 Y_2^2,$$

tedy

$$n_1 Y_1^2 - n_2 Y_2^2 = \varepsilon,$$

což dá opět podnět k jednotkám $\sqrt{E(D)}$.

Zprávy o činnosti komise správní.

Správní komise České Akademie zasedala dne 30. března 1911. Předsedal J. Excell. Dr. Ant. ryt. Randa.

1. Čten a schválen zápis o zasedání ze dne 30. listopadu 1910.

2. Sdělení praesidialná:

a) Gener. sekretář oznamuje, že byla Akademii vyplacena třetí lhůta subvence markrabství Moravského na rok 1910 sumou 5000 K povolená. Navrhuje, aby z obnosu toho přikázáno bylo „Společným záležitostem" 1000 K a jednotlivým třídám rovněž po 1000 K. Schvaluje se.

b) Přednesena zpráva vrch. zemského účetního rady Eug. Spinky o revisi účtů „Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových" za rok 1910. Koncem prosince 1910 zbývá ještě výdajného jmění K 41.996·61. Vzato na vědomí.

c) Nadační správa „Nadání manželů Hlávkových" předkládá po rozumu § 10. statutu výroční účty za správní rok 1910 s žádostí, aby Akademie zvolila jednoho člena kontrolní komise; zároveň poukazuje