Matyáš Lerch

O novém zobecnění řady Taylorovy a Lagrangeovy

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 20 (1911), č. 36, 1–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501595

O novém zobecnění řady Taylorovy a Lagrangeovy.

Sdílí M. LERCH v Brně.

(Předloženo dne 10. listopadu 1911.)

Vycházejme z posloupnosti funkcí

(1) $$\psi_0(z),\quad \psi_1(z),\quad \psi_2(z),\ \ldots$$

jež jsou v určitém intervallu $(a \ldots b)$ vesměs konečny, spojity a od nully různy. Z těchto funkcí vytvořme další řadu funkcí

(2) $$\varphi_1(x, z),\quad \varphi_2(x, z),\quad \varphi_3(x, z),\ \ldots$$

na základě podmínek

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_1(x, z) = \psi_0(z),\quad \varphi_1(x, x) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_2(x, z) = \varphi_1(x, z)\,\psi_1(z),\quad \varphi_2(x, x) = 0;$$

atd., obecně

(3) $$\frac{\partial}{\partial z}\varphi_{\nu+1}(x, z) = \varphi_\nu(x, z)\,\psi_\nu(z),\quad \varphi_{\nu+1}(x, x) = 0$$

čili též

(3*) $$\varphi_{\nu+1}(x, z) = \int\limits_x^z \varphi_\nu(x, \xi)\,\psi_\nu(\xi)\,d\xi.$$

Při tom x znamená libovolnou hodnotu v uvažovaném intervallu. K vůli lepšímu přehledu připojíme k řadě (2) ještě prvek $\varphi_0 = 1$.

Uvažujme nyní funkci $f(z)$, spojitou na mezeře $(a \ldots b)$, a mající veškery derivace, jež se v úvaze vyskytnou. Vycházejíce z této funkce tvořme pomocí posloupnosti (1) řadu funkcí nových

$$f_0(z),\quad f_1(z),\quad f_2(z),\ \ldots$$

dle zákona

$$(4)\qquad \begin{gathered} f_0(z) = f(z), \quad f_1(z) = -\frac{f_0'(z)}{\psi_0(z)}, \quad f_2(z) = -\frac{f_1'(z)}{\psi_1(z)}, \\ \ldots\ldots f_{\nu+1}(z) = -\frac{f_\nu'(z)}{\psi_\nu(z)}. \end{gathered}$$

Pomocí těchto funkcí $f_\nu(z)$ a funkcí $\varphi_\nu(x, z)$ utvořme součet

$$(5)\qquad S_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(z)\, \varphi_\nu(x, z).$$

Ten je v uvažovaném intervallu spojitá funkce proměnné z a má derivaci

$$S_n'(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu'(z)\, \varphi_\nu(x, z) + \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(z) \frac{\partial}{\partial z} \varphi_\nu(x, z).$$

Poněvadž dle (3) a (4) jest

$$f_\nu'(z) = -f_{\nu+1}(z)\, \psi_\nu(z), \quad \frac{\partial}{\partial z} \varphi_\nu(x, z) = \varphi_{\nu-1}(x, z)\, \psi_{\nu-1}(z)$$

a mimo to

$$\frac{\partial}{\partial z} \varphi_0 = 0,$$

bude poslední výraz

$$\begin{aligned} S_n'(z) = & -\sum_{\nu=0}^{n-1} f_{\nu+1}(z)\, \psi_\nu(z)\, \varphi_\nu(x, z) \\ & + \sum_{\nu=1}^{n-1} f_\nu(z)\, \varphi_{\nu-1}(x, z)\, \psi_{\nu-1}(z); \end{aligned}$$

zde se však v pravo členové po dvou ruší a zbývá toliko poslední člen prvního součtu

$$(6)\qquad S_n'(z) = -f_n(z)\, \psi_{n-1}(z)\, \varphi_{n-1}(x, z).$$

Dle věty o střední hodnotě

$$\frac{S_n(x) - S_n(z)}{x - z} = S_n'(z_1), \quad z_1 = (x \ldots\ldots z),$$

kde z_1 značí určitou blíže neznámou veličinu mezi x a z, s ohledem na očividnou okolnost, že

$$S_n(x) = f_0(x) = f(x),$$

plyne pak vztah

$$(7)\qquad f(x) = S_n(z) + R_n,$$

kde položeno

$$R_n = (x - z)\, S_n'(z_1)$$

t. j. dle (6)

$$(8)\qquad R_n = (z - x)\, f_n(z_1)\, \psi_{n-1}(z_1)\, \varphi_{n-1}(x, z_1), \quad z_1 = (x \ldots z).$$

Rovnice (7) čili

$$(7^*) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(z)\, \varphi_\nu(x, z) + R_n$$

podává rozvoj funkce $f(x)$ podle funkcí $\varphi_\nu(x, z)$.

