Matyáš Lerch

Poznámky k theorii funkce $\Phi(a, b, v, x) = x^{-a}(1-x)^{-b} \int_0 e^{vx} x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 17 (1908), č. 15, 1–26

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501585

Poznámky k theorii funkce

$$\Phi\,(a, b, v, x) = x^{-a}\,(1-x)^{-b}\int_0 e^{vx}\,x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Podává **M. Lerch** v Brně.

Předloženo dne 7. března 1908.

Před dávnými lety zabýval jsem se omezenými integrály typu

$$\int_0^1 e^{vx}\,x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx,\quad \int_0^\infty e^{-uz}\,z^{a-1}\,(v+z)^{b-1}\,dz,$$

nalezaje se hlavně pod vlivem prací Kummerových a Dirichletových; vztahy, které vládnou transcendentami tohoto druhu, lze obyčejně odvoditi jako krajní případy vztahů známých z theorie hypergeometrické řady. V poslední době se výrazy tohoto druhu vyskytly v důležitých otázkách elektrotechniky a nautiky; tato okolnost mne přiměla k tomu, že jsem se k tomuto předmětu vrátil, nabyv dříve nových výsledků pomocí svého t. zv. principu nejrychlejší konvergence.

V této práci chci vyložiti toliko výsledky týkající se funkce

$$\Phi\,(a, b, v, x) = x^{-a}\,(1-x)^{-b}\int_0 e^{vx}\,x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{1}$$

kterou se dle mého soudu zjednoduší výpočty pp. Arnolda a Mie *)

V prvé z prací citovaných uvažuje p. Mie funkce $\varphi_{00}\,(x)$, $\varphi_{10}\,(x)$ a $\varphi_{01}\,(x)$, které v naší symbolice znějí

$$\begin{aligned}
\varphi_{00}\,(x) &= x\,(1-x)\,e^{-vx}\,\Phi\,(1+\tau, 1-\tau, v, x)\\
\varphi_{10}\,(x) &= x^2\,(1-x)\,e^{-vx}\,\Phi\,(2+\tau, 1-\tau, v, x)\\
\varphi_{01}\,(x) &= x\,(1-x)^2\,e^{-vx}\,\Phi\,(1+\tau, 2-\tau, v, x),
\end{aligned}$$

při čemž zde užito litery v na místě autorova τ'.

---

*) Gustav Mie, Über die Kurzschlußstromkurve eines Gleichstromankers (Zeitschrift f. Math. u. Phys., sv. 53; 1906). Arnold u. Mie, Elektrotechnische Zeitschrift, 1899.

I.

Vyšetřme nejdříve povahu funkce (1) v okolí bodu $x = 0$; tam platí rozvoj

$$e^{vx}(1-x)^{b-1} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots$$

jehož součinitelé jsou celistvé racionalné funkce veličin b a v; násobíme-li differenciálem

$$x^{a-1}\,dx$$

a integrujeme-li, obdržíme pro funkci

$$\psi(a, b, v, x) = \int_0 e^{vx} x^{a-1} (1-x)^{b-1}\,dx \tag{2}$$

rozvoj

$$\psi(a, b, v, x) = \frac{x^a}{a} + c_1 \frac{x^{a+1}}{a+1} + c_2 \frac{x^{a+2}}{a+2} + \ldots \tag{3}$$

Integrál (2) vyžaduje ke své existenci podmínku, aby realná část veličiny a byla kladná; vynecháme-li však podmínku, aby to byl integrál omezený, bude řada (3) při libovolném a, které není nullou neb záporným číslem celistvým, rovna integrálu

$$\int e^{vx} x^{a-1} (1-x)^{b-1}\,dx$$

s vhodně volenou konstantou, i možno (3) zvoliti za definici funkce $\psi(a, b, v, x)$. Je tedy

(3¹)
$$(1-x)^b\,\Phi(a, b, v, x) = x^{-a}\psi(a, b, v, x) = \frac{1}{a} + \frac{c_1}{a+1}x + \frac{c_2}{a+2}x^2 + \ldots$$

řada konvergentní v oboru $|x| < 1$, která vůči proměnným b a v je celistvou, vůči a toliko jednoznačnou, majíc polarná místa zvláštní prvého stupně $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$

Podíl

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\,\Phi(a, b, v, x)$$

jest celistvou funkcí (transcendentní) vůči proměnným a, b, v, pokud absolutní hodnota x zůstává menší jedné. V tomto oboru má funkce naše rozvoj

$$\Phi(a, b, v, x) = \frac{1}{a} + \frac{C_1}{a(a+1)}x + \frac{C_2}{a(a+1)(a+2)}x^2 + \ldots, \tag{4}$$

při čemž C_1, C_2, C_3, ... jsou celistvé racionalné funkce veličin a, b, v.

Abychom určili tyto veličiny blíže, užijeme differencialné rovnice

$$\frac{d\Phi}{dx}+\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}\right)\Phi+\frac{e^{vx}}{x(x-1)}=0, \tag{5}$$

která vychází bezprostředně z definice (1). Pišme ji ve tvaru

$$(x^2-x)\frac{d\Phi}{dx}+[(a+b)x-a]\Phi+e^{vx}=0, \tag{5¹}$$

a hledaný rozvoj buď v přehlednějším tvaru

$$\Phi=\sum_{\nu=0}^{\infty}k_\nu x^\nu, \quad k_0=\frac{1}{a}.$$

Rozviňme levou stranu rovnice (5¹) dle mocnin x, a vyjadřme, že součinitel při x^ν rovná se nulle; obdržíme tak vztah

$$(a+\nu)k_\nu-(a+b+\nu-1)k_{\nu-1}=\frac{v^\nu}{\nu!}, \tag{6}$$

platný pro $\nu=0, 1, 2, \ldots$, při čemž $k_{-1}=0$.

Zaveďme nyní obvyklé v mých pracích označení

$$(a,\nu)=a(a+1)\ldots(a+\nu-1)=\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)},$$

tedy zvláště $(a, 0)=1$, $(a, 1)=a$; pak bude lze rovnici (6) psáti

$$\frac{(a,\nu+1)}{(a+b,\nu)}k_\nu-\frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu-1)}k_{\nu-1}=\frac{(a,\nu)}{(a+b,\nu)}\;\frac{v^\nu}{\nu!};$$

sečtěme na obou stranách pro $\nu=1, 2, 3, \ldots n$, a uvažme, že $a\,k_0=1$ rovná se pravé straně psané pro $\nu=0$; obdržíme

$$\frac{(a,n+1)}{(a+b,n)}k_n=\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(a,\nu)\,v^\nu}{\nu!\,(a+b,\nu)}$$

tedy

$$k_n=\frac{(a+b,n)}{(a,n+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(a,\nu)\,v^\nu}{\nu!\,(a+b,\nu)}=\frac{C_n}{(a,n+1)} \tag{6¹}$$

Poněvadž

$$\frac{(a+b,n)}{(a+b,\nu)}=(a+b+\nu, n-\nu)$$

máme výraz pro součinitele řady (4)

$$C_n=\sum_{\nu=0}^{n}(a,\nu)(a+b+\nu,n-\nu)\,\frac{v^\nu}{\nu!}. \tag{4'}$$

Nalezený rozvoj

$$\Phi(a,b,v,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b,n)}{(a,n+1)}x^n\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(a,\nu)\,v^\nu}{\nu!\,(a+b,\nu)} \tag{4*}$$

konverguje skutečně toliko za podmínky $|x|<1$.

