Matyáš Lerch

Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers

Mémoires Acad. Institut de France 33 (1906), 2, 1–244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501574

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

À L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT NATIONAL DE FRANCE

TOME XXXIII. — N° 2.

ESSAIS

SUR

LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES

DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES

AUX COEFFICIENTS ENTIERS,

PAR M. MATHIAS LERCH.

INTRODUCTION.

Le présent mémoire s'occupe de la théorie des formes quadratiques aux coefficients entiers telles que $ax^2+bxy+cy^2$; cette forme sera souvent désignée d'une manière abrégée par (a, b, c); une forme donnée donne naissance à une infinité d'autres en lui appliquant les substitutions du groupe modulaire, c'est-à-dire les substitutions de la forme $x=\alpha x'+\beta y'$, $y=\gamma x'+\delta y'$, dont les coefficients α, β, γ, δ sont entiers et satisfont à l'équation $\alpha\delta-\beta\gamma=1$; les formes ainsi obtenues sont dites équivalentes à la forme (a, b, c) et leur ensemble constitue une classe de formes. Nous ne considérerons que des formes aux coefficients entiers.

La quantité $D=b^2-4ac$ est la même pour toutes les formes d'une classe et s'appelle le *discriminant* de la forme (a, b, c); c'est un nombre entier qui satisfait à l'une ou à l'autre des deux

IMPRIMERIE NATIONALE.

congruences $D \equiv 1$ ou $D \equiv 0 \pmod{4}$; chaque nombre de cette dernière propriété est, réciproquement, discriminant d'une infinité de formes.

Les formes en nombre infini d'un discriminant donné se distribuent en un nombre fini de classes. L'objet du présent mémoire n'est autre que d'établir des formules convenables au calcul effectif du nombre de ces classes. Nous nous bornerons à certaines hypothèses qui n'altèrent pas la généralité du problème.

Une forme (a, b, c) est dite *primitive* si ses coefficients n'admettent pas de diviseur commun; les formes équivalentes seront également primitives, et on peut se borner à ne considérer que des classes de formes primitives. Dans le cas d'un discriminant positif D, ce sera le nombre de ces classes primitives qu'on désignera désormais par le symbole Cl(D). Si le discriminant est négatif, les coefficients extrêmes a et c conservent leur signe dans toutes les formes équivalentes; on ne considérera que celles où il est positif, puisque de ces formes dites positives on obtient toutes les autres en changeant les signes de tous les trois coefficients. Le nombre des classes de formes positives et primitives sera désigné par Cl(D), si $D < 0$.

Depuis Gauss, les géomètres ont étudié les formes telles que $ax^2 + 2bxy + cy^2$, c'est-à-dire, dans notre écriture, les formes $(a, 2b, c)$; le nombre $n = b^2 - ac$ était appelé le *déterminant* de la forme; les formes de la théorie classique du déterminant n sont précisément les formes du discriminant $4n$. Quant à la primitivité, une forme était dite proprement primitive, si elle est primitive dans notre sens; elle s'appelait improprement primitive, si le plus grand commun diviseur des coefficients a, $2b$, c était le nombre deux. Les formes improprement primitives du déterminant n résultent donc des formes primitives $\left(\frac{a}{2}, b, \frac{c}{2}\right)$ du discriminant $b^2 - 4\frac{a}{2}\frac{c}{2} = n$ en les multipliant par deux. C'est tout ce qu'il faut connaître pour passer de la théorie classique à la théorie moderne établie par Kronecker; cette dernière présente l'avantage d'une plus grande uniformité. On en trouve l'exposition dans l'excellent ouvrage de M. J. de Séguier, S. J. : *Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker* [1].

Pour la détermination du nombre des classes, on a le procédé de réduction dû à Lagrange et à Gauss, puis les formules directes que la science doit au génie de Dirichlet; c'est en nous appuyant sur les découvertes de ce grand géomètre que nous parviendrons à des méthodes moins simples en théorie, mais plus expéditives dans la pratique.