Poněvadž funkce $f_n(z)$ — jak ze zákona (4) vysvitá — předpokládá existenci derivací $f'(z)$, $f''(z)$, ... $f^{(n)}(z)$, musí funkce $f(z)$ míti tyto derivace vesměs konečny a spojity.

Jiné vyjádření zbytku R_n vychází z (6), píšeme-li ξ za z a integrujeme-li v mezích x a z:

$$(9) \qquad f(x) - S_n(z) = R_n = \int_x^z f_n(\xi)\, \psi_{n-1}(\xi)\, \varphi_{n-1}(x, \xi)\, d\xi.$$

Tyto úvahy přenášejí se *bezprostředně* do oboru funkcí komplexní proměnné, pouze s tím rozdílem, že na místo rovnice (8) nastoupí jiné ocenění zbytku, jež snadno se odvodí z identity (9).

Jako první příklad uvažujme případ, kdy veškery základní funkce $\psi_\nu(z)$ splývají s číslem 1. Funkce (2) pak budou

$$\varphi_1(x, z) = z - x, \quad \varphi_2(x, z) = \frac{(z-x)^2}{2!}, \quad \varphi_3(x, z) = \frac{(z-x)^3}{3!},$$

$$\ldots\ldots \varphi_\nu(x, z) = \frac{(z-x)^\nu}{\nu!},$$

a funkce (4) budou

$$f_1(z) = -f'(z), \quad f_2(z) = f''(z), \quad f_3(z) = -f'''(z), \ldots$$
$$f_\nu(z) = (-1)^\nu f^{(\nu)}(z);$$

řada (5) pak bude po dosazení těchto hodnot zníti

$$S_n(z) = \sum_0^{n-1} (-1)^\nu f^{(\nu)}(z) \frac{(z-x)^\nu}{\nu!} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\nu)}(z)}{\nu!} (x-z)^\nu,$$

takže nám v tomto případě rovnice (7) podává řadu Taylorovu se zbytkem ve tvaru

$$R_n = f^{(n)}(z_1) \frac{(x-z)(x-z_1)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Definice funkcí $\varphi_\nu(x, z)$ je dána rekurentním vztahem

$$(3^*) \qquad \varphi_{\nu+1}(x, z) = \int_x^z \varphi_\nu(x, \xi)\, \psi_\nu(\xi)\, d\xi.$$

Zvolíme-li tedy

$$\psi_\nu(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

obdržíme postupně

$$\varphi_1(x, z) = arctg\, z - arctg\, x, \quad \varphi_2(x, z) = \frac{(arctg\, z - arctg\, x)^2}{2!},$$

$$\ldots \; \varphi_\nu(x, z) = \frac{1}{\nu!}(arctg\, z - arctg\, x)^\nu.$$

Funkce $f_\nu(z)$ se v tomto případě tvoří dle zákona

$$f_1(z) = -(1+z^2)\, f'(z), \quad f_2(z) = -(1+z^2)\, f_1'(z), \ldots$$
$$f_{\nu+1}(z) = -(1+z^2)\, f_\nu'(z),$$

a rozvoj bude zníti

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu f_\nu(z)}{\nu!}(arctg\, x - arctg\, z)^\nu,$$

předpokládáme-li funkci analytickou v okolí bodu z, jemuž x je dostatečně na blízku. Jinak psáno

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu f_\nu(z)}{\nu!}\left(arctg\, \frac{x-z}{1+xz}\right)^\nu.$$

Klademe-li $x = tg\, u, \quad z = tg\, v,$ máme

$$f(tg\, u) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu f_\nu(tg\, v)}{\nu!}(u-v)^\nu,$$

tedy

$$(-1)^\nu f_\nu(tg\, v) = \frac{d^\nu f(tg\, v)}{d\, v^\nu}.$$

Jako příklad uvažujme $z = 0$, takže

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu f_\nu(0)}{\nu!}(arctg\, x)^\nu.$$

