Matyáš Lerch

Über die Berechnung der Summen diskontierten Zahlen für eine nach dem Makeham'schen Gesetz forteschreitende Sterbetafel

Schlömilch Z. 53 (1906), 168–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501580

Über die Berechnung der Summen diskontierter Zahlen für eine nach dem Makehamschen Gesetz fortschreitende Sterbetafel.

Von M. Lerch in Freiburg (Schweiz).

Bedeutet l_x die Anzahl der Lebenden zum Alter x einer Sterbetafel, oder vielmehr eine jener Zahl proportionale Größe, so läßt sich zufolge eines Satzes von Makeham l_x in der Gestalt

(1) $$l_x = s^x g^{c^x} = s^x e^{-\gamma c^x}$$

darstellen, wobei die Konstanten s, g, c den Bedingungen genügen

$$0 < g < 1, \quad 0 < s < 1, \quad c > 1; \quad \gamma = -\log g > 0.$$

Namentlich gibt es eine Sterbetafel mit den Werten[1])

$$s = \frac{1}{1{,}0066615}, \quad g = 0{,}999052, \quad c = 1{,}09648.$$

Die Schreibweise log bedeutet immer die natürlichen Logarithmen, dagegen werden die Dezimallogarithmen durch Log angedeutet. In den Formeln der Versicherungstheorie kommen die sogenannten diskontierten Zahlen der Lebenden, d. h. die Zahlen

$$\delta_x = \frac{l_x}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x}, \quad (p = \text{Prozentsatz}),$$

und ihre Summen vor.

Bedient man sich der Bezeichnung

(2) $$\varrho = \frac{s}{1 + \frac{p}{100}} \quad (\text{sodaß also } 0 < \varrho < 1),$$

so sind die uns interessierenden Größen nach (1)

(3) $$\delta_x = \varrho^x g^{c^x}, \quad S_a = \delta_a + \delta_{a+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^{a+n} g^{c^{a+n}},$$

wobei noch ausdrücklich bemerkt werden mag, daß die Versicherungstechnik nicht mit den Summen S_a selbst, sondern mit Differenzen

1) Entnommen dem Werke Dormoy, Théorie math. des assurances sur la vie. Paris, 1878; p. 123.

$S_a - S_\tau$ ($\tau - 1$ die letzte in der Sterbetafel vertretene Zahl), operiert.

Für die oben erwähnte Sterbetafel und wohl auch für die anderen ist, solange $p \leqq 10$, das Produkt $c\varrho$ größer als Eins. Dies hat, wie sogleich gezeigt werden soll, die Konvergenz der Reihe

$$\Phi(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{a-\nu}\left(1 - g^{c^{a-\nu}}\right) \tag{4}$$

zur Folge. In der Tat folgt aus dem Mittelwertsatz

$$1 - e^{-x} = x e^{-\vartheta x}, \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

für $x = \gamma c^{a-\nu}$

$$1 - g^{c^{a-\nu}} = 1 - e^{-\gamma c^{a-\nu}} = \gamma c^{a-\nu} e^{-\vartheta \gamma c^{a-\nu}},$$

und folglich

$$\varrho^{a-\nu}\left(1 - g^{c^{a-\nu}}\right) = \gamma (c\varrho)^a \,\Theta \left(\frac{1}{c\varrho}\right)^\nu, \qquad (0 < \Theta < 1),$$

woraus die Konvergenz von (4) wegen $c\varrho > 1$ ersichtlich ist.

Die Reihe spalten wir nun in zwei Teile, jenachdem $a - \nu \geqq 0$ oder $a - \nu < 0$ ist. In dem ersten endlichen Teil setze ich $a - \nu = \mu$, im zweiten Teile dagegen $\nu = a + \mu$, sodaß die Voraussetzung gemacht wird, daß a eine ganze Zahl ist. So kommt

$$\Phi(a) = \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^{\mu}\left(1 - g^{c^{\mu}}\right) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varrho^{-\mu}\left(1 - g^{c^{-\mu}}\right).$$

Der erste Teil läßt sich nun schreiben

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^{\mu} - \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}} = \frac{1 - \varrho^a}{1 - \varrho} - \sum_{\mu=0}^{a-1} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}},$$

und unsere Gleichung nimmt nach Addition der Größe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}}$$

folgende Gestalt an:

$$\Phi(a) + \sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}} = \sum_{\mu=a}^{\infty} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}} + \frac{1 - \varrho^a}{1 - \varrho} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \varrho^{-\mu}\left(1 - g^{c^{-\mu}}\right).$$

