Matyáš Lerch
Sur le problème du cylindre elliptique

C. R. Acad. Sci., Paris 142 (1906), 1325–1328

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501578

M. **Emil Fischer** fait hommage à l'Académie d'un volume intitulé : *Untersuchungen über Aminosaüren, Polypeptide und Proteïne* (1899-1906).

CORRESPONDANCE.

M. **Charles Trépied**, élu correspondant pour la Section d'Astronomie, adresse ses remercîments à l'Académie.

M. le Secrétaire perpétuel signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Les prix Nobel en 1903*, publication faite par les ordres des corporations chargées de décerner les prix Nobel.

2° *Essai sur le carré magique de N à N nombres*, par Prosper de Lafitte.

3° *La physique moderne et son évolution*, par Lucien Poincaré (présenté par M. Lippmann).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le problème du cylindre elliptique*. Note de M. **Mathias Lerch**, présentée par M. Emile Picard.

Dans le premier cahier du *Bulletin de la Société mathématique* d'Allemagne, M. W. Wien propose de rechercher la deuxième intégrale, non périodique, de l'équation différentielle que j'écris sous la forme

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (n + 2m \cos 2x)\,\psi = 0. \tag{1}$$

Pour répondre à cette question il faut distinguer, suivant que le nombre n est grand ou non. Dans le premier cas le procédé proposé par Heine cesse d'être applicable. D'une part la valeur de la constante n qui donne l'intégrale paire

$$\psi_1(x) = \Sigma\, b_\nu \cos 2\nu x, \tag{2}$$

et celle de la constante n' à laquelle correspond l'intégrale impaire

$$\psi_1(x) = \Sigma\, b'_\nu \sin 2\nu x, \tag{3}$$

sont très rapprochées dès que leur partie entière, qui est un carré parfait g^2, surpasse une certaine limite. Cela résulte des développements indiqués par Emile Mathieu et peut s'établir aussi par les méthodes de Heine, convenablement modifiées. J'ai obtenu la formule approchée

$$\sqrt{n} - \sqrt{n'} = \frac{2}{\pi} \sin \pi\sqrt{n} - \frac{m^2}{2n\sqrt{n}},$$

qui s'applique déjà pour $m = 1, g = 10$ avec six décimales exactes.

Pour les coefficients principaux b_ν et b'_ν la méthode de Heine, qui part des valeurs $b_0 = 1$, $b'_1 = 1$, fournit des valeurs très grandes ; on devra diviser par un grand nombre pour obtenir le résultat sous forme maniable ; les coefficients dont on est parti avec la valeur *un* deviennent négligeables et seront supprimés dans la plupart des applications. Au lieu de procéder de la sorte, je proposerai de mettre les fonctions ψ_1 sous la forme

$$\Sigma\, a_{g+2\nu} \cos(g+2\nu)x, \qquad \Sigma\, a'_{g+2\nu} \sin(g+2\nu)x$$

où $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ et où l'on ferait par exemple $a_g = a'_g = 1$. La détermination des coefficients s'effectue à l'aide des formules toutes semblables en fractions continues, comme dans la méthode de Heine ; la recherche des paramètres n, n' devient particulièrement commode dans ces circonstances. Toutefois, le procédé de développement qu'on doit à E. Mathieu paraît être préférable.

Dans notre hypothèse de n très grand, les différences $b_\nu - b'_\nu$ sont négligeables dans les applications, et l'on déduit, approximativement, les séries (2) et (3) l'une de l'autre en échangeant les sinus et les cosinus. Enfin, la série (3) donne la valeur approchée de la deuxième intégrale, $\psi_2(x)$, de l'équation (1), et *vice versa*. J'ai obtenu en effet la valeur exacte de l'intégrale non périodique sous la forme

$$\psi_2(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \mathrm{T}\, x\, \psi_1(x),$$

où $\varphi(x)$ signifie une série partout convergente

$$\varphi(x) = \Sigma\, c_\nu \sin 2\nu x,$$

et T est donné en fonction de m^2 par une série entière, de forme semblable à la série $R = n$ d'Emile Mathieu. On a d'ailleurs, en première approximation,

$$T = \frac{n - n'}{g}.$$

Sans entrer dans le détail de ces développements, on peut se rendre compte du lien étroit qui existe entre les intégrales de l'équation (1), relatives à n et n', en raisonnant comme il suit. Désignons par $\chi(x)$ la série (3) en retenant $\psi_1(x)$ pour désigner la série (2); on tire alors des équations (1) relatives aux paramètres n et n' la relation

$$\psi_1 \chi'' - \psi_1'' \chi = (n - n') \psi_1 \chi, \quad \psi_1 \chi' - \psi_1' \chi + \delta(x) = C,$$

où j'ai fait $\delta(x) = (n' - n) \int \psi_1(x) \chi(x)\, dx$.