V případě $f(x) = log\,(1+x^2)$ to podá

$$log\,(1+x^2) = \sum_1^\infty C_\nu\, (arctg\, x)^{2\nu}$$

pro všecka realná x, při čemž konstanty C_ν jsou dány identitou

$$-log\, cos^2 \xi = \sum_1^\infty C_\nu\, \xi^{2\nu}, \qquad C_\nu = \frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{\nu\,(2\nu)!}B_\nu,$$

kde B_ν jsou kladná čísla Bernoulliova

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \ldots$$

XXXVI.

Volme dále $\psi_\nu = \chi'(z)$, kde funkce $\chi'(z)$ nemizí na mezeře $(a \ldots b)$; naše definice podá pak

$$\varphi_1(x, z) = \int_x^z \psi_0(\xi)\, d\xi = \chi(z) - \chi(x),$$

$$\varphi_2(x, z) = \int_x^z \psi_1(\xi)\, \varphi_1(x, \xi)\, d\xi = \frac{[\chi(z) - \chi(x)]^2}{2!},$$

$$\ldots\ldots \varphi_\nu(x, z) = \frac{[\chi(z) - \chi(x)]^\nu}{\nu!}.$$

Náš výsledek podává tak řadu Bürmannovu a Lagrangeovu

(10) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f_\nu(z)}{\nu!} [\chi(z) - \chi(x)]^\nu$$

s koefficienty

(10ᵃ) $$f_0(z) = f(z),\quad f_1(z) = -\frac{f'(z)}{\chi'(z)}, \ldots f_{\nu+1}(z) = -\frac{f_\nu'(z)}{\chi'(z)},$$

při čemž zbytek je dán výrazem

(10ᵇ) $$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^z f_n(\xi)\, [\chi(\xi) - \chi(x)]^{n-1}\, \chi'(\xi)\, d\xi.$$

U realné funkce $\chi(\xi)$ zůstane $\chi(\xi) - \chi(x)$ uvnitř mezery integrační od nully různo, poněvadž by rovnost $\chi(\xi) = \chi(x)$ měla za následek existenci kořene rovnice $\chi'(z) = 0$ mezi hodnotami x a ξ, což je proti podmínce; dle věty o střední hodnotě bude tedy

(10ᶜ) $$R_n = \frac{f_n(z_1)}{n!} [\chi(z) - \chi(x)]^n,\quad z_1 = (x \ldots z).$$

Předpokládejme nyní $\chi(z)$ analytickou funkcí, pravidelnou v jistém komplexním oboru $\mathfrak{A}$, v němž nezmizí derivace $\chi'(z)$, a žádná hodnota funkce $\chi(z)$ v něm není dosažena na dvou různých místech.

Pak bude — pokud $f(z)$ je funkce analytická v oboru $\mathfrak{A}$ pravidelná —

$$-f_1(z) = \frac{f'(z)}{\chi'(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\, dt}{\chi(t) - \chi(z)},$$

kde integrace se provádí v kladném směru podél celého okraje oboru $\mathfrak{A}$.

Odtud plyne derivováním

$$-f_1'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\, dt}{[\chi(t) - \chi(z)]^2}\, \chi'(z),$$

tedy

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\, dt}{[\chi(t) - \chi(z)]^2}.$$

Stejným postupem máme odtud

$$f_2'(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\,dt}{[\chi(t)-\chi(z)]^3}\,\chi'(z), \quad -f_3'(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\,dt}{[\chi(t)-\chi(z)]^3}.$$

Tak pokračujíce obdržíme obecně

$$(-1)^n f_n(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f'(t)\,dt}{[\chi(t)-\chi(z)]^n}.$$

Píšeme-li to ve tvaru

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} f'(t)\left(\frac{t-z}{\chi(t)-\chi(z)}\right)^n \frac{dt}{(t-z)^n},$$

plyne dle známé identity Cauchyovy

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^n} = \varphi^{(n-1)}(z)$$

následující vzorec

(10^d) $$(-1)^n f_n(z) = D_{t=z}^{n-1}\left\{f'(t)\left(\frac{t-z}{\chi(t)-\chi(z)}\right)^n\right\}.$$