Sauf ces méthodes, on possède des théorèmes d'une admirable élégance qui résultent des recherches de Legendre et de Gauss sur la représentation des nombres par la somme des trois carrés et qui ont été mis sous la forme analytique par Kronecker [2]; ce savant les a obtenus comme conséquences des équations de la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques, et une déduction directe et relativement élémentaire en a été donnée par M. Hermite [3]. Cette dernière voie, intimement liée avec une autre création féconde du célèbre mathématicien, celle de l'élément simple des fonctions elliptiques de troisième espèce, dont la théorie fournit aussi l'évaluation des sommes de Gauss, mérite une attention particulière.

Les théorèmes de Kronecker ont été l'objet de nombreuses et importantes recherches de plusieurs géomètres dont les découvertes rendraient d'excellents services lorsqu'il s'agirait de dresser une table de la fonction numérique équivalente à $\mathrm{Cl}(-\Delta)$, mais elles sont à peine applicables lorsqu'il s'agit d'obtenir le nombre des classes pour un déterminant isolé, puisqu'il les faudra appliquer un grand nombre de fois pour descendre aux déterminants

(1) Berlin, Félix L. Dames, 1894.

On trouvera une exposition abrégée, avec des résultats nouveaux intéressants, dans trois articles de M. H. Weber, publiés dans les *Nachrichten* de Goettingue, 1893.

(2) Comptes rendus de l'Académie de Berlin, 1875.

(3) *Journal de Liouville*, 1862; puis Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du *Bulletin de l'Académie imp. de Saint-Pétersbourg*, t. VI, 1884, réimprimé dans les *Acta mathematica*, t. V.

pour lesquels la fonction est connue. La recherche directe des formes réduites serait en tous cas plus expéditive, et c'est pourquoi nous nous sommes borné à la méthode de Lejeune-Dirichlet, en essayant de la modifier pour la faire devenir rapide.

Pour faire ressortir la signification des différents symboles dont nous aurons besoin, je crois utile de reprendre quelques définitions et formules connues, en renvoyant, quant à leurs démonstrations, à l'ouvrage de M. Séguier.

La signification du symbole de la théorie des résidus quadratiques appelé le signe de Legendre $\left(\frac{p}{q}\right)$ a subi, sous les mains de Jacobi et de Kronecker, des modifications dont voici la forme définitive.

Dans le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ on admet aussi les « dénominateurs » n pairs; ce symbole signifie le zéro toutes les fois que les entiers m et n ne sont pas premiers entre eux. Si n est impair, soit

$$n = pp'p'' \ldots$$

sa décomposition en facteurs premiers, égaux ou inégaux; alors on a, par définition,

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\left(\frac{m}{p''}\right)\cdots.$$

Si n est pair, soit $n = 2^\alpha n'$, n' étant impair, on pose:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{m}{2^\alpha}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{2}{m}\right)^\alpha \left(\frac{m}{n'}\right);$$

enfin on prend:

$$\left(\frac{m}{-n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right).$$

Dans cette généralité, le symbole perd certaines propriétés dont il a joui chez Legendre et Jacobi, mais il les retient si le numérateur est un discriminant. En particulier, si D est un discriminant positif, on a :

$$\left(\frac{D}{m}\right)=\left(\frac{D}{m'}\right), \qquad \text{si} \qquad m \equiv \pm m' \pmod{D},$$

par exemple :

$$\left(\frac{D}{m}\right)=\left(\frac{D}{D-m}\right).$$

En convenant de représenter par sgn z le signe de la quantité réelle z, c'est-à-dire l'unité positive ou négative suivant que z est positif ou négatif, et zéro pour $z=0$, on a :

$$\left(\frac{-\Delta}{m}\right)=\left(\frac{-\Delta}{m'}\right) \operatorname{sgn} mm', \qquad \text{lorsque} \qquad m \equiv m' \pmod{\Delta},$$

en supposant que $-\Delta$ est un discriminant négatif. En particulier

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta-m}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right) \qquad \text{pour} \qquad 0<m<\Delta.$$

Si D_1 et D_2 sont deux discriminants de signes quelconques mais premiers entre eux, on a :

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)\left(\frac{D_2}{D_1}\right)=(-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}},$$

c'est-à-dire que ce produit est -1 si les deux discriminants sont négatifs et qu'il est $+1$ dans le cas contraire.