Führt man daher die Bezeichnung

$$K = \frac{1}{1 - \varrho} - \sum_{\mu=0}^{\infty} \varrho^{\mu} g^{c^{\mu}} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho^{-\nu}\left(g^{c^{-\nu}} - 1\right) \tag{5}$$

ein, so folgt die Beziehung

$$S_a = \sum_{\mu=a}^{\infty} \varrho^{\mu} \varphi^{\mu} - \frac{\varrho^a}{1-\varrho} + \Phi(a) - K, \tag{6}$$

in welcher die Größe K vom Alter a unabhängig ist. Die hier auf der rechten Seite auftretende Größe $\Phi(a)$ ist zwar durch die Reihe (4) vollständig definiert, jedoch nur im Sinne der Logik, da die Reihe nur schwach konvergiert. Wir müssen uns daher eine andere Darstellung von $\Phi(a)$ verschaffen. Dies gelingt in äußerst einfacher Weise vermittels der elementaren Formel

$$1 - e^x = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x^{\mu}}{\mu!}.$$

Setzt man darin $x = -\gamma c^{a-\nu}$ und summiert über $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, so kommt

$$\Phi(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{\gamma^{\mu}}{\mu!} \varrho^{a-\nu} c^{\mu a - \mu \nu}.$$

Die Doppelreihe auf der rechten Seite ist nun absolut konvergent, da die Summe der absoluten Beträge ihrer Glieder den Wert

$$\sum_{\nu} \varrho^{a-\nu} \left(e^{\gamma c^{a-\nu}} - 1\right)$$

hat; dadurch ist die Umkehrbarkeit der Summationsordnung dargetan, und wir erhalten durch Ausführung der Summation in Bezug auf ν die gewünschte Entwicklung

$$\Phi(a) = \varrho^a \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu-1} \frac{(\gamma c^a)^{\mu}}{\mu!(c^{\mu} \varrho - 1)}. \tag{7}$$

Die Größen γc^a sind für jüngere Jahrgänge ziemlich klein, z. B. im Falle der eingangs erwähnten Sterbetafel

$$\gamma = 0{,}000948, \quad \operatorname{Log} \gamma = 0{,}97681 - 4, \quad \operatorname{Log} c = 0{,}04,$$

also für $a = 30$ und $a = 50$

$$\gamma c^{30} = 0{,}015002, \quad \gamma c^{50} = 0{,}0948,$$

und die Größe $\Phi(a)$ läßt sich mit Hilfe von (7) mit seltener Bequemlichkeit herstellen.

Für $a = 75$ haben wir dagegen

$$\gamma c^{75} = 0{,}948,$$

die Benutzung von (7) ist also nicht mehr so bequem wie für kleinere Alterszahlen, immerhin aber noch möglich.

Handelt es sich um die Berechnung von temporären Leibrenten, so kommen bloß die Differenzen $S_a - S_b$ in Betracht; die Formel (6) liefert dann

$$S_a - S_b = \frac{\varrho^a - \varrho^b}{1 - \varrho} + \Phi(a) - \Phi(b),$$

und man kann diesbezügliche Rechnungen lediglich mit Hilfe der Entwicklung (7) ausführen, falls $b \leq 75$, und die Kenntnis der Konstanten K ist nicht erforderlich.

Die vorhergehenden Betrachtungen bewegen sich in den elementarsten Grenzen und sind auch denjenigen zugänglich, die nur mit allereinfachsten Vorkenntnissen versehen sind. Die nachfolgenden Ausführungen setzen dagegen die Kenntnis der Gammafunktion voraus, welche die Berechnung der Größe K in überraschend bequemer Weise ermöglicht.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir jedoch zeigen, wie man sich mit Hilfe des Zahlwertes K die Größe $\Phi(\tau)$ verschaffen kann, wobei τ die erste in der Sterbetafel nicht mehr vertretene Alterszahl bedeutet.