Pro součinitele řady

(11) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!}[\chi(x)-\chi(z)]^\nu$$

tedy vychází vyjádření

(11^a) $$A_\nu = \left\{D_t^{\nu-1}\left[f'(t)\left(\frac{t-z}{\chi(t)-\chi(z)}\right)^\nu\right]\right\}_{t=z}, \quad A_0 = f(z).$$

B ü r m a n n předpokládal z *zvláštní,* tak aby $\chi(z) = 0$, takže u něho řada zní

(12) $$f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu!}\chi(x)^\nu,$$

(12^a) $$a_0 = f(z), \quad a_\nu = \left\{D^{\nu-1}\left[f'(t)\left(\frac{t-z}{\chi(t)}\right)^\nu\right]\right\}_{t=z}$$

Bürmannova řada se jen formalně liší od L a g r a n g e o v y.[1]) Klademe-li

$$\frac{t-z}{\chi(t)} = \varphi(t),$$

jest $\varphi(t)$ analytická funkce pravidelná v oboru $\mathfrak{A}$, mající v něm pouze jedno místo nullové $t = z$.

[1]) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1768.

Píšeme-li

$$\chi(x) = u = \frac{x - z}{\varphi(x)},$$

máme rovnici

$$x = z + u\,\varphi(x), \tag{13}$$

která pro dosti malá u má v oboru $\mathfrak{A}$ jen jedno řešení x, a pro ně platí řada Lagrangeova

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{a_\nu}{\nu!} u^\nu; \qquad a_0 = f(z), \qquad a_\nu = D^{\nu-1}[f'(z)\,\varphi(z)^\nu]. \tag{13^a}$$

V četných případech náš původní tvar koefficientů (10ª) podává výsledky pohodlně. Tak na př. pro řešení číselné rovnice

$$\chi(x) = 0,$$

u níž známe sblíženou hodnotu z kořene. Zde položíme $f(z) = z$, tedy dle definice funkcí f_ν:

$$f_0(z) = z, \quad f_1(z) = -\frac{1}{\chi'(z)}, \quad f_2(z) = -\frac{\chi''(z)}{\chi'(z)^3},$$
$$f_3(z) = \frac{\chi'''(z)\,\chi'(z) - 3\,\chi''(z)^2}{\chi'(z)^5}, \ldots$$

Při těchto hodnotách f_ν bude kořen x dle (10) dán řadou

$$x = z + f_1(z)\,\chi(z) + \frac{1}{1\,.\,2} f_2(z)\,\chi(z)^2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} f_3(z)\,\chi(z)^3 + \ldots$$

t. j.

$$x = z - \frac{\chi(z)}{\chi'(z)} - \frac{\chi''(z)}{2\,\chi'(z)^3}\,\chi(z)^2 + \ldots$$

První dva členy podávají methodu Newtonovu. Pro ocenění přesnosti podává vzorec (10ᶜ) zbytek — jenž následuje po n členech řady —

$$R_n = \frac{f_n(z_1)}{n!}\,\chi(z)^n,$$

kde z_1 leží mezi bodem z a x.

Podržíme-li tedy v poslední řadě pouze napsané tři členy, bude chyba

$$R_3 = \frac{f_3(z_1)}{6}\,\chi(z)^3 = \frac{\chi'''(z_1)\,\chi'(z_1) - 3\,\chi''(z_1)^2}{6\,\chi'(z_1)^5}\,\chi(z)^3.$$

Obecné vzorce zřídka kdy podávají přehledné výrazy součinitelů rozvoje Bürmannova

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{A_\nu}{\nu!}\,\chi(x)^\nu \qquad (\chi(z) = 0).$$

Víme, že A_ν jest linearní výraz sestrojený z prvků

$$f'(z),\quad f''(z),\ \ldots\ldots\ f^{(\nu)}(z),$$

jehož součinitelé obsahují derivace funkce $\chi(z)$. Utvoříme-li tedy rozvoj funkce zvláštní

$$e^{cx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A_\nu'}{\nu!}\, \chi(x)^\nu,$$

bude $A_\nu'(c)$ linearní funkcí veličin $e^{cz} c^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots \nu)$, t. j. $A_\nu' e^{-cz}$ bude polynom o proměnné c; jeho součinitelé jsou titéž jako v polynomu A_ν, a tedy vychází polynom A_ν symbolicky z polynomu $A_\nu'(f)$, v němž se symboly f^k nahražují derivacemi $f^{(k)}(z)$.

