Matyáš Lerch

Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat

C. R. Acad. Sci., Paris 142 (1906), 35–38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501579

d'où

$$S = I_1 F - I_0 G,$$
$$R = P_1 F - P_0 G,$$

relations qui montrent que P_0, I_0, P_1, I_1 ont un ordre apparent au plus égal à ceux de F, G, R, S.

Dans le cas général $\frac{R}{S}$ sera une fonction quasi-méromorphe et le théorème ci-dessus n'est pas susceptible de généralisation.

Si $\frac{R}{S}$ est une fonction quasi-entière, nous nous trouvons dans le premier cas d'exception de M. Picard, puisque $\frac{F}{G}$ est équivalente, au sens de Dedekind, à une fonction quasi-entière; on pourra poser $S = 1$ et la relation

$$I_1 F - I_0 G = 1$$

constituera la solution cherchée.

Si $\frac{R}{S}$ est une exponentielle $e^{\varphi(x)\psi\left(\frac{1}{x}\right)}$ nous nous trouverons dans le second cas d'exception de M. Picard et en faisant entrer les exponentielles dans les fonctions, on aura les deux solutions

$$I_1 F - I_0 G = 1,$$
$$P_1 F - P_0 G = 1.$$

D'une manière générale, les équations exceptionnelles de M. Picard, si elles existent, seront, dans tous les cas,

$$I_1 F - I_0 G = S,$$
$$P_1 F - P_0 G = R.$$

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat.* Note de M. LERCH, présentée par M. Émile Picard.

M. Mirimanov a donné un théorème qui rectifie et restitue en partie quelques propositions de Sylvester concernant le quotient de Fermat (*Comptes rendus*, t. LII)

$$q^{(a)} = \frac{a^{p-1} - 1}{p}.$$

Pour généraliser le théorème de Mirimanov, j'envisage un module quelconque m, puis l'entier positif a premier avec m, et j'observe que l'on a identiquement

$$\frac{a^d - 1}{m} \equiv \sum_{\nu=1}^{d} \frac{\left(\frac{a^\nu}{m}\right) - a\left(\frac{a^{\nu-1}}{m}\right)}{a^\nu - m\left(\frac{a^\nu}{m}\right)} \qquad (\mathrm{mod}\ m),$$

l'exposant d étant un diviseur de $\varphi(m)$ tel que

$$a^d \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ m).$$

Posant $de = \varphi(m)$, on aura, en effet,

$$q^{(a,m)} \equiv \frac{a^{\varphi(m)} - 1}{m} \equiv e\,\frac{a^d - 1}{m} \qquad (\mathrm{mod}\ m),$$

et il s'ensuit

$$\text{(1)} \qquad \frac{a^{\varphi(m)} - 1}{m} \equiv e \sum \frac{\alpha}{\beta},$$

β parcourant les restes des différentes puissances de a, et les α étant déterminés par la condition

$$m\alpha + \beta \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ a), \qquad 0 \leqq \alpha < a.$$

Mais la formule de Mirimanov ne possède le type des théorèmes de Sylvester que dans les cas particuliers. Afin de restituer les théorèmes du savant anglais, j'ai établi la congruence

$$\text{(2)} \qquad q^{(a,m)} \equiv \sum{}^{*} \frac{1}{a\nu}\left(\frac{a\nu}{m}\right) \qquad (\mathrm{mod}\ m),$$

ν parcourant les $\varphi(m)$ nombres premiers avec m et plus petits que m. Cette congruence se vérifie en développant le premier membre de l'équation identique

$$\prod_{\nu} \left[a\nu - m\left(\frac{a\nu}{m}\right)\right] = \prod \nu.$$

La formule (2) rend les mêmes services, et est peut-être plus commode que les formules de Sylvester, mais elle permet aussi d'établir ces dernières rectifiées. Les formules en question s'écrivent

$$\text{(3)} \qquad q^{(a,m)} \equiv \sum \frac{r_\nu}{\nu} \equiv -\sum \frac{r'_\nu}{\nu} \qquad (\mathrm{mod}\ m),$$

ν parcourant les mêmes valeurs que dans la formule (2), puis

$$mr_\nu + \nu \equiv 0, \qquad mr'_\nu - \nu \equiv 0 \pmod{a}; \qquad 0 \leqq r_\nu < a, \qquad 0 < r'_\nu \leqq a.$$