Pour des discriminants *impairs* de signe quelconque subsiste l'équation quelle que soit la valeur de m :

$$\left(\frac{D}{m}\right)=\left(\frac{m}{D}\right).$$

La relation suivante a lieu pour tous les discriminants

$$\sum_{n=1}^{|D|-1}\left(\frac{D}{n}\right)=0, \qquad (D \gtrless 0).$$

Si D est positif, on a de plus :

$$\sum_{n=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{n}\right) = 0, \qquad (D > 0).$$

Au moyen de ce qui précède, on vérifie aisément l'équation

$$\sum_{n=1}^{D-1} \left(\frac{D}{n}\right) n = 0, \qquad (D > 0).$$

Un discriminant est dit *fondamental* s'il n'admet aucun diviseur carré impair et lorsqu'il contient le facteur quatre, si le quotient $\frac{D}{4}$ n'est plus un discriminant.

En représentant par P un nombre positif ou négatif, produit d'un certain nombre de facteurs premiers différents et tel que

$$P \equiv 1 \pmod{4},$$

les formes générales d'un discriminant fondamental D_0 seront :

$$D_0 = P, \qquad D_0 = -4P, \qquad D_0 = 8P, \qquad D_0 = -8P.$$

Un discriminant quelconque D, s'il n'est pas fondamental, peut être mis sous la forme $D_0 Q^2$, où D_0 est un discriminant fondamental.

Le symbole $\sqrt{D}$ nous signifiera toujours la valeur positive de la racine carrée, si $D > 0$, et la quantité $i\sqrt{-D}$, si $D < 0$. Sous cette convention a lieu la formule suivante :

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0 - 1} \left(\frac{D_0}{h}\right) e^{\frac{2hm\pi i}{\Delta_0}} = \left(\frac{D_0}{m}\right) \sqrt{D_0},$$

en représentant par D_0 un discriminant fondamental, par Δ_0 sa valeur absolue et par m un entier positif quelconque. Ce résultat, dont nous ferons fréquent usage, se trouve démontré dans un mémoire de Lebesgue (*Journal de Liouville*, t. XV, 1850) et dans l'ouvrage de M. de Séguier. En séparant les deux cas du discriminant fondamental positif D_0 et du discriminant fondamental négatif $-\Delta_0$, on a par conséquent :

$$\sum_{h=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{h}\right)\cos\frac{2hm\pi}{D_0}=\left(\frac{D_0}{m}\right)\sqrt{D_0},\qquad \sum_{h=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{h}\right)\sin\frac{2hm\pi}{D_0}=0,$$

$$\sum_{h=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\sin\frac{2hm\pi}{\Delta_0}=\left(\frac{-\Delta_0}{m}\right)\sqrt{\Delta_0},\qquad \sum_{h=1}^{\Delta_0=1}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\cos\frac{2hm\pi}{\Delta_0}=0,$$

formules dont les secondes de chaque couple sont évidentes.

Pour pouvoir énoncer les résultats auxquels était parvenu Lejeune-Dirichlet, introduisons la lettre τ, si le discriminant est négatif $-\Delta$, en prenant $\tau=6$ pour $\Delta=3$, $\tau=4$ pour $\Delta=4$, $\tau=2$ pour $\Delta>4$:

Dans le cas des discriminants positifs, on a besoin de la solution *fondamentale* de l'équation de Fermat $T^2-DU^2=4$, c'est-à-dire des plus petits entiers positifs T et U qui satisfont à cette équation; au moyen de cette solution, on forme la quantité

$$\frac{T+U\sqrt{D}}{2}=E(D),$$

en adoptant cette écriture de Kronecker et admettant qu'une confusion avec la fonction $E(x)$ de Legendre est à peine probable. Cela posé, les résultats fondamentaux de Dirichlet seront exprimés par les équations

$$\mathrm{Cl}(-\Delta)=\tau\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{2n\pi},\tag{1}$$