Hledejme na př. rozvoj $(\chi(x) = e^x - 1;\quad z = 0)$

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{A_\nu}{\nu!}(e^x - 1)^\nu. \tag{14}$$

Jemu po boku stojí rozvoj

$$e^{cx} = \sum_0^{\infty} \frac{A_\nu'}{\nu!}(e^x - 1)^\nu;$$

klademe-li $e^x - 1 = t$, máme

$$e^{cx} = (1 + t)^c = \sum_0^{\infty} \binom{c}{\nu} t^\nu,$$

tedy

$$\frac{A_\nu'(c)}{\nu!} = \binom{c}{\nu},$$

a odtud pro součinitele řady (14) symbolické vyjádření

$$\frac{A_\nu}{\nu!} = \binom{f}{\nu} = \binom{D}{\nu} f(z), \qquad z = 0, \tag{14^a}$$

t. j.

$$A_0 = f(0),\quad A_1 = f'(0),\quad A_2 = f(f-1) = f''(0) - f'(0),$$
$$A_3 = f(f-1)(f-2) = f'''(0) - 3f''(0) + 2f'(0), \ldots$$

Symbolicky lze řadu (14) psáti

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \binom{D}{\nu} f(z)\,.\,(e^x - 1)^\nu, \qquad z = 0.$$

Seřazením dle derivací docílíme téhož jako kdybychom sečtli formálně binomickou řadu

$$\sum \binom{D}{\nu}(e^x - 1)^\nu = e^{Dx},$$

a skutečně jest

$$e^{Dx} f(z) = \sum_0^\infty \frac{D^\nu f(z)}{\nu!} x^\nu = f(x) \quad (\text{pro } z = 0).$$

Jako další příklad hledejme koefficienty rozvoje

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{A}_\nu}{\nu!} [log(1+x)]^\nu,$$

tedy zvláště

$$e^{cx} = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{A}_\nu'}{\nu!} [log(1+x)]^\nu.$$

Položí-li se $log(1+x) = t$, vyjde řada

$$e^{c(e^t-1)} = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{A}_\nu'}{\nu!} t^\nu,$$

kterou možno přímo stanoviti. Je totiž

$$e^{c(e^t-1)} = e^{-c}\left[1 + \sum_1^\infty \frac{c^\nu}{\nu!} e^{\nu t}\right] = e^{-c}\left[1 + \sum_\nu \frac{c^\nu}{\nu!} + \sum_{\mu,\nu} \frac{c^\nu t^\mu \nu^\mu}{\mu!\,\nu!}\right]$$
$$(\mu, \nu = 1, 2, 3 \ldots).$$

V poslední závorce tvoří první dva výrazy veličinu e^c, a tedy bude

$$e^{c(e^t-1)} = 1 + e^{-c} \sum_{\mu,\nu} \frac{c^\nu t^\mu \nu^\mu}{\mu!\,\nu!}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Poněvadž zde $\mu > 0$, možno připojiti nullový člen $\nu = 0$, a dle obecného vzorce

$$e^{-x} \sum_0^\infty \frac{a_\nu x^\nu}{\nu!} = \sum_0^\infty \frac{\Delta^n a_0}{n!} x^n,$$

v němž $\Delta^n a_0$ značí první člen n-té řady rozdílové tvořené ze základní posloupnosti

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

jest

$$e^{-c} \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\nu^\mu c^\nu}{\nu!} = \sum_{n=1}^\mu \frac{\Delta^n 0^\mu}{n!} c^n,$$

(při čemž symbol $\Delta^n 0^\mu$ má obvyklý význam prvního členu n-té řady rozdílové tvořené ze základní posloupnosti

$$0, 1^\mu, 2^\mu, 3^\mu, \ldots)$$

bude náš výsledek zníti

$$e^{c(e^t-1)} = 1 + \sum_{\mu=1}^\infty \frac{t^\mu}{\mu!} \sum_{n=1}^\mu \frac{\Delta^n 0^\mu}{n!} c^n.$$

Dle toho jest

$$\mathfrak{A}'_\mu = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\Delta^k 0^\mu}{k!} c^k$$

a při obecné řadě pro $f(x)$

$$\mathfrak{A}_\mu = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\Delta^k 0^\mu}{k!} f^{(k)}(0), \qquad \mathfrak{A}_0 = f(0).$$

Při těchto hodnotách součinitelů bude tedy

$$f(x) = f(0) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_\mu}{\mu!} [log(1+x)]^\mu,$$

ovšem za podmínek, jichž formulování je na snadě.