Předpokládejme, že $a + b$ není záporné číslo celistvé neb nulla; pak existuje řada stále konvergentní

$$K(a, b, v) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a + b, \nu)},$$

i bude lze psáti

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a + b, \nu)} = K - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a + b, \nu)}$$

a pravá strana rovnice (4*) se tak rozpadne ve dvě části

$$\Phi(a, b, v, x) = K(a, b, v)\, H(a, b, x) - \Pi(a, b, v, x), \tag{7}$$

kde položeno

$$H(a, b, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + b, n)}{(a, n + 1)}\, x^{n}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \Pi(a, b, v, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + b, n)}{(a, n + 1)}\, x^{n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a + b, \nu)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a + b, n)}{(a, n + 1)}\, x^{n} \left\{ K(a, b, v) - \sum_{\nu=0} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a + b, \nu)} \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Řada (8) konverguje toliko v oboru $|x| < 1$, naproti tomu řada (9) je stále konvergentní, takže $\Pi(a, b, v, x)$ je celistvá funkce transcendentní proměnných v, x, jednoznačná vůči a, b, nemající jiných singularit vůči a a b mimo póly $a + b = 0, -1, -2, -3, \ldots$, takže bude

$$\frac{1}{\Gamma(a + b)}\, \Pi(a, b, v, x) \tag{10}$$

celistvou funkcí všech čtyř proměnných a, b, v, x. První řadu (9) lze lépe psáti

$$\Pi(a, b, v, x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a + n + 1, \nu)\, v^{n+\nu+1}}{(n + \nu + 1)!\,(a + b + n, \nu + 1)}. \tag{9*}$$

Je pozoruhodno, že při $a + b = -m$, veškery členy, v nichž $n > m$, jsou konečny, takže pak výraz (10) bude vyjádřen konečným počtem mocnin x, a bude celistvou racionalnou funkcí x stupně m.

Pro $v = 0$ je patrně $\Pi = 0$, a rovnice (7) dá

$$\Phi(a, b, 0, x) = H(a, b, x),$$

t. j.

$$H(a, b, x) = x^{-a}(1 - x)^{-b} \int_0^x x^{a-1}(1 - x)^{b-1}\, dx. \tag{11}$$

Pokud realné části veličin a a b jsou kladné, lze psáti

$$\int_0^x x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}d\xi - \int_x^1 \xi^{a-1}(1-\xi)^{b-1}d\xi;$$

první integrál na pravé straně má hodnotu

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

druhý po substituci $\xi = 1-\eta$ obdrží tvar

$$\int_0^{1-x} \eta^{b-1}(1-\eta)^{a-1}d\eta,$$

takže vychází

$$H(a,b,x) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{-a}(1-x)^{-b} - (1-x)^{-b}x^{-a}\int_0^{1-x}\eta^{b-1}(1-\eta)^{a-1}d\eta$$

čili

(12) $$H(a,b,x) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{-a}(1-x)^{-b} - H(b,a,1-x).$$

Pokud a, b jsou různy od nully a od záporných čísel celistvých a pokud x leží na př. mezi 0 a 1, konvergují obě řady

$$H(a,b,x) = \sum_0^\infty \frac{(a+b,n)}{(a,n+1)} x^n,\quad H(b,a,1-x) = \sum_0^\infty \frac{(a+b,n)}{(b,n+1)}(1-x)^n$$

a jsou jednoznačné funkce proměnných a a b; rovnice (12) zůstává pak platnou pro všecky řečené soustavy hodnot a, b, jakožto jejich funkce analytická.

Na pravé straně rovnice (12) je druhý člen funkce pravidelná v bodě $x=1$, a vychází tedy, že se „*funkce $H(a,b,x)$ na místě $x=1$ chová tak jako funkce*

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{-a}(1-x)^{-b};$$

i jest tedy $x=1$ místem zvláštním funkce H, a to v konečnu její jediným.

Podobný vztah jako (12) se objeví u funkce Φ. Tu bude především

(13) $$\overline{K}(a,b,v) = \overline{K} = \int_0^1 e^{vx}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

míti hodnotu

$$\sum_0^\infty \frac{v^\nu}{\nu!}\int_0^1 x^{a+\nu-1}(1-x)^{b-1}dx = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(b)}{\nu!\,\Gamma(a+b+\nu)} v^\nu$$

čili

(13[1]) $$\overline{K}(a,b,v) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} K(a,b,v).$$

Substitucí $x = 1 - y$ vyjde z integrálu (13) vztah

(14) $$\overline{K}(a, b, v) = e^v \, \overline{K}(b, a, -v)$$

a tedy též

(14[1]) $$K(a, b, v) = e^v \, K(b, a, -v) \,.$$

Upněme nyní svoji pozornost na integrál (2); možno jej psáti

$$\psi(x) = \int_0^1 e^{vx} x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx - \int_x^1 e^{v\xi} \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} d\xi \,;$$

užije-li se vzorce (13) a klade-li se v druhém integrálu $\xi = 1 - \eta$, vyjde

(15) $$\psi(a, b, v, x) = \overline{K}(a, b, v) - e^v \psi(b, a, -v, 1-x) \,,$$

a odtud se obdrží

(16) $$\Phi(a, b, v, x) = \overline{K}(a, b, v) \, x^{-a} (1-x)^{-b} - e^v \, \Phi(b, a, -v, 1-x) \,.$$

Vyjádří-li se obě strany na základě vzorce (7), obdržíme

$$K(a, b, v) \, H(a, b, x) - \Pi(a, b, v, x) = \overline{K}(a, b, v) \, x^{-a} (1-x)^{-b}$$
$$- e^v \, K(b, a, -v) \, H(b, a, 1-x) + e^v \, \Pi(b, a, -v, 1-x) \,,$$

čili vzhledem k vlastnostem (12), (13[1]) a (14[1]),

$$K(a, b, v) \,.\, \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \, x^{-a} (1-x)^{-b} - \Pi(a, b, v, x) =$$
$$= \overline{K}(a, b, v) \, x^{-a} (1-x)^{-b} + e^v \, \Pi(b, a, -v, 1-x) \,;$$

prvé členy na obou stranách jsou si patrně rovny, i nacházíme tak rovnici

(17) $$\Pi(a, b, v, x) = -e^v \, \Pi(b, a, -v, 1-x) \,.$$

II.

Funkce $H(a, b, x)$ hoví differencialné rovnici

(18) $$\frac{dH}{dx} + \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}\right) H + \frac{1}{x(x-1)} = 0,$$

kterou obdržíme přímo z rovnice (11) differencováním. Té užijeme k vyšetření funkce

(19) $$\mathfrak{M}(a, b, u) = \int_0^1 e^{ux} H(a, b, x) \, dx \,.$$

Existence tohoto integrálu je zajištěna podmínkou, aby a nebylo celistvé číslo záporné neb nulla, dále aby realná část b byla menší jedné. Neboť lze integrovati přímo dle rozvoje (8) od $x = 0$ do $x = \frac{1}{2}$, načež rozklad (12) umožní integraci od $x = \frac{1}{2}$ do $x = 1$.

Dříve však určíme integrál

$$\mathfrak{M}(a, b, 0) = \int_0^1 H(a, b, x)\, dx = \mathfrak{M}$$

za podmínek užších, z nichž se pak snadno budeme moci vyzouti.

Ježto

$$H(a, b, x) = x^{-a} (1 - x)^{-b} \int_0^x y^{a-1} (1 - y)^{b-1} dy$$

po substituci $y = x\eta$ zní

$$H(a, b, x) = (1 - x)^{-b} \int_0^1 \eta^{a-1} (1 - x\eta)^{b-1} d\eta,$$

obdržíme

$$\mathfrak{M} = \int_0^1 \int_0^1 \eta^{a-1} \left(\frac{1 - x}{1 - x\eta}\right)^{1-b} \frac{dx\, d\eta}{1 - x}.$$

Položme na místě x

$$\frac{1 - x}{1 - \eta x} = \xi,\ x = \frac{1 - \xi}{1 - \xi\eta},\ 1 - x = \frac{1 - \eta}{1 - \xi\eta}\xi,\ dx = -\frac{1 - \eta}{(1 - \xi\eta)^2} d\xi$$

a obdržíme

$$\mathfrak{M} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\xi^{-b} \eta^{a-1}}{1 - \xi\eta} d\xi\, d\eta;$$

při tom jsme předpokládali realné části veličin a, b v mezích 0 a 1.