Il s'ensuit cette expression de la deuxième intégrale

$$C \psi_1(x) \int \frac{dx}{\psi_1^2(x)} = \chi(x) + \psi_1(x) \int \frac{\delta(x)\, dx}{\psi_1^2(x)};$$

en observant que la dérivée $\delta'(x)$ s'annule en même temps que $\psi_1(x)$, on constate aisément que la seconde partie du deuxième membre est une transcendante entière, négligeable avec $n - n'$.

Je termine en indiquant comment on pourra procéder dans la recherche de la deuxième intégrale de (1), $\psi_2(x)$, dans le cas où n ne dépasse pas certaines limites, cas où la méthode de Heine est commode. Supposant connue la série (2), je pose

$$\psi_2(x) = \varphi(x) + x\psi_1(x), \quad \varphi(x) = 2 \sum c_\nu \sin 2\nu x, \quad \psi_1(x) = 1 + 2 \sum_1^\infty b_\nu \cos 2\nu x.$$

On constate *a priori* que $\varphi(x)$ est une transcendante entière et périodique et il ne reste qu'à obtenir les coefficients C_ν. Ils résultent de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + (n + 2m \cos 2x)\varphi + 2\psi_1'(x) = 0,$$

sous la forme

$$c_\nu = Q_\nu c_1 + R_\nu;$$

les quantités Q_ν et R_ν sont des fonctions des b et des constantes m, n, qu'on calcule successivement à l'aide des relations récurrentes

$$Q_{\nu+1} = \frac{4\nu^2 - n}{m} Q_\nu - Q_{\nu-1}; \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = 1,$$
$$R_{\nu+1} = \frac{4\nu^2 - n}{m} R_\nu - R_{\nu-1} + \frac{4\nu b_\nu}{m}; \quad R_0 = R_1 = 0.$$

La constante C_1 ne s'obtient pas de cette manière et il faut procéder autrement; la première idée qui se présente à l'esprit consiste à satisfaire la condition de convergence en faisant

$$c_1 = -\lim_{\nu=\infty} \frac{R_\nu}{Q_\nu};$$

mais la théorie fournit plusieurs relations qui peuvent rendre même service et que je me réserve d'exposer dans un mémoire plus étendu.

PHYSIQUE. — *Pouvoir inducteur spécifique et conductibilité. Viscosité électrique.* Note de M. **André Broca.**

Dans une Note antérieure j'ai montré que, dans le cas des métaux, on rend compte des phénomènes observés pour la résistance des fils et aussi pour le pouvoir réflecteur en supposant que l'expression $\frac{K}{2cT} = A$, A étant une quantité qui, de $T = 3\,000\,000$ à $T = 10$ trillions varie entre 1,2 et 1,5. K est le pouvoir inducteur spécifique et c est la conductibilité; T est la période de la perturbation électromagnétique à laquelle le métal est soumis. Je viens de démontrer, en collaboration avec M. Turchini, que les électrolytes présentent des perturbations plus grandes encore que les métaux, relativement à la résistance des conducteurs cylindriques pour les courants de haute fréquence. On rend compte de ces phénomènes en faisant la même hypothèse que j'ai faite dans le cas des métaux, celle de l'existence d'un pouvoir inducteur spécifique suffisant pour que son action se fasse sentir en même temps que celle de la conductibilité. Dans le cas de l'eau acidulée, le calcul, mené exactement comme dans le cas des métaux (*Comptes rendus*, 26 juin 1905), conduit à la valeur $\frac{K}{2cT} = 0,80$.

La seule différence entre les deux calculs, c'est qu'au lieu de définir la fonction de Bessel dont dépend le problème par la formule $J_0 = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}$ qui ne s'applique que pour les valeurs assez grandes de x, il faut employer le développement en série connu. D'ailleurs, pour les valeurs faibles de la variable, qui seules ont été réalisées dans le cas des électrolytes, les deux ou trois premiers termes des séries m'ont toujours suffi.