Zvolme konečně za funkce ψ_ν výrazy

$$\psi_\nu(z) = e^{a_\nu z};$$

funkce $\varphi_\nu(x, z)$ jsou definovány rekurrentním vztahem

$$\varphi_{\nu+1}(x, z) = \int_x^z \varphi_\nu(x, \xi)\, \psi_\nu(\xi)\, d\xi, \qquad \varphi_0 = 1,$$

a obdržíme postupně — zavedeme-li označení

$$e^z = Z, \quad e^x = X, \quad s_\nu = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu \text{ —}$$

výrazy:

$$-\varphi_1(x, z) = -\frac{Z^{s_0}}{s_0} + \frac{X^{s_0}}{s_0},$$

$$\varphi_2(x, z) = \frac{Z^{s_1}}{s_0 s_1} + \frac{X^{s_0} Z^{s_1 - s_0}}{s_0(s_0 - s_1)} + \frac{X^{s_1}}{s_1(s_1 - s_0)},$$

$$-\varphi_3(x, z) = -\frac{Z^{s_2}}{s_0 s_1 s_2} + \frac{X^{s_0} Z^{s_2 - s_0}}{s_0(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} + \frac{X^{s_1} Z^{s_2 - s_1}}{s_1(s_1 - s_0)(s_1 - s_2)} + \frac{X^{s_2}}{s_2(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)},$$

$$\varphi_4(x, z) = \frac{Z^{s_3}}{s_0 s_1 s_2 s_3} + \frac{X^{s_0} Z^{s_3 - s_0}}{s_0(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)(s_0 - s_3)} + \frac{X^{s_1} Z^{s_3 - s_1}}{s_1(s_1 - s_0)(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} + \frac{X^{s_2} Z^{s_3 - s_2}}{s_2(s_2 - s_0)(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} + \frac{X^{s_3}}{s_3(s_3 - s_0)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}.$$

Při stanovení členu nezávislého na Z užívá se tu identity

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\Pi'(x_\nu)} = 0, \quad \Pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

která vychází bezprostředně z Lagrangeova vzorce interpolačního; a sice mají tu veličiny x_ν hodnoty

$$x_0 = 0, \quad x_1 = s_0, \quad x_2 = s_1, \quad x_3 = s_2, \ldots$$

Obecný výraz $\varphi_{\nu+1}$ jest

(15) $$(-1)^{\nu+1} \varphi_{\nu+1}(x, z) = \frac{Z^{s_\nu}}{\Pi'(0)} + \frac{X^{s_0} Z^{s_\nu - s_0}}{\Pi'(s_0)} + \frac{X^{s_1} Z^{s_\nu - s_1}}{\Pi'(s_1)} + \frac{X^{s_2} Z^{s_\nu - s_2}}{\Pi'(s_2)} + \ldots + \frac{X^{s_\nu}}{\Pi'(s_\nu)},$$

kde

$$\Pi(s) = s(s - s_0)(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_\nu)$$

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \ldots$$

$$X = e^x, \quad Z = e^z,$$

a předpokládá se, že veličiny s_ν jsou vespolek a od nully různy.

Definují-li se pak ještě veličiny $f_\nu(z)$ rovnicemi

(15ᵃ) $$f_0(z) = f(z), \quad f_{\nu+1}(z) = -f_\nu'(z)\, e^{-a_\nu z},$$

bude rozvoj náš zníti

(15*) $$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(z)\, \varphi_\nu(x, z) + R_n.$$

Obdržíme postupně v označení symbolickém

$$\begin{aligned} -f_1(z) &= + f'(z)\, e^{-a_0 z} = e^{-s_0 z} D f(z) \\ f_2(z) &= e^{-s_1 z} D(D - s_0) f(z) \\ -f_3(z) &= e^{-s_2 z} D(D - s_0)(D - s_1) f(z) \end{aligned}$$

$$(-1)^{\nu+1} f_{\nu+1}(z) = e^{-s_\nu z} D(D - s_0)(D - s_1)(D - s_2) \ldots (D - s_{\nu-1}) f(z),$$

kde operační symbol D značí $D_z = \frac{d}{dz}$ (derivování dle z).