Pomocí geometrické řady

$$\frac{1}{1 - \xi\eta} = \sum_0^\infty \xi^\nu \eta^\nu$$

obdržíme pak

$$\mathfrak{M} = \sum_0^\infty \int_0^1 \int_0^1 \xi^{\nu-b} \eta^{a+\nu-1} d\xi\, d\eta = \sum_0^\infty \frac{1}{(a + \nu)(\nu + 1 - b)},$$

a ježto

$$\frac{1}{(a + \nu)(\nu + 1 - b)} = \frac{1}{a + b - 1} \left(\frac{1}{\nu + 1 - b} - \frac{1}{a + \nu}\right),$$

nacházíme vzhledem ke známé rovnici

$$\sum_{\nu=0}^\infty \left(\frac{1}{x + \nu} - \frac{1}{y + \nu}\right) = \frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

při označení

(20) $$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

výsledek

(21) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(a, b, 0) = \frac{\psi(a) - \psi(1 - b)}{a + b - 1} = \int_0^1 H(a, b, x)\, dx.$$

To předeslavše, obraťme se k rovnici (18), kterou přepišme na tvar

$$(x^2 - x)\frac{d\,H}{d\,x} + [(a+b)\,x - a]\,H + 1 = 0.$$

Odtud plyne

$$(22)\qquad \int_0^1 (x^2 - x)\, e^{ux}\, d\,H + \int_0^1 [(a+b)\,x - a]\, e^{ux} H\, d\,x + \int_0^1 e^{ux}\, d\,x = 0,$$

a ježto předpokládáme realnou část veličiny b v mezích $-\infty$ a 1, vymizí součin

$$(x^2 - x)\, H\,(x)$$

na mezích $x = 0$ a $x = 1$, takže

$$\int_0^1 (x^2 - x)\, e^{ux}\, d\,H = -u\int_0^1 (x^2 - x)\, e^{ux}\, H\,(x)\, d\,x - \int_0^1 e^{ux}\,(2\,x - 1)\, H\,(x)\, d\,x\,;$$

zavede-li se prozatímné označení

$$J = \mathfrak{M}\,(a, b, u) = \int_0^1 e^{ux}\; H\,(a\,b, x)\, d\,x,$$

bude

$$\int_0^1 x^\nu\, e^{ux}\, H\,(a, b, x)\, d\,x = \frac{d^\nu J}{d\,u^\nu},$$

a tedy nalezený právě výraz

$$\int_0^1 (x^2 - x)\, e^{ux}\, d\,H = -u\frac{d^2 J}{d\,u^2} + (u - 2)\frac{d\,J}{d\,u} + J,$$

$$\int_0^1 [(a+b)\,x - a]\, e^{ux}\, H\,(x)\, d\,x = (a+b)\frac{d\,J}{d\,u} - a\,J,$$

dále jest

$$\int_0^1 e^{ux}\, d\,x = \frac{e^u - 1}{u},$$

a tedy zní (22) po změně znamení

$$(22^1)\qquad u\frac{d^2 J}{d\,u^2} - (a + b - 2 + u)\frac{d\,J}{d\,u} + (a - 1)\,J = \frac{e^u - 1}{u}.$$

Zaveďme prozatím značky

$$a' = 1 - a,\quad b' = 1 - b,$$

aby se rovnice (22^1) mohla psáti ve tvaru

$$(22^2)\qquad u\frac{d^2 J}{d\,u^2} + (a' + b' - u)\frac{d\,J}{d\,u} - a'\,J = \frac{e^u - 1}{u}.$$

Vypočteme-li na obou stranách n-té derivace pro $u = 0$, obdržíme vztah

$$(n + a' + b')\, J^{(n+1)}(0) - (n + a')\, J^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

odtud pak

$$(23)\qquad \frac{(a' + b', n + 1)}{(a', n + 1)} J^{(n+1)}(0) - \frac{(a' + b', n)}{(a', n)} J^{(n)}(0) = \frac{(a' + b', n)}{(n + 1)(a, n + 1)}$$

Sečte-li se tu na obou stranách pro $n = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, vyjde

$$\frac{(a' + b', n)}{(a', n)} J^{(n)}(0) = J(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(a' + b', \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)}$$

a tedy

$$(23^*)\qquad J^{(n)}(0) = \frac{(a', n)}{(a' + b', n)} J(0) + \frac{(a', n)}{(a' + b', n)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(a' + b', \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)}.$$

Zde

$$J(0) = \frac{\psi(a) - \psi(1 - b)}{a + b - 1},$$

a Maclaurinova řada funkce

$$J = \mathfrak{M}(a, b, u)$$

bude zníti

$$J = J(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, (a' + b', n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a', n)}{n!\, (a' + b', n)} u^n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(a' + b', \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)}$$

t. j.

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(a, b, u) &= \frac{\psi(a) - \psi(1 - b)}{a + b - 1} K(1 - a, 1 - b, u) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, (a' + b', n)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(a' + b', \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)}; \quad a' = 1 - a,\ b' = 1 - b. \end{aligned} \right.$$

Považujíce a za konstantu, předpokládejme, že $a' + b' = -m + \xi$ je blízké zápornému číslu celistvému $-m$; pak lze náš výraz psáti

$$(25)\qquad \mathfrak{M}(a, b, u) =$$

$$= \Gamma(-m + \xi) \left[\frac{\psi(a) - \psi(a - m - 1 + \xi)}{m + 1 - \xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, \Gamma(-m + n + \xi)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, \Gamma(-m + n + \xi)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-m + \xi, \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)} \right]$$

Výraz uvnitř hranaté závorky [ ] musí vymizeti pro $\xi = 0$, t. j. musí

$$\frac{\psi(a) - \psi(a - m - 1)}{m + 1} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, (n - m - 1)!} +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\, (n - m - 1)!} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-m, \nu - 1)}{\nu\, (a', \nu)} = 0.$$

V druhé řadě je vzhledem k podmínce $n \geqq m + 1$ vnitřní součet

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-m, \nu-1)}{\nu\,(a', \nu)} = \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{(-m, \nu-1)}{\nu\,(a', \nu)}$$

nezávislý na n, takže rovnice poslední bude zníti

$$\left[\frac{\psi(a) - \psi(a-m-1)}{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{(-m, \nu-1)}{\nu\,(a', \nu)}\right] \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,(n-m-1)!} = 0;$$

musí tedy

$$\frac{\psi(a) - \psi(a-m-1)}{m+1} = -\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{(-m, \nu-1)}{\nu\,(a', \nu)}, \tag{26}$$

aneb lépe

$$\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{1}{a-\nu} = -(m+1) \sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{(-m, \nu-1)}{\nu\,(a', \nu)}\;;\; a' = 1 - a. \tag{26*}$$

Avšak derivace uzávorkovaného výrazu na pravé straně rovnice (25) je příliš složitá; bude lépe uvolniti výraz takto

$$\mathfrak{M}(a, b, u) = \frac{\psi(a) - \psi(a-m-1+\xi)}{m+1-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,(-m+\xi, n)} + \tag{25¹}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(-m+\nu-1+\xi)}{\nu\,(a', \nu)\,\Gamma(-m+n+\xi)},$$

a stanoviti hodnotu levé strany pro $\xi = 0$ jako stálý člen rozvoje dle mocnin proměnné ξ. Tu především máme

$$\left\{\frac{\Gamma(-m+\nu-1+\xi)}{\Gamma(-m+n+\xi)}\right\}_0 = (-1)^{n-\nu+1} \frac{(m-n)!}{(m-\nu+1)!} \text{ pro } n \leq m\,;$$

tedy

$$\left\{\sum_{n=1}^{m} \frac{(a', n)\, u^n}{n!} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(-m+\nu-1+\xi)}{\nu\,(a', \nu)\,\Gamma(-m+n+\xi)}\right\}_0 =$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{(a', n)\, u^n}{n!} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu+1} \frac{(m-n)!}{\nu\,(a', \nu)\,(m-\nu+1)!} \tag{1}$$