Désignons ensuite par ξ les différentes racines de l'équation

$$\frac{x^{\varphi(a)} - 1}{x - 1} = 0,$$

posons

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{m^2}{\nu}\right) \frac{x^\nu}{\nu},$$

puis

$$Q(a, c) = \sum_{\xi} \frac{\Phi(\xi^c)}{\xi^m - 1},$$

les deux entiers de signes quelconques a et c étant supposés premiers avec m. Désignant enfin par $C(a, c)$ la quantité

$$\operatorname{sgn}(ac) \sum \frac{1}{\nu} \qquad \left(\begin{matrix} 0 < \nu < m; \quad (\nu, m) \sim 1 \\ |c|\nu = |a|\alpha + m\beta \end{matrix}\right)$$

où l'on admet $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots$ et même $\beta = 0$ pour $c < 0$, on aura la congruence suivante

$$(4) \qquad Q(a, c) \equiv aC(a, c) + cq(a) - cq(c) \pmod{m}.$$

Pour $c = 1$ et m premier, cette dernière s'établit directement en multipliant entre eux les développements des binomes $(1 - \xi)^p$, ce qui est un procédé analogue à la méthode d'Eisenstein.

Mais il y a des procédés plus avantageux pour déterminer $q(a, m)$ lorsque m est un produit $m_1 m_2 m_3 \ldots$ de facteurs m_ν, premiers relatifs deux à deux. Posons à cet effet $m = m_\nu n_\nu$ et déterminons les n'_ν conformément aux congruences $n_\nu^2 n'_\nu \equiv 1 \pmod{m_\nu}$; alors on a comme cela se vérifie tout à l'heure

$$(5) \qquad q(a, m) \equiv \sum_\nu n_\nu n'_\nu \varphi(n_\nu) q(a, m_\nu) \pmod{m}.$$

Ainsi la recherche directe du reste du quotient

$$q(2) \equiv \frac{2^{\varphi(385)} - 1}{385} = \frac{2^{240} - 1}{385} \pmod{385}$$

serait pénible. Mais comme ici $m = 5.7.11$, on a les valeurs respectives $m_\nu = 5, 7, 11$, $n'_\nu = -1, 1, 3$, $\varphi(n_\nu) = 60, 40, 24$, $q(2, m_\nu) = 3, 2, 5$ et l'on trouve sans aucune peine

$$q(2) \equiv 60 \pmod{385}.$$

Un procédé avantageux relatif aux modules puissances de nombres premiers reste cependant à découvrir.

PHOTOGRAPHIE. — *Contribution à l'étude des écrans photographiques.* Note de M. J. RENAUX, présentée par M. Lœwy.

Le but de cette Note est de montrer tout le parti que l'on peut tirer de l'emploi judicieux de certains colorants pour la fabrication des écrans photographiques.

Soient L et l les luminosités d'une même radiation avant et après l'interposition d'un écran sur le trajet d'un faisceau de lumière dispersée. Le rapport de L à l, > 1, présente une plus petite valeur, K, soit pour quelques radiations isolées, soit pour un ou plusieurs intervalles, *domaine de transparence* dans lequel les valeurs relatives des luminosités sont conservées. K est le *coefficient de luminosité* de l'écran. Dans le domaine d'absorption, le rapport de L à l est égal à KA; A, > 1, est par définition le *coefficient d'absorption.*

Négligeons les réflexions et absorptions légères par les verres des glaces; concevons la couche colorée comme découpée, parallèlement aux faces, en un nombre p d'écrans partiels et identiques, avec même définition symbolique $K(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, si l'on suppose (ce qui est parfaitement réalisable) une répartition homogène du colorant.

L'écran total est défini par $K^p(A_1^p, A_2^p, \ldots, A_r^p)$, où l'exposant entier p désigne le poids de colorant par centimètre carré, l'unité étant le poids pour la même surface de l'écran partiel. Mais plus généralement, si p_1, p_2, p_3, ... sont des poids *quelconques* de colorants différents, employés en couches superposées, l'écran résultant est défini par

$$K_1^{p_1} K_2^{p_2} \ldots (A_1^{p_1}, B_1^{p_2}, C_1^{p_3}, \ldots, A_r^{p_1}, B_r^{p_2}, C_r^{p_3}, \ldots).$$

Si une plaque orthochromatique, définie par $(S_1, S_2, \ldots, S_r)$, c'est-à-dire ayant des coefficients de sensibilité $S_1, S_2, \ldots, S_r$ dans un intervalle déterminé du spectre, est utilisée avec un écran $K(A_1, A_2, \ldots, A_r)$, le résultat est le même que si l'on opérait directement avec une plaque fictive $(KA_1S_1, KA_2S_2, \ldots, KA_rS_r)$.