Zaveďme nyní označení

(16ᵃ) $$\Pi_\nu(s) = s(s - s_0)(s - s_1) \ldots (s - s_{\nu-1}),$$

jehož užitím vyjádří se poslední výsledek symbolicky jak následuje

(16ᵇ) $$(-1)^\nu f_\nu(z) = e^{-s_{\nu-1} z}\, \Pi_{\nu-1}(D_z) f(z),$$

a rovnice (15) se píše

(16ᶜ) $$(-1)^\nu \varphi_\nu(x, z) = \frac{e^{s_{\nu-1} z}}{\Pi_\nu'(0)} + \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{e^{s_k x + (s_{\nu-1} - s_k) z}}{\Pi_\nu'(s_k)},$$

$$\Pi_1(s) = s(s - s_0)$$

$$\varphi_0 = 1, \quad -\varphi_1(x, z) = -\frac{e^{s_0 z}}{s_0} + \frac{e^{s_0 x}}{s_0},$$

$$\varphi_2(x, z) = \frac{e^{s_1 z}}{s_0 s_1} + \frac{e^{s_0 x + (s_1 - s_0) z}}{s_0 (s_0 - s_1)} + \frac{e^{s_1 x}}{s_1 (s_1 - s_0)},$$

$$f_0 = f(z), \quad -f_1(z) = e^{-s_0 z} f'(z).$$

První členy rozvoje pak znějí

(16) $$f(x) = f(z) + f'(z) \left[\frac{-1}{s_0} + \frac{e^{s_0 (x - z)}}{s_0}\right]$$

$$+ \left[f''(z) - s_0 f'(z)\right] \left[\frac{1}{s_0 s_1} + \frac{e^{s_0 (x - z)}}{s_0 (s_0 - s_1)} + \frac{e^{s_1 (x - z)}}{s_1 (s_1 - s_0)}\right]$$

$$+ \left[f'''(z) - (s_0 + s_1) f''(z) + s_0 s_1 f'(z)\right] \left[\frac{-1}{s_0 s_1 s_2} + \frac{e^{s_0 (x - z)}}{s_0 (s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{s_1 (x - z)}}{s_1 (s_1 - s_0)(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 (x - z)}}{s_2 (s_2 - s_0)(s_2 - s_1)}\right] + \ldots$$

K tomu ještě dodáváme, že rozvoj funkce

$$(-1)^\nu e^{-s_{\nu-1} z} \varphi_\nu(x, z) = \chi_\nu(x - z)$$

dle mocností rozdílu $x - z$ začíná členem

$$\chi_\nu(x - z) = \frac{(x - z)^\nu}{\nu!} + \ldots.,$$

což vychází z identit

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{x_\alpha^k}{\Pi'(x_\alpha)} = \left\{\begin{matrix} 0 \text{ pro } k < n - 1 \\ 1 \text{ pro } k = n - 1 \end{matrix}\right\}, \quad \Pi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Obecný člen řady (16) lze psáti též přehledněji takto:

(16[d]) $$D(D - s_0)(D - s_1) \ldots (D - s_{\nu-1}) f(z) \cdot \chi_{\nu+1}(x - z),$$

(16[e]) $$\chi_{\nu+1}(u) = -\frac{1}{\Pi'_{\nu+1}(0)} + \sum_{k=0}^{\nu} \frac{e^{s_k u}}{\Pi'_{\nu+1}(s_k)}.$$

Zvláště máme pro $f(x) = e^{cx}$ a $z = 0$:

(17) $$e^{cx} = 1 + c\left(\frac{-1}{s_0} + \frac{e^{s_0 x}}{s_0}\right) +$$

$$+ c(c - s_0)\left(\frac{1}{s_0 s_1} + \frac{e^{s_0 x}}{s_0 (s_0 - s_1)} + \frac{e^{s_1 x}}{s_1 (s_1 - s_0)}\right) +$$

$$+ c(c - s_0)(c - s_1)\left(\frac{-1}{s_0 s_1 s_2} + \frac{e^{s_0 x}}{s_0 (s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{s_1 x}}{s_1 (s_1 - s_0)(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 x}}{s_2 (s_2 - s_0)(s_2 - s_1)}\right) +$$

Pro funkci χ_ν podává Lagrangeův vzorec interpolační následující vyjádření

$$\chi_\nu(u) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{u\zeta}\, d\zeta}{\Pi_\nu(\zeta)}, \tag{18}$$

kde integrace se provádí v kladném směru podél okraje libovolného oboru $\mathfrak{A}$, majícího uvnitř body $\zeta = 0$, s_0, s_1, ... $s_{\nu-1}$.