V řadě

$$S = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,\Gamma(n-m+\xi)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma(-m+\nu-1+\xi)}{\nu\,(a', \nu)}$$

jsou jmenovatelé $\Gamma(n-m+\xi)$ pravidelní na $\xi = 0$. Třeba ještě znáti stálý člen rozvoje funkce $\Gamma(-p+\xi)$; tu jest

$$\Gamma(-p+\xi) = \frac{\Gamma(1+\xi)}{\xi\,(\xi-1)\,(\xi-2)\ldots(\xi-p+1)\,(\xi-p)} =$$
$$= (-1)^p \frac{1 + \Gamma'(1)\,\xi + \ldots}{\xi\,(1-\xi)\,(2-\xi)\ldots(p-\xi)} = \frac{(-1)^p}{p!\,\xi} \frac{1 + \Gamma'(1)\,\xi + \ldots}{(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)\left(1-\frac{\xi}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{\xi}{p}\right)}$$

tedy

$$\Gamma(-p+\xi)=\frac{(-1)^p}{p!\,\xi}+\frac{(-1)^p}{p!}\left[\Gamma'(1)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}\right]+(\xi)\,,$$

kde (ξ) značí mocninnou řadu, která mizí zároveň s ξ. Výsledek ten lze přehledněji psáti

$$\Gamma(-p+\xi)=\frac{(-1)^p}{p!\,\xi}+\frac{(-1)^p}{p!}\,\psi(p+1)+(\xi)\,. \tag{27}$$

Obraťme se nyní k řadě S; tam bude

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\Gamma(-m+\nu-1+\xi)}{\nu\,(a',\nu)}=\frac{1}{\xi}\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1-\nu}}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1-\nu}\,\psi(m+2-\nu)}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}+\sum_{\nu=m+2}^{n}\frac{(\nu-m-2)!}{\nu\,(a',\nu)}+(\xi)\,,$$

tedy

2)
$$S=-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,\psi(n-m)}{n!\,(n-m-1)!}\,u^n\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1-\nu}}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}+$$

$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}\left\{\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1-\nu}\,\psi(m+2-\nu)}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}+\sum_{\nu=m+2}^{n}\frac{(\nu-m-2)!}{\nu\,(a',\nu)}\right\}$$

$$+\frac{A}{\xi}+(\xi)\,.$$

V řadě

$$T=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(-m+\xi,n)}$$

jsou členové od $n=m+1$ počínaje nekoneční pro $\xi=0$, naproti tomu členové $n=0,1,\ldots m$ jsou koneční; tedy

$$T=\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n\,(a',n)\,u^n}{n!\,m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,\Gamma(-m+\xi)}{n!\,\Gamma(n-m+\xi)}\,u^n+(\xi)$$

bude dle (27) zníti

$$T=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}+\frac{(-1)^m}{m!\,\xi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}+$$

$$+\frac{(-1)^{m-1}}{m!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,\psi(n-m)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}+\frac{(-1)^m}{m!}\,\psi(m+1)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}$$

$$+(\xi)$$

čili

$$T=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,n!\,\binom{m}{n}}+\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)-\psi(n-m)}{n!\,(n-m-1)!}\,(a',n)\,u^n$$

$$+\frac{(-1)^m}{m!\,\xi}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}+(\xi)\,,$$

a tedy

3)
$$\frac{\psi(a)-\psi(a-m-1+\xi)}{m+1-\xi}T=$$
$$=\left[\frac{\psi(a)-\psi(a-m-1)}{(m+1)^2}-\frac{\psi'(a-m-1)}{m+1}\right]\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}$$
$$+\frac{\psi(a)-\psi(a-m-1)}{m+1}R+\frac{B}{\xi}+(\xi).$$

kde R značí výraz
$$\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,n!\,\binom{m}{n}}+\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)-\psi(n-m)}{n!\,(n-m-1)!}(a',n)\,u^n$$

Podmínka $a'+b'=-m=2-a-b$ dá $a-m-1=1-b$, a tak lze po shrnutí výsledků 1), 2) a 3) psáti

$$\mathfrak{M}(a,b,u)=\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\left[\psi'(1-b)-\frac{\psi(a)-\psi(1-b)}{m+1}\right]\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}$$
$$+\frac{\psi(a)-\psi(1-b)}{m+1}\left\{\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,n!\,\binom{m}{n}}+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\psi(m+1)-\psi(n-m)}{n!\,(n-m-1)!}(a',n)\,u^n\right\}$$
$$+\sum_{n=1}^{m}\frac{(a',n)\,u^n}{n!}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n+\nu+1}\frac{(m-n)!}{\nu\,(a',\nu)\,(m-\nu+1)!}$$
$$+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}\left\{\sum_{\nu=1}^{m+1}(-1)^{m+1-\nu}\frac{\psi(m+2-\nu)}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{\nu=m+2}^{n}\frac{(\nu-m-2)!}{\nu\,(a',\nu)}\right\}$$
$$-\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{(a',n)\,\psi(n-m)\,u^n}{n!\,(n-m-1)!}\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{(-1)^{m+1+\nu}}{\nu\,(m+1-\nu)!\,(a',\nu)}.$$

Volme zvláštní případ $m=0$, kdy totiž $a+b=2$; tu se výraz značně zjednoduší a bude

$$\mathfrak{M}(u)=\left[\frac{1}{a-1}-\psi'(a-1)\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-1)!}$$
$$+\frac{1}{a-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(1)-\psi(n)}{n!\,(n-1)!}(a',n)\,u^n\right]$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a',n)\,u^n}{n!\,(n-1)!}\left[\frac{\psi(1)-\psi(n)}{1-a}+\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(\nu-2)!}{\nu\,(a',\nu)}\right];$$

zde se výraz na druhé řádce zruší vůči první části řádky třetí až na jeden člen, i vyjde

$$\mathfrak{M}(u) = \left[\frac{1}{a-1} - \psi'(a-1)\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,(n-1)!} + \frac{1}{a-1}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,(n-1)!} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(\nu-2)!}{\nu\,(a', \nu)}$$

t. j.

(28) $$\mathfrak{M}(u) = \frac{1}{a-1} + \left[\frac{1}{a-1} - \psi'(a-1)\right] \sum_{1}^{\infty} \frac{(a', n)\, u^n}{n!\,(n-1)!}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{u^n}{n!\,(n-1)!} \sum_{\nu=2}^{n} \frac{(\nu-2)!\,(a'+\nu,\ n-\nu)}{\nu}\ ; \ (a+b=2).$$

Jiné stanovení integrálu $\mathfrak{M}(a, b, u)$ obdržíme z výrazu

$$J = \mathfrak{M}(a, b, u) = \int_0^1 e^{ux} x^{-a} (1-x)^{-b}\, dx \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx$$

částečnou integrací, při čemž budeme prozatím předpokládati, že realné části veličin a, b jsou v mezích 0 a 1. Obrdžíme

$$J = \int_0^1 e^{ux} x^{-a} (1-x)^{-b}\, dx . \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx -$$
$$- \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1}\, dx \int_0^x e^{ux} x^{-a} (1-x)^{-b}\, dx$$

t. j.

$$J = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\, \overline{K}(1-a, 1-b, u) - \int_0^1 \Phi(1-a, 1-b, u, x)\, dx;$$

poněvadž

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\ \Gamma(2-a-b)\,\Gamma(a+b) = (1-a-b)\frac{\pi}{\sin \pi(a+b)},$$

lze tento vztah psáti

(29) $$\mathfrak{M}(a, b, u) =$$
$$-\pi \frac{\operatorname{cotg} a\pi + \operatorname{cotg} b\pi}{a+b-1} K(1-a, 1-b, u) - \int_0^1 \Phi(1-a, 1-b, u, x)\, dx.$$

Integrál na pravé straně přicházející se pak určí pomocí vzorce (7)

$$\Phi(1-a, 1-b, u, x) = K(1-a, 1-b, u)\, H(1-a, 1-b, x)$$
$$- \Pi(1-a, 1-b, u, x)$$

ve tvaru

$$\int_0^1 \Phi(1-a, 1-b, u, x)\, dx = K(1-a, 1-b, u) \int_0^1 H(1-a, 1-b, x)\, dx$$
$$- \int_0^1 \Pi(1-a, 1-b, u, x)\, dx\ ;$$

tu jest především dle (9), píšeme-li opětně $1-a=a'$, $1-b=b'$,

$$\int_0^1 \Pi(a', b', u, x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a'+b', n)}{(n+1)(a', n+1)} \left[K(a', b', u) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a', \nu)\, u^{\nu}}{\nu!\, (a'+b', \nu)} \right]$$

a dle (21)

$$\int_0^1 H(1-a, 1-b, x)\, dx = \frac{\psi(1-a) - \psi(b)}{1-a-b},$$

takže dle (29) bude

$$\mathfrak{M}(a, b, u) = \left[-\pi \frac{\operatorname{cotg} a\pi + \operatorname{cotg} b\pi}{a+b-1} + \frac{\psi(1-a) - \psi(b)}{a+b-1} \right] K(a', b', u) + $$
$$+ \int_0^1 \Pi(a', b', u, x)\, dx .$$