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n}.\tag{2}$$

Dirichlet lui-même a évalué ces séries sous forme finie en se bornant au cas qui revient à supposer que le discriminant soit fondamental, hypothèse que nous adopterons désormais dans tout le reste de cette Introduction. Traduits dans la théorie de Kronecker, les résultats de Dirichlet peuvent se résumer comme il suit :

$$\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h, \tag{3}$$

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{D}. \tag{4}$$

Théoriquement, ces résultats, élégants et simples dans leur nature et admirables comme invention, ne laissent rien à désirer; mais il en est autrement si l'on veut s'en servir dans la pratique, où leur emploi est extrêmement laborieux. Dirichlet a été lui-même obligé de distinguer les quatre formes des discriminants fondamentaux négatifs en cherchant à mettre partout le discriminant ou son facteur principal dans le dénominateur du signe de Legendre. Ses résultats s'écriraient, dans la théorie de Kronecker, comme il suit :

$$\tag{5} \left\{\begin{aligned}
&\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),\\
&\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-4D),\\
&\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) - \sum_{h=\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8D),\\
&\sum_{h=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta).
\end{aligned}\right.$$

Ces formules ne sont d'ailleurs soumises à aucune autre restriction qu'à ce que D et $-\Delta$ doivent être des discriminants fondamentaux, le premier positif, le second négatif.

Nous verrons que ces dernières formules se déduisent comme des cas particuliers et immédiats des deux formules suivantes, identiques dans leur nature,

$$(6)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha D}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D), \\ \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\alpha\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D), \end{cases}$$

qui sont en même temps utiles dans la pratique; en effet, les exemples des discriminants

$$-559 = -13.43 \qquad \text{et} \qquad -1159 = -21.59$$

que j'ai traités dans le texte font voir que l'emploi des formules (6) est plus commode que la recherche directe des formes réduites. Malheureusement, ce procédé n'est applicable qu'aux discriminants composés, et si Δ est premier, la difficulté subsiste. Dans ce cas, la formule suivante peut souvent fournir la réponse :

$$(7)\quad \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta+1\right]}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \frac{1+\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \qquad (\Delta > 4);$$

mais pour des discriminants fondamentaux très grands, d'une nature quelconque, on pourrait recommander le procédé d'approximation analytique pour lequel on peut trouver plusieurs formules, dont les plus simples sont les suivantes :

$$(8)\quad \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 z\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta z}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

où z est une quantité positive arbitraire pour laquelle on prend le mieux l'unité; puis

$$(9)\qquad \frac{1}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{e^{\frac{nu\pi}{\Delta}}+1}+\frac{\sqrt{\Delta}}{u}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{\sin\mathrm{hyp}\,\frac{2n\pi}{u}},$$

où se recommande la valeur de $u=\sqrt{2\,\Delta}$, ensuite

$$(10)\qquad \frac{\pi}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{nu\pi}{\Delta}}+\frac{1}{4}\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{\cos\mathrm{hyp}\,\frac{n\pi}{u}},$$

et enfin

$$(11)\qquad \left(\frac{1}{u}-1\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)=\tau\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{e^{\frac{2nu\pi}{\sqrt{\Delta}}}-1}-\frac{\tau}{u}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u\sqrt{\Delta}}}-1},$$

formule dont on déduit, en différentiant et prenant $u=1$, la suivante :

$$(12)\qquad \mathrm{Cl}(-\Delta)=-\tau\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{\Delta}}}-1}+\frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{n}{\left(e^{\frac{n\pi}{\sqrt{\Delta}}}-e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^{2}}.$$

Ne servant qu'à la détermination d'un nombre entier, ces développements peuvent rendre bon service puisqu'il suffira de regarder un nombre de termes relativement petit, et cette circonstance aura lieu à plus forte raison si l'on connaît certains facteurs du nombre $\mathrm{Cl}(-\Delta)$. La distribution des classes en genres fait voir que ce nombre est divisible par $2^{\varpi-1}$, si le nombre Δ est composé à l'aide de ϖ facteurs premiers différents.

Pour perfectionner le calcul dans le cas où Δ se compose de deux ou trois facteurs premiers, j'ai cherché le reste du nombre des classes pour les modules 4 et 8, et voici les réponses à la question.

Si Δ est le produit de deux nombres premiers p et q, l'un sera de la forme $4k+1$, l'autre de la forme $4k+3$, et on a :

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{Cl}(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{4}$$ [1].

Si Δ est le produit de trois nombres premiers p, q, r, deux cas sont à distinguer :

1° On a

$$p \equiv q \equiv r \equiv -1 \pmod{4}$$

et alors, pour le module 8,

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{Cl}(-pqr) \equiv \begin{cases} 4, & \text{si} \quad \left(\