Rovnice (17), již lze psáti

$$e^{cx} = 1 + c\,\chi_1(x) + c\,(c - s_0)\,\chi_2(x) + c\,(c - s_0)\,(c - s_1)\,\chi_3(x) + \ldots$$

podává zároveň methodu k postupnému vypočtení polynomů $\chi_\nu(x)$; klademe-li totiž $c = s_0$, s_1, s_2, ... obdržíme postupně

$$e^{s_0 x} = 1 + s_0\,\chi_1(x),$$

$$e^{s_1 x} = 1 + s_1\,\chi_1(x) + s_1\,(s_1 - s_0)\,\chi_2(x),$$

$$e^{s_2 x} = 1 + s_2\,\chi_1(x) + s_2\,(s_2 - s_0)\,\chi_2(x) + s_2\,(s_2 - s_0)\,(s_2 - s_1)\,\chi_3(x), \ldots\ldots$$

z kterýchžto rovnic se postupně určují polynomy $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, $\chi_3(x)$ ...

V rovnici (16) přejíti možno k limitě pro s_0 nekonečně malé, což odpovídá volbě

$$\psi_0(z) = 1, \quad \psi_\nu(z) = e^{a_\nu z}.$$

A sice obdržíme při označení

$$\left\{\begin{aligned} &\lim_{s_0=0} \chi_\nu(u) = \bar{\chi}_\nu(u) = \\ &= \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{e^{s_k u}}{s_k^2\,(s_k - s_1)\,(s_k - s_2)\ldots(s_k - s_{\nu-1})} + \frac{(-1)^{\nu-1}}{s_1 s_2 \ldots s_{\nu-1}}\left(u + \sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{s_k}\right), \end{aligned}\right. \tag{19}$$

t. j.

$$\bar{\chi}_1(u) = u, \quad \bar{\chi}_2(u) = \frac{e^{s_1 u}}{s_1^2} - \frac{1}{s_1}\left(u + \frac{1}{s_1}\right),$$

$$\bar{\chi}_3(u) = \frac{e^{s_1 u}}{s_1^2\,(s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 u}}{s_2^2\,(s_2 - s_1)} + \frac{1}{s_1 s_2}\left(u + \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right), \ldots$$

rozvoj

$$\begin{aligned} f(x) = f(z) + f'(z)\,(x - z) + f''(z)\,\bar{\chi}_2(x - z) + \\ + [f'''(z) - s_1 f''(z)]\,\bar{\chi}_3(x - z) + \\ + [f^{(4)}(z) - (s_1 + s_2)\,f'''(z) + s_1 s_2 f''(z)]\,\bar{\chi}_4(x - z) + \ldots \end{aligned} \tag{19*}$$

při čemž polynomy $\bar{\chi}_\nu(u)$ se mohou počítati na základě identity

$$e^{cu} = 1 + cu + c^2\,\bar{\chi}_2(u) + c^2\,(c - s_1)\,\bar{\chi}_3(u) + c^2\,(c - s_1)\,(c - s_2)\,\bar{\chi}_4(u) + \ldots$$

platné pro $c = 0$, s_1, s_2, ... bez ohledu na konvergenci.

Zvolíme-li zvláště

$$s_1 = -\log 2, \quad s_2 = -\log 3, \ldots, \quad s_\nu = -\log(\nu + 1),$$

(přirozené logarithmy), bude řada funkcí $\psi_\nu(z)$ zníti

$$1, \frac{1}{2^s}, \frac{2^s}{3^s}, \frac{3^s}{4^s}, \ldots\ldots$$

a zdá se, že rovnice (19*) pro ten případ poskytne rozvoj funkce Riemannovy $x\zeta(1+x)$ vhodný k applikacím, o čemž by dříve bylo třeba provésti aspoň numerická šetření některých koefficientů.