Ježto

$$\pi \operatorname{cotg} a\pi - \psi(1-a) = -\psi(a) \;,\; \pi \operatorname{cotg} b\pi + \psi(b) = \psi(1-b) ,$$

zjednoduší se poslední výsledek jak následuje:

$$(30) \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{M}(a, b, u) = \frac{\psi(a) - \psi(1-b)}{a+b-1} K(1-a, 1-b, u) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a'+b', n)}{(n+1)(a', n+1)} \left[K(a', b', u) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(a', \nu)\, u^{\nu}}{\nu!\, (a'+b', \nu)} \right] \end{aligned} \right.$$

Píše-li se řada na pravé straně ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a'+b', n)}{(n+1)(a', n+1)} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(a', \nu)\, u^{\nu}}{\nu!\, (a'+b', \nu)} ,$$

obdržíme pouhou změnou sčítacího pořadu, píšíce m za ν,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(a', m)\, u^{m}}{m!\, (a'+b', m)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(a'+b', n)}{(n+1)(a', n+1)}$$

a tím vychází na novo rovnice (24).

III.

Výsledky právě odvozené slouží k stanovení integrálů

$$A_{\mu, \mu'} = \int_0^1 x^{\mu} (1-x)^{\mu'} \Psi(x)\, dx \;,\; \Psi(x) = e^{-\nu x} \Phi(a, b, v, x) ,$$

které v applikacích jsou důležité. Z rovnice (7) máme

$$\Psi(x) = K(a, b, v)\, e^{-vx} H(a, b, x) - e^{-vx} \Pi(a, b, v, x) ,$$

tedy

$$A_{\mu\,\mu'} = K\,(a, b, v)\, B_{\mu,\mu'} - C_{\mu,\mu'}\,,$$

kde

$$B_{\mu,\mu'} = \int\limits_0^1 x^{\mu}\,(1-x)^{\mu'}\, e^{-vx}\, H\,(a, b, x)\, d\,x,$$

$$C_{\mu,\mu'} = \int\limits_0^1 x^{\mu}\,(1-x)^{\mu'}\, e^{-vx}\, \Pi\,(a, b, v, x)\, dx\,.$$

Tu se obdrží pomocí (9) přímo

$$C_{\mu,\mu'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b, n)}{(a, n+1)} \left\{ K\,(a, b, v) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(a+b, \nu)} \right\} \int\limits_0^1 x^{n+\mu}\,(1-x)^{\mu'}\, e^{-vx}\, dx\,,$$

při čemž integrály se vyčíslí v zakončeném tvaru, a dále se určí $B_{\mu,\mu'}$ pomocí derivací funkce $\mathfrak{M}\,(a, b, u)$ pro $u = -v$.

V případě $a + b = 2$ pišme $a = 1 + \tau$, $b = 1 - \tau$; v rovnici (29) prvý člen pišme

$$\pi \frac{\operatorname{cotg} a\,\pi + \operatorname{cotg} b\,\pi}{(a+b-1)\,(a+b-2)} \cdot (2-a-b)\, K\,(1-a,\; 1-b,\; -v)\,;$$

tu jest

$$\lim_{a+b=2}\, (2-a-b)\, K\,(1-a,\; 1-b,\; -v) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(1-a, \nu)\,(-v)^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!}\,,$$

$$\lim_{a+b=2} \frac{\operatorname{cotg} a\,\pi + \operatorname{cotg} b\,\pi}{a+b-2} = -\frac{\pi}{\sin^2 a\,\pi} = -\frac{\pi}{\sin^2 \tau\,\pi}\,,$$

tedy nám poskytne vzorec (29)

$$(31^1)\quad \mathfrak{M}\,(-v) = \frac{-\pi^2}{\sin^2 \tau\,\pi} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(-\tau, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!} - \int\limits_0^1 \Phi\,(-\tau,\; \tau,\; -v,\; x)\; dx.$$

Ve vzorci (16) veličina

$$\overline{K} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\Gamma\,(a+\nu)\; \Gamma(b)}{\nu!\, \Gamma(a+b+\nu)}\, v^{\nu}$$

zůstává určitou i pro $a + b = 0$; tedy máme dle téhož vzorce

$$\Phi\,(-\tau,\; \tau,\; -v,\; x) = \overline{K}\, x^{\tau}\;\; (1-x)^{-\tau} - e^{-v}\, \Phi\,(\tau,\; -\tau,\; v,\; 1-x),$$

kde

$$\overline{K} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{\Gamma\,(\nu-\tau)\; \Gamma\,(\tau)}{\nu!\;\; \Gamma\,(\nu)}\, v^{\nu} = \Gamma(\tau)\, \Gamma\,(-\tau) \sum_{1}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{(-\tau,\; \nu)\; v^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!}$$

Následovně bude

(31[2])

$$\int_0^1 \Phi(-\tau, \tau, -v, x)\, dx = K \,.\, \Gamma(1+\tau)\, \Gamma(1-\tau) - c^{-v} \int_0^1 \Phi(\tau, -\tau, v, 1-x)\, dx,$$

a prvý člen pravé strany lze psáti

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2 \tau\pi} \sum_{\dot{}}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(-\tau, \nu)\, v^\nu}{\nu!\, (\nu-1)!}$$

i vypadne z rovnice (31[1]) po dosazení hodnoty (31[2]); tedy máme

$$\mathfrak{M}(-v) = c^{-v} \int_0^1 \Phi(\tau, -\tau, v, x)\, dx. \tag{31}$$

Funkci

$$\Phi(\tau, -\tau, v, x)$$

chceme vyšetřiti jako krajní hodnotu funkce

$$\Phi(\tau + \xi, -\tau, v, x) = \Phi(\tau_1, -\tau, v, x), \; (\tau_1 = \tau + \xi),$$

která dle (7), (8) a (9) splývá s výrazem

$$\Phi = K(\tau_1, -\tau, v)\, H(\tau_1, -\tau, x) - \Pi(\tau_1, -\tau, v, x)$$

$$= \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\xi \nu!\, (1+\xi, \nu-1)}\right) \left(\frac{1}{\tau_1} + \xi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1+\xi, \nu-1)\, x^\nu}{(\tau_1, \nu+1)}\right)$$

$$-\frac{1}{\tau_1} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\xi \nu!\, (1+\xi, \nu-1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\xi, n-1)}{(\tau_1, n+1)} x^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\nu!\, (1+\xi, \nu-1)};$$

při tom jsme funkci Π vyjádřili prvým tvarem (9) a isolovali jsme člen $n = 0$. Vynásobíme-li první dvě závorky, zruší se člen

$$\frac{1}{\tau_1} \sum_{1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\xi \nu!\, (1+\xi, \nu-1)},$$

a zbude

$$\Phi = \frac{1}{\tau_1} + \xi S + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\nu!\, (1+\xi, \nu-1)} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1+\xi, \nu-1)\, v^\nu}{(\tau_1, \nu+1)}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\xi, n-1)}{(\tau_1, n+1)} x^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(\tau_1, \nu)\, v^\nu}{\nu!\, (1+\xi, \nu-1)};$$

zde se provede přechod ke krajní hodnotě $\xi = 0$ bezprostředně i objeví se tvar

$$\Phi(\tau, -\tau, v, x) = \frac{1}{\tau} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(\tau, \nu)}{\nu!\, (\nu-1)!} v^\nu \,.\, \sum_{1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\, x^\nu}{(\tau, \nu+1)}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(\tau, n+1)} x^n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{(\tau, \nu)\, v^\nu}{\nu!\, (\nu-1)!};$$

zde

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(\nu-1)!\,x^{\nu}}{(\tau, \nu+1)} = \frac{x}{\tau} \sum_{0}^{\infty} \frac{n!\,x^{n}}{(\tau+1, n+1)} = \frac{x}{\tau} H(\tau+1, -\tau, x)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(\tau, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!} = \tau v \sum_{0}^{\infty} \frac{(\tau+1, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu+1)!} = v \tau K(1+\tau, 1-\tau, v)$$

tedy

$$\Phi(\tau, -\tau, v, x) = \frac{1}{\tau} + v x K(1+\tau, 1-\tau, v) H(1+\tau, -\tau, x)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(\tau, n+1)} x^{n} \left\{ v \tau K(1+\tau, 1-\tau, v) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\tau, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!} \right\}$$