Man verschafft sich zunächst durch direkte Rechnung den Wert

$$S_\tau = \sum_{\mu=\tau}^{\infty} \varrho^\mu g^{c^\mu},$$

was durch Benutzung einer nur geringen Zahl von Gliedern bewerkstelligt werden kann. Nachher bedient man sich der aus (6) folgenden Formel

$$\Phi(\tau) = S_\tau + K - \frac{\varrho^\tau}{1 - \varrho}$$

zur Berechnung von $\Phi(\tau)$.

Zur Bestimmung der Größe K führt eine Relation, die ich im ersten Bande der Abhandlungen (Rozpravy) der Prager Akademie auf S. 147 aufgestellt habe und die sich leicht verifizieren läßt; sie lautet

$$(8) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(s + nti) e^{2n u \pi i} = \frac{2\pi}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)}$$

Wir bedürfen derselben für reelle u und für reelle positive t; der reelle Teil von s muß positiv sein, wenn die rechte Seite konvergieren soll. Da diese Voraussetzung zur Konvergenz der linken Seite nicht erforderlich ist, so erhalten wir eine auch für negative s gültige Gleichung, wenn wir die rechte Seite passend umformen. Derjenige Teil der unendlichen Reihe rechts, der von den Werten $n = -1, -2, -3,$ stammt, d. h.

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}} e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)},$$

kann in der Tat wie folgt geschrieben werden

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}} - 1\right) e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)} + \frac{e^{-\frac{2s\pi}{t}u}}{e^{\frac{2s\pi}{t}} - 1},$$

und dieser letzte Ausdruck konvergiert, sobald nur der reelle Teil von $s + 1$ positiv bleibt.

Wir haben alsdann die Relation

$$(8^*)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u) - e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)}} + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2s\pi}{t}(m+u)}\left(e^{-e^{-\frac{2\pi}{t}(m+u)}} - 1\right) \\ \displaystyle\qquad + \frac{e^{-\frac{2s\pi}{t}u}}{e^{\frac{2s\pi}{t}} - 1} = \frac{t}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma(s + nti)e^{2nu\pi i}, \end{cases}$$

(reeller Teil von $s + 1 > 0$).

Machen wir nun die Annahmen

$$\frac{2s\pi}{t} = \log\varrho, \quad \frac{2\pi}{t} = \log c, \quad u = -\frac{\log\gamma}{\log c},$$

so wird

$$\frac{2\pi}{t}(s + 1) = \log(c\varrho) > 0,$$

also die Bedingung erfüllt, und da alsdann

$$e^{\frac{2\pi}{t}(n-u)} = \gamma c^n, \quad e^{\frac{2s\pi}{t}(n-u)} = \varrho^{n + \frac{\log\gamma}{\log c}},$$

so nimmt unsere Beziehung (8*) die Form

$$\log c \cdot \varrho^{\frac{\log\gamma}{\log c}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\varrho^n e^{-\gamma c^n} + \sum_{m=1}^{\infty}\varrho^{-m}\left(e^{-\gamma c^{-m}} - 1\right) + \frac{1}{\varrho - 1}\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c} + \frac{2n\pi i}{\log c}\right)e^{-2n\pi i\frac{\log\gamma}{\log c}}$$

an. Der in eckigen Klammern auf der linken Seite stehende Ausdruck ist nun aber genau $-K$, und wir erhalten

$$(9) \qquad K = -\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\,\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c}\right) + \chi,$$

wenn mit χ die Größe

$$(10) \qquad -\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\sum_n{}'\,\Gamma\left(\frac{\log\varrho}{\log c} + \frac{2n\pi i}{\log c}\right)e^{-2n\pi i\frac{\log\gamma}{\log c}} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

angedeutet wird. Nun ist aber in unserem Beispiel

$$-\frac{\log\gamma}{\log c} = 75{,}58,$$

und nehmen wir

$$\varrho = \frac{1}{1{,}04}$$

an, so kommt

$$\frac{\varrho^{75{,}58}}{\log c} < 1,$$

ein Umstand, der den Schluß gestattet, daß der Faktor

$$\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}$$

die Einheit nicht stark übertreffen wird. Wenn wir daher beachten, daß die Reihe (10) so stark wie eine geometrische konvergiert, so wird es hinreichen zu zeigen, daß die Größen

$$\Gamma\left(s + \frac{2n\pi i}{\log c}\right) = \frac{\Gamma\left(1 + s + \frac{2n\pi i}{\log c}\right)}{s + \frac{2n\pi i}{\log c}}$$

so klein sind wie e^{-98n}, also die Vernachlässigung von χ die ersten vierzig Stellen des Resultats nicht beeinträchtigen kann. Man hat nun

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u}\Gamma(u+1), \quad u = \frac{\log\varrho}{\log c},$$

also

$$(9^*) \qquad K = -\Gamma\left(\frac{\log c\varrho}{\log c}\right)\frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log\varrho},$$

und dies ist positiv. Das Argument der Γ-Funktion ist hier nun positiv und kleiner als Eins, und der Logarithmus derselben ist den bekannten Tafeln zu entnehmen.

