Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Addition au mémoire présenté dans la séance du 15. Octobre 1886

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1887, 423–426

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501588

Terms of use:

© Akademie věd ČR, 1887

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

21.

Addition au mémoire présenté dans la séance du 15 Octobre 1886.

Par M. Lerch.

(Présenté dans la séance du 22 Avril 1887 par Mr. Ed. Weyr.)

Dans le mémoire que j'ai présenté à la Société dans la séance du 15. octobre 1886. j'ai montré que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\cos 2^{\nu} \pi x}{2^{\nu}} \tag{1}$$

n'a pas de dérivée quand on suppose x rationnel de la forme $\frac{a}{2^{\alpha}}$ où a et α sont deux nombres entiers. Or l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée est beaucoup plus étendu de sorte qu'il n'y a à exclure que les valeurs de la forme

$$x = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}}{2^{\nu}}$$

où c_0 est un nombre entier du même signe que x et où c_{ν} est ou 0 ou 1, la série $c_n, c_{n+1}, c_{n+2} \ldots$ devant finalement prendre la forme

$$A, 0, A', 0, A'', 0 \ldots$$

où $A, A', A'' \ldots$ désigne ou 1 ou 1,1.

Pour toutes les autres valeurs de x la fonction (1) n'a pas de dérivée, tandis que pour les dites valeurs la question n'est pas encore résolue.

Soit en effet n un nombre entier positif et posons

$$h = \frac{1}{2^{n-1}};$$

un calcule facile nous donne la formule

$$\frac{f(x+3h)-f(x-3h)}{3h}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$+4\sum_{\mu=1}^{n} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu-1}} \sin 2^{n-\mu}\pi x$$

Donc si la dérivée $f'(x)$ existe, on doit avoir

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\mu=1}^{n} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu-1}} \sin 2^{n-\mu}\pi x = 0$$

ou ce qui est la même chose

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\mu=1}^{n} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu}} \sin 2^{n-\mu}\pi x = 0 \tag{2}$$

Mais on a

$$\sum_{\mu=1}^{2} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu}} \sin 2^{n-\mu}\pi x$$

$$= 2 \sin 2^{n-1}\pi x + \sqrt{2} \, . \sin 2^{n-2}\pi x.$$

$$\left|\sum_{\mu=3}^{n} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu}} \sin 2^{n-\mu}\pi x\right| < \sum_{\mu=3}^{\infty} 2^{\mu} \sin^3 \frac{\pi}{2^{\mu}} < \frac{\pi^3}{48}$$

Posons alors

$$x = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{2^\nu}$$

où c_0 est un nombre entier du même signe que x et où $c_\nu = 0$ ou 1. Supposons qu'il existe dans la série c_1, c_2, $c_3, \dots$ une infinité des quaternes de la forme

$$c_{n-2} = c_{n-1} = c_n = 1, \; c_{n+1} = 0. \tag{I}$$

Dans ce cas nous aurons

$$\sin 2^{n-1}\pi x = -\sin \pi \left(\frac{1}{2} + \frac{c_{n+2}}{8} + \dots\right)$$

$$\sin 2^{n-2}\pi x = -\sin \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{c_{n+2}}{16}+\ldots\right)$$

et l'on voit qu'on a

$$-\sin 2^{n-1}\pi x > \sin\frac{3\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$-\sin 2^{n-2}\pi x > \sin\frac{7\pi}{8} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Il en résulte l'inégalité

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} 2^{\mu}\sin^3\frac{\pi}{2^{\mu}}\sin 2^{n-\mu}\pi x\right| > \tfrac{1}{2}+\sqrt{2}-\frac{\pi^3}{48}$$

qui subsiste pour une infinité des valeurs de n, de sorte que la formule (2) est impossible, et par conséquent, la fonction (1) ne peut avoir une dérivée quand la série $c_1, c_2, c_3, \ldots$ contient une infinité des quaternes de la forme (I).

Supposons en second lieu que la série $c_1, c_2, c_3, \ldots$ contient une infinité des ternes de la forme

(II) $$c_{n-2} = c_{n-1} = 0,\ c_n = 1.$$

On a ici

$$\sin 2^{n-1}\pi x = \sin \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{c_{n+1}}{4}+\ldots\right) > 0$$

$$\sin 2^{n-2}\pi x = \sin \pi\left(\frac{1}{4}+\frac{c_{n+1}}{8}+\ldots\right) > \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ce qui nous donne l'inégalité

$$\left|\sum_{\mu=1}^{n} 2^{\mu}\sin^3\frac{\pi}{2^{\mu}}\sin 2^{n-\mu}\pi x\right| > 1-\frac{\pi^3}{48}$$

qui prouve l'impossibilité de la formule (2). Donc la dérivée de la fonction $f(x)$ n'existe pas pour les valeurs de x pour lesquelles il y a une infinité des ternes de la forme (II).

Or chaque valeur de x qui n'appartient pas à celles qui ont été exclut donne une série $c_1, c_2, c_3, \ldots$ contenant une infinité des quaternes (I) ou des ternes (II). Donc le théorème est démontré.

Note. Dans une lettre du 10 Février 1887, Mr. *Henri Vogt*, professeur au lycée de Rennes, m'a donné un extrait des leçons professées par *Bouquet* à la Sorbonne en 1882, qui se rapportaient aux séries de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\cos a_\nu x}{a_\nu}, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin a_\nu x}{a_\nu},$$

les a_ν désignant des quantités réelles et positives quelconques assujeties à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} a_\nu}{a_n} = 0,$$

séries qui n'ont pas de dérivée quelle que soit la valeur de x. D'après ce théorème la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n!\, x}{n!}$$

considérée dans mon mémoire cité n'a pas de dérivée quelle que soit la valeur de x. C'est en ne conaissant pas ce beau résultat de l'éminent géomètre français que j'ai publié ma recherche qui maintenant est devenue superflue.

22.

Počtářské odvození základního vzorce pro linearnou transformaci elliptické transcendenty $\vartheta_1(u\,|\,\tau)$.

Napsal M. Lerch.

(Předložil prof. dr. Edv. Weyr ve schůzi dne 6. května 1887.)

R. 1817. uveřejnil *Cauchy* v Bulletin de la Société Philomatique větu vyjadřující vztah mezi funkcemi $\vartheta_3(o\,|\,\tau)$, $\vartheta_3\left(o\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ *), kterýžto

*) Soudím tak pouze z citátu *Cauchyho* obsaženém v pojednání jeho z r. 1840. v V. svazku žurnálu *Liouville-ova*, any pražské knihovny neobsahují řečeného Bulletinu.