Zde tedy bude

$$\int_0^1 \Phi(\tau, -\tau, v, x)\, dx = \frac{1}{\tau} + v K(1+\tau, 1-\tau, v) \int_0^1 x H(1+\tau, -\tau, x)\, dx$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)(\tau, n+1)} \left[v \tau K(1+\tau, 1-\tau, v) - \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(\tau, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu-1)!} \right].$$

Integrál

$$J'(0) = \int_0^1 x H(1+\tau, -\tau, x)\, dx$$

se určí podle (23*) ve tvaru

$$J'(0) = \frac{a'}{a'+b'} J(0) + \frac{a'}{a'+b'} \frac{1}{a'};$$

zde $a' = -\tau$, $b' = 1+\tau$, $a'+b' = a+b = 1$, takže vzorec

$$J(0) = \frac{\psi(a) - \psi(1-b)}{a+b-1}$$

přechází ve tvar neurčitý $\frac{0}{0}$; pravá hodnota veličiny té jest tedy

$$J(0) = \psi'(a) = \psi'(1+\tau),$$

$$J'(0) = -\tau \psi'(1+\tau) + 1$$

a následkem toho poslední výraz pro

$$\int_0^1 \Phi(\tau, -\tau, v, x)\, dx$$

bude zníti

$$\text{(32)} \quad \int_0^1 \Phi(\tau, -\tau, v, x)\, dx = \frac{1}{\tau} + v K(1+\tau, 1-\tau, v) [1 - \tau \psi'(\tau+1)]$$

$$-v \tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)(\tau, n+1)} \left[K(1+\tau, 1-\tau, v) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\tau+1, \nu)\, v^{\nu}}{\nu!\,(\nu+1)!} \right]$$

takže máme pro integrál

$$\mathfrak{M}(-v) = \int_0^1 e^{-vx} H(1+\tau, 1-\tau, x)\, dx$$

vyjádření plynoucí z rovnice (31)

$$(33)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}(-v) = \dfrac{1}{\tau} e^{-v} + [1 - \tau\,\psi'(\tau+1)]\, v\, K(1-\tau, 1+\tau, -v) \\ -v\,\tau\, e^{-v} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)(\tau, n+1)} \left[K(1+\tau, 1-\tau, v) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(\tau+1, \nu)\, v^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!} \right]. \end{cases}$$

Znajíce tento výraz, můžeme stanoviti integrál

$$M = \int_0^1 e^{-vx} \Phi(1+\tau, 1-\tau, v, x)\, dx = \int_0^1 \frac{\varphi_{00}(x,}{x(1-x)}\, dx\,;$$

obdržíme totiž pomocí (7)

$$\int_0^1 e^{-vx} \Phi(1+\tau, 1-\tau, v, x)\, dx = K(1+\tau, 1-\tau, v) \int_0^1 e^{-vx} H(1+\tau, 1-\tau, x)\, dx$$
$$- \int_0^1 e^{-vx}\, \Pi(1+\tau, 1-\tau, v, x)\, dx,$$

tedy

$$(34)\quad \begin{cases} M = K(1+\tau, 1-\tau, v)\, \mathfrak{M}(-v) \\ - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{(1+\tau, n+1)} \left[K(1+\tau, 1-\tau, v) - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(1+\tau, \nu)\, v^\nu}{\nu!\,(\nu+1)!} \right] \varphi^{(n)}(v) \end{cases}$$

kde

$$\varphi(v) = \int_0^1 e^{-vx}\, dx = \frac{1 - e^{-v}}{v}, \quad (-1)^n \varphi^{(n)}(v) = \int_0^1 x^n e^{-vx}\, dx.$$

Řada (8) v našem případě $a = 1 + \tau$, $b = 1 - \tau$.

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!\, x^n}{(a, n+1)}$$

konverguje stejně rychle jako řada

$$\sum \frac{x^n}{n^\tau},$$

tedy pro malá τ zvolna, a bylo by naivní chtít stanovit integrály $\mathfrak{M}(u)$ integrací člen po členu této řady, pokud τ nepřevyší určitou mez. Pro $\tau \geqq 3$ a možno-li se spokojiti s menším počtem desetinek, jednoduchá tato methoda ovšem dostačí. Naproti tomu jsou řady vyskytující se ve vzorcích (33) a (34) ustavičně konvergentní a tedy velmi rychle sběžné, vezme-li se do počtu dostatečný počet členů.

Co se tkne funkce

$$K\,(a,\,b,\,v) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(a,\,n)\,v^n}{\nu!\,(a+b,\,\nu)}\,,$$

podáme níže (IV.) řetězový rozvoj její logarithmické derivace; tím bude hodnotou $K\,(v)$ určena také hodnota $K'\,(v)$; pomocí differencialní rovnice

$$v\,\frac{d^2 y}{d\,v^2} + (a + b - v)\,\frac{dy}{dv} - a\,y = 0\,,$$

které hoví funkce $y = K\,(a,\,b,\,v)$, vypočtou se pak všecky následující derivace a tedy též koefficienty Taylorova rozvoje funkce $K\,(v)$ v okolí bodu v.*)

Co se tkne funkce $H\,(a,\,b,\,x)$, vložme do integrálu (11)

$$x = \frac{z}{1+z}\,,\quad z = \frac{x}{1-x}\,,$$

i vyjde

$$\int_0 x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}\,dx = \int_0 \frac{z^{a-1}\,dz}{(1+z)^{a+b}}\,,$$

tedy

(35) $$H\,(a,\,b,\,x) = \frac{(1+z)^{a+b}}{z^a}\int_0 \frac{z^{a-1}\,dz}{(1+z)^{a+b}}\,,\quad z = \frac{x}{1-x}\,.$$

Je-li $a + b$ celistvé kladné číslo, převede se pravá strana integrací po částech na stanovení funkce

(35[1]) $$\int_0 \frac{z^{c-1}\,dz}{1+z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{z^{c+\nu}}{c+\nu}\,,$$

pro niž podal již Lagrange rychle konvergentní rozvoj řetězový,**) který v následujícím rozšíříme na případ obecný.

Poznamenejme ještě pro případ $a + b = 2$, že lze pomocí vzorce (35) verifikovati rovnici

$$\int_0^1 \frac{\xi^{a-1}\,d\,\xi}{(u+\xi)^2} = \sum_0^{\infty} \frac{(\nu+1)!}{(a,\,\nu+1)}\,\frac{1}{(u+1)^{\nu+2}}\,,$$

z níž vychází integrací dle u

(36)
$$\int_0^1 \frac{\xi^{a-1}\,d\,\xi}{u+\xi} = \sum_0^{\infty} \frac{\nu!}{(a,\,\nu+1)}\,\frac{1}{(u+1)^{\nu+1}} = \int_0^{\frac{1}{u+1}} H\,(x)\,dx\,,\ H\,(x) = H\,(a,\,2-a,\,x)\,.$$

---

*) Jiné řešení téhož problému podáme v jedné z příštích rozprav.

**) Lagrangeova funkce jest integrál $\int \frac{dz}{1+z^\omega}$; substitucí $z^\omega = u$ objeví se integrál tvaru (35[1]).