Mit den vorliegenden Ausführungen ist der eigentliche Zweck der Abhandlung erreicht. Wir wollen jedoch den aus denselben folgenden Kaufwert der praenumerando zu beziehenden mit dem Alter a beginnenden Leibrente vom jährlichen Betrage Eins mit dem Kaufwert der sogenannten stetigen Leibrente

$$\bar{R}_a = \frac{1}{\delta_a}\int_a^\tau \delta_x dx = \frac{1}{\varrho^a g^{c^a}}\int_a^\tau \varrho^x g^{c^x} dx$$

vergleichen. Diese Leibrente wird zwar postnumerando bezogen, jedoch werden die Raten verzinst. Indem wir die bisherige Bezeichnung

$$g = e^{-\gamma}$$

beibehalten, setzen wir in dem Integral

$$\gamma c^x = z, \quad x \log c = \log z - \log \gamma,$$

und erhalten

$$\int_a^\infty \varrho^x e^{-\gamma c^x} dx = \frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\int_{\gamma c^a}^\infty e^{-z} z^{\frac{\log\varrho}{\log c}-1} dz.$$

Bedienen wir uns der durch die Arbeiten von Prym, Hermite und Bourguet eingebürgerten Bezeichnung

(11) $$Q(s, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} x^{s-1} dx,$$

(11¹) $$P(s, \omega) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\omega^{s+n}}{n!\,(s+n)},$$

sodaß

(11²) $$P(s) + Q(s) = \Gamma(s)$$

ist, so läßt sich unser Resultat schreiben

(12) $$\int_a^\infty \varrho^x e^{-\gamma c^x} dx = \frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\, Q\left(\frac{\log\varrho}{\log c}, \gamma c^a\right)$$

und die stetige Leibrente $\bar{R}_a$ wird durch folgende Gleichung bestimmt sein:

(12*) $$\bar{R}_a \varrho^a e^{-\gamma c^a} = \frac{\varrho^{-\frac{\log\gamma}{\log c}}}{\log c}\left[Q\left(\frac{\log\varrho}{\log c}, \gamma c^a\right) - Q\left(\frac{\log\varrho}{\log c}, \gamma c^\tau\right)\right].$$

Bis zum Alter $a = 75$ ist γc^a kleiner als Eins, und hier wird für

$s = \frac{\log \varrho}{\log c}$, $\omega = \gamma c^a$ die Reihe $P(s, \omega)$ schnell konvergieren. Die Berechnung von $Q(s, \omega)$ also auf $\Gamma(s) - P(s, \omega)$ reduziert.

Dagegen ist $\gamma c^{100} = 9{,}48$ und die Bestimmung der Größe $Q(s, \gamma c^x)$ wird auf anderem Wege bewerkstelligt werden müssen. Dazu eignet sich z. B. die halbkonvergente Entwicklung[1])

$$Q(1-s, z) = u \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} - \frac{u e^{-z}}{2z^s} - \frac{e^{-z}}{z^s} \sum_{\nu=1,2,3\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu u^{2\nu}}{(2\nu)!} G(z, s)_\nu,$$

in welcher die Hilfsgröße u gleich Eins gesetzt werden kann, und wobei

$$G(z, s)_1 = 1 + \frac{s}{z}, \quad G(z, s)_2 = 1 + \frac{3s}{z} + \frac{3s(s+1)}{z^2} + \frac{s(s+1)(s+2)}{z^3},$$

$$G(z, s)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{s(s+1)\cdots(s+\alpha-1)}{z^\alpha}.$$

Im vorliegenden Falle begeht man ungefähr den Fehler $\frac{1}{10^{10}}$, wenn man in der halbkonvergenten Reihe bloß die zwei Glieder $\nu = 1$ und $\nu = 2$ berücksichtigt. Schreibt man hier also das Resultat mit dieser Annäherung, so kommt

$$Q(1-s, z) = e^{-z-1}\left[\frac{1}{(z+1)^s} + \frac{e^{-1}}{(z+2)^s} + \frac{e^{-2}}{(z+3)^s} + \cdots\right] + \frac{e^{-z}}{2z^s}$$
$$- \frac{e^{-z}}{z^s}\left(\frac{G_1}{12} - \frac{G_2}{720}\right),$$

und man wird die unendliche Reihe bloß auf zwei, drei Stellen zu bestimmen haben, um sieben Dezimalstellen zu bekommen.

Übrigens liefert eine bekannte Eulersche Formel die Entwicklung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{(n+z)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^{n-1}(z+1)^{-s}}{(e-1)^n}, \qquad (\Delta z = 1),$$

mit welcher sich die Rechnung schnell vollzieht.

Noch bequemer wäre die konvergente Entwicklung[2])

$$Q(1-s, \omega) = e^{-\omega}\left(\frac{c_0}{\omega^s} + c_1 \Delta \omega^{-s} + c_2 \Delta^2 \omega^{-s} + \cdots\right), \qquad (\Delta \omega = 1),$$

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}, \quad c_3 = \tfrac{1}{3}, \quad c_4 = \tfrac{1}{8}, \quad c_5 = \tfrac{7}{60},$$

Nach diesen Bemerkungen über die Bestimmung der stetigen Leibrente gehen wir über zu der gewöhnlichen vom Alter a an beginnenden Leibrente R_a, deren Kaufwert

$$R_a = \frac{S_a - S_\tau}{s_a}$$

1) Vergl. meinen Aufsatz im Crelleschen Journal Bd. 130, S. 64.

2) Vergl. Crelles Journal, Bd. 128, S. 218.

lautet. Wendet man die Maclaurinsche Summenformel an, um den Zähler, d. h.

$$\sum_{a}^{x-1} \varrho^{a} e^{-\gamma c^{a}}$$

zu ermitteln, so gelangt man nach ziemlich umständlichen Betrachtungen zur näherungsweisen Abschätzung der Differenz $R_a - \overline{R}_a$, welche auf sechs bis sieben Stellen genau ist:

$$\begin{aligned} R_a - \overline{R}_a = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varrho^{x-a} e^{-\gamma(c^x - c^a)} + \tfrac{1}{12}(\gamma \log c \cdot c^a - \log \varrho) \\ - \tfrac{1}{12}(\gamma \log c \cdot c^x - \log \varrho)\varrho^{x-a} e^{-\gamma(c^x - c^a)} \\ + \tfrac{1}{720}\,[(\gamma \log c \cdot c^a - \log \varrho)^3 - 3(\gamma \log c \cdot c^a - \log \varrho)\gamma c^a \log^2 c \\ + \gamma c^a \log^3 c]. \end{aligned}$$

Sie verdient jedoch wenig Beachtung, indem die oben mitgeteilten Ausdrücke für R_a und $\overline{R}_a$ diese Größe mit viel höherer Genauigkeit zu bestimmen gestatten.

Freiburg (Schweiz), den 5. Juli 1905.

Die Gewölbetheorie im Lichte der Methode der kleinsten Produkte.

Von S. Wellisch in Wien.

Bezeichnet in einem Gewölbe von einem Meter Breite und rechteckigem Querschnitte

$2s$	die Bogenlänge,
$\mathfrak{M}$	das Scheitelmoment,
$\mathfrak{H}$	den Horizontalschub,
$F_0 F_1 F_2$	die Flächen der Querschnitte 0, 1, 2, 3, ... beziehungsweise deren Höhen,
$M_0 M_1 M_2$	die Biegungsmomente } in bezug auf die einzelnen Querschnitte
$P_0 P_1 P_2$	die Normalpressungen } in bezug auf die einzelnen Querschnitte
$J_0 J_1 J_2$	die Trägheitsmomente } in bezug auf die einzelnen Querschnitte
$B_0 B_1 B_2$	die Belastungen } in bezug auf die einzelnen Querschnitte
$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2$	die Neigungswinkel der Querschnitte mit der Vertikalen
$a_0 a_1 a_2$	die Hebelarme des Horizontalschubes und
$b_0 b_1 b_2$	die von der Belastung herrührenden statischen Momente für die einzelnen Querschnitte,