Pro $u = 1$ máme odtud zvláštní případ vzorce (21)

$$\int_0^1 H(x)\, dx = \frac{1}{a-1};$$

z řady, kterou jsme definovali funkci $H(x)$ pak obdržíme jednoduchou transformací

$$\int_0^x H(a, 2-a, x)\, dx = \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a} H(a+1, 1-a, x),$$

a vložíme-li sem $x = 1$, obdržíme pomocí předešlé rovnice

$$H(1+a, 1-a, 1) = \frac{1}{a-1}.$$

Jiný zajímavý detail vychází z (36) pro $u = 1$:

$$\int_0^1 H(x)\, dx = \int_0^1 \frac{\xi^{a-1}\, d\xi}{1+\xi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{1}{a+\nu} = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{a+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{a}{2}\right)\right],$$

čili píše-li se $a = 1 + \tau$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} H(1+\tau, 1-\tau, x)\, dx = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\psi\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1+\tau}{2}\right). \tag{37}$$

IV.

Jiná vyjádření funkce $H(a, b, x)$ plynou jako zvláštní případy řady hypergeometrické, a sice vytkl je Schaeffer v rozpravě Adnotationes ad seriem*)

$$1 + \frac{x}{y} v + \frac{x(x+1)}{y(y+1)} v^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{y(y+1)(y+2)} v^3 + \ldots\ldots$$

kteréžto vzorce zde prostě přepisuji:

$$H(a, b, x) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)\,\Gamma(1-b)} \int_0^1 \frac{t^{a+b-1}}{(1-t)^b} \frac{dt}{1-tx} = \tag{38}$$

$$= (-x)^{-a} (1-x)^{-b} \int_0^{\frac{x}{x-1}} \frac{t^{a-1}\, dt}{(1-t)^{a+b}}$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)\,\Gamma(1-b)} \int_0^\infty \frac{t^{-b}(1+t)^{-a}}{1-x+t}\, dt.$$

---

*) Crelleův žurnál, sv. 37., str. 127.

První z těchto tvarů funkce $H(a, b, x)$ nás povede k odvození řetězového rozvoje jejího, při čemž nám bude toliko nápodobiti postup známý z prací Čebyševa o mechanické kvadratuře.

Uvažujme polynom

$$P_n(t) = \varkappa\, t^{1-\alpha}(1-t)^{1-\beta} D_t^n \left[t^{n+\alpha-1}(1-t)^{n+\beta-1}\right], \tag{39}$$

v němž α, β značí dvě konstanty s kladnou částí realnou, $\varkappa$ konstantu, již si později přiměřeně zvolíme; značí-li nám $\Pi(t)$ libovolný polynom stupně $n-1$, bude

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\overline{P}_n(t)\,\Pi(t)\,dt = 0, \tag{40}$$

neboť po odstranění konstanty $\varkappa$ je tento integrál

$$\int_0^1 \Pi(t)\, D^n\left[t^{n+\alpha-1}(1-t)^{n+\beta-1}\right] dt$$

a bude při označení

$$u = \Pi(t),\ v = t^{n+\alpha-1}(1-t)^{n+\beta-1}$$

zníti

$$\int_0^1 u\, v^{(n)}\, dt;$$

integrál tento určí se podle vzorce

$$\int u\, v^{(n)}\, dt = u\, v^{(n-1)} - u'\, v^{(n-2)} + u''\, v^{(n-3)} - \ldots \mp u^{(n-1)}\, v \pm \int u^{(n)}\, v\, dt; \tag{41}$$

zde jest identicky $u^{(n)} = 0$, a ježto realné části veličin α a β jsou kladné, zmizí hodnoty $v^{(n-1)}$, $v^{(n-2)}$, ... na bodech $t = 0$ a $t = 1$, takže bude

$$\int_0^1 u\, v^{(n)}\, dt = 0,$$

jak tvrzeno.

V rozvoji integrálu

$$C\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{1-tx}\,\overline{P}_n(t)\,dt = R_n$$

dle mocnin x vymizí součinitelé při x^0, x^1, x^2, ... x^{n-1}, a znamenáme-li

$$Q_n(x) = C\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}x^{n-1}\frac{\overline{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) - \overline{P}_n(t)}{\frac{1}{x} - t}\,dt, \tag{42}$$

bude při označení

$$x^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{x}\right) = P_n(x)$$

předešlý výraz zníti

$$(43)\qquad Q_n(x) = P_n(x)\, C\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{1-tx}\,dt - x^n R_n.$$

a odtud plyne

(44)

$$C\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt}{1-tx} = \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} + \frac{x^n R_n}{P_n(x)} = \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} + A\,x^{2n} + A'\,x^{2n+1} + \ldots$$

Zde $Q_n(x)$ je patrně celistvá racionalná funkce proměnné x, a z rovnice (44) vychází, že

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$$

je sbližný zlomek řetězového rozvoje pro funkci na levé straně rovnice té stojící; při tom jsme k integrálu připojili stálý faktor C, abychom specialisací mohli ihned užiti prvního vzorce Schaefferova, z něhož plyne tak

$$H(a, b, x) = \lim_{n=\infty} \frac{Q_n(x)}{P_n(x)},$$

volíme-li $\alpha = a + b$, $\beta = 1 - b$, a stálého činitele

$$(45)\qquad C = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a+b)\,(\Gamma 1 - b)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}.$$

I bude pak hledaný řetězec zníti

$$(46)\qquad H(x) = \cfrac{b_0}{a_0 + c'_0 x - \cfrac{b_1 x^2}{a_1 + c_1' x - \cfrac{b_2 x^2}{a_2 + c_2' x - \cfrac{b_3 x^2}{a_3 + c'_3 x - \ldots}}}}$$

Sbližné jeho zlomky budou

$$\frac{Q_0}{P_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{Q_1}{P_1} = \frac{b_0}{a_0 + c'_0 x},$$

načež se ostatních zlomků prvky tvoří postupně dle formuli

$$(47)\qquad \begin{aligned} P_{n+1} &= P_n(a_n + c'_n x) - P_{n-1}\, b_n\, x^2, \\ Q_{n+1} &= Q_n(a_n + c'_n x) - Q_{n-1}\, b_n\, x^2, \end{aligned}$$

z nichž vychází

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} P_n & P_{n+1} \\ Q_n & Q_{n+1} \end{vmatrix} = b_0 b_1 b_2 \ldots b_n\, x^{2n}:$$

odtud plyne

$$\frac{Q_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{Q_n}{P_n} = \frac{b_0 b_1 b_2 \ldots b_n}{P_n P_{n+1}} x^{2n} . \tag{49}$$

Volíme-li stálého činitele $\varkappa$ tak, aby $P_n(0) = 1$, bude pravá strana začínati rozvoj svůj členem

$$b_0 b_1 b_2 \ldots b_n x^{2n} ;$$

dále plyne z rovnic

$$H(x) = \frac{Q_n(x)}{P_n(x)} + \frac{x^n R_n}{P_n(x)}, \quad H(x) = \frac{Q_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)} + \frac{x^{n+1} R_{n+1}}{P_{n+1}(x)}$$

že rozvoj funkce

$$\frac{Q_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{Q_n}{P_n} = \frac{x^n R_n}{P_n} - \frac{x^{n+1} R_{n+1}}{P_{n+1}} = A x^{2n} + \ldots$$

začíná týmž členem jako

$$x^n R_n = \gamma_n x^{2n} + \gamma'_n x^{2n+1} + \ldots \tag{50}$$

Tu jest pak dle definice integrálu R_n

$$\gamma_n = C \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} t^n \overline{P}_n(t)\, dt = \varkappa C \int_0^1 t^n D^n [t^{n+\alpha-1} (1-t)^{n+\beta-1}]\, dt$$

a poslední integrál stanoví se na základě vzorce (41), takže

$$\gamma_n = \varkappa C \,.\, (-1)^n \int_0^1 n!\, t^{\alpha+n-1} (1-t)^{\beta+n-1}\, dt = (-1)^n n! \frac{\Gamma(\alpha+n)\, \Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n)} \varkappa C .$$

Dle podmínky $P_n(0) = 1$ bude nejvyšší součinitel v polynomu $\overline{P}_n(t)$ roven jedné, tedy

$$(-1)^n \varkappa \,.\, n! \binom{2n+\alpha+\beta-2}{n} = 1 ,$$

a odtud

$$(-1)^n \varkappa = \frac{(\alpha+\beta-1, n)}{(\alpha+\beta-1, 2n)} .$$

Dosadíme-li do našeho výrazu pro γ_n tuto hodnotu $\varkappa$ a hodnotu C dle (45), vyjde

$$\gamma_n = \frac{n!\, (\alpha, n)\, (\beta, n)\, (\alpha+\beta-1, n)}{(\alpha+\beta-1, 2n+1)\, (\alpha+\beta-1, 2n)} . \tag{51}$$

Porovnáním (49) a (50) nacházíme

$$b_0 b_1 b_2 \ldots b_n = \gamma_n , \tag{52}$$

tedy

$$b_n = \frac{n(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\alpha+\beta+n-2)}{(\alpha+\beta+2n-1)(\alpha+\beta+2n-2)^2(\alpha+\beta+2n-3)} \tag{53}$$

Prvá rovnice (47) pro $x=0$ poskytne vzhledem k podmínce $P_n(0)=1$ výsledek $a_n=1$ pro $n=1, 2, 3, \ldots$; veličinu a_0 můžeme voliti $=1$, takže

(54) $$a_n = 1, \; (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

dále plyne z ní

(55) $$c'_n = \left\{ \frac{P_{n+1} - P_n}{x} \right\}_{x=0}.$$

Definici funkce $\overline{P}$ pišme

$$\overline{P}_n(t) = (-1)^n t^{1-\alpha} (t-1)^{1-\beta} \varkappa D^n [t^{n+\alpha-1} (t-1)^{n-\beta-1}]$$

$$= (-1)^n t^{1-\alpha} (t-1)^{1-\beta} \varkappa D^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+\beta-1}{\nu} (-1)^\nu t^{2n+\alpha+\beta-2-\nu}$$

$$= (-1)^n \varkappa . n! \sum \binom{1-\beta}{\mu} (-1)^\mu t^{2\alpha-\beta-\mu} \sum \left\{ (-1)^\nu \binom{n+\beta-1}{\nu} \binom{2n+\alpha+\beta-2-\nu}{n} t^{n-\alpha+\beta-\nu-2} \right\}$$

čili posléze

$$\overline{P}_n(t) = (-1)^n \varkappa n! \sum_{\mu, \nu} (-1)^{\mu+\nu} \binom{1-\beta}{\mu} \binom{n+\beta-1}{\nu} . \binom{2n+\alpha+\beta-\nu-2}{n} t^{n-\mu-\nu}$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Součinitel při t^{n-1} zní

$$-(-1)^n \varkappa n! \left[(1-\beta) \binom{2n+\alpha+\beta-2}{n} + (n+\beta-1) \binom{2n+\alpha+\beta-3}{n} \right]$$

$$= (-1)^n n! \varkappa \binom{2n+\alpha+\beta-2}{n} \left[\beta - 1 - \frac{n+\alpha+\beta-2}{2n+\alpha+\beta-2} (n+\beta-1) \right]$$

$$= \frac{(\beta-1)(2n+\alpha+\beta-2) - (n+\beta-1)(n+\alpha+\beta-2)}{2n+\alpha+\beta-2}$$

$$= -\frac{n(n+\alpha-1)}{2n+\alpha+\beta-2},$$

a tedy bude

$$P_n(x) = 1 - \frac{n(n+\alpha-1)}{2n+\alpha+\beta-2} x + \ldots,$$

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{x} = -\frac{2n^2 + (\alpha+\beta+1)(2n+\alpha)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)} + (x)$$

následovně dle (55)

$$c'_n = -\frac{2n^2 + 2n(\alpha+\beta-1) + \alpha(\alpha+\beta-2)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)}$$

Změníme tedy znamení kladouce $c'_n = - c_n$; dále jest $b_0 = H(a, b, 0)$ tedy $b_0 = \frac{1}{a}$; tudíž nacházíme, že naše funkce

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b, n)\, x^n}{(a, n+1)}$$

má řetězový rozvoj

$$(56) \qquad a\, H(a, b, x) = \cfrac{1}{1 - c_0 x - \cfrac{b_1 x^2}{1 - c_1 x - \cfrac{b_2 x^2}{1 - c_2 x - \cfrac{b_3 x^2}{1 - c_3 x - \ldots}}}}$$

s hodnotami*)

$$(57) \qquad \begin{cases} b_n = \dfrac{n(a+b+n-1)(n-b)(a+n-1)}{(a+2n)(a+2n-1)^2(a+2n-2)} \\ c_n = \dfrac{2n^2 + 2na + (a+b)(a-1)}{(2n+a+1)(2n+a-1)} \end{cases}$$

Vyloučena jsou kladná realná x větší jedné.

Gaussův zlomek řetězový

$$(58) \qquad \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha, \nu)}{(\gamma, \nu)} x^\nu = \cfrac{1}{1 - \cfrac{k_1 x}{1 - \cfrac{k_2 x}{1 - \cfrac{k_3 x}{1 - \ldots}}}} \qquad \begin{aligned} k_1 &= \frac{\alpha}{\gamma}, \; k_2 = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)} \\ k_{2\nu+1} &= \frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)} \\ k_{2\nu+2} &= \frac{(\nu+1)(\gamma+\nu-\alpha)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)} \end{aligned}$$

konverguje značně slaběji.

Klade-li se v Gaussově hypergeometrické řadě

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha, \nu)(\beta, \nu)}{\nu!\,(\gamma, \nu)} x^\nu$$

$$\alpha = \frac{1}{h}, \; x = h\, z, \; \lim h = 0,$$

podá limitní přechod

$$\lim_{h=0} F\left(\frac{1}{h}, \beta, \gamma, h\, z\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta, \nu)\, z^\nu}{\nu!\,(\gamma, \nu)} = P(\beta, \gamma, z) = P(z).$$

---

*) Případ $a + b = 1$ řešil již Lagrange, Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral (Oeuvres, sv. IV., str. 301—332). Bohaté příspěvky k theorii řetězců jsou uloženy v thesi p. vic. de Montessus de Ballore (Rend. Circolo mat. Palermo, 1904); nemenší pozornosti zasluhuje starší práce, pařížská these p. H. Padé-a z r. 1892, jakož i různé články pozdější hlavně v Comptes Rendus uveřejněné.

Tu pak obdržíme z Gaussova zlomku řetězového

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{a_1 x}{1 - \cfrac{a_2 x}{1 - \cfrac{a_3 x}{1 - \ldots}}}}$$

s hodnotami

$$a_{2\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}, \quad a_{2\nu} = \frac{(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)},$$

toutéž substitucí a limitním přechodem

$$\alpha = \frac{1}{h}, \ x = h\, z, \ \lim h = 0$$

především

$$\lim a_{2\nu+1}\, x = \frac{\gamma-\beta+\nu}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}\, z, \ \lim a_{2\nu}\, x = -\frac{\beta+\nu}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}\, z$$

a odtud

(59)

$$\frac{P(\beta+1, \gamma+1, z)}{P(\beta, \gamma, z)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{p_1 z}{1 + \cfrac{q_1 z}{1 - \cfrac{p_2 z}{1 + \cfrac{q_2 z}{1 - \ldots}}}}} \qquad p_\nu = \frac{\gamma-\beta+\nu-1}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu-2)}, \quad q_\nu = \frac{\beta+\nu}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu-1)}$$

kterýžto retězový rozvoj velmi rychle konverguje. Poněvadž

$$P'(z) = \frac{\beta}{\gamma} P(\beta+1, \gamma+1, z),$$

slouží tento řetězový zlomek k výpočtu funkce $P'(z)$, známe-li $P(z)$; funkce ta hoví linearné homogení rovnici differencialní prvního řádu, a tedy se pak snadno počítají veličiny $P''(z)$, $P'''(z)$, ... a tedy též součinitelé rozvoje Taylorova v okolí bodu z; neb jakkoli tento je v celé rovině konvergentní, skutečné počítání je pohodlné pouze v okolí rozvojového středu.

Pomocí vzorců (56) a (59) stávají se funkce $H(x)$ a $K(a, b, x) = P(a, a+b, x)$ snáze přístupnými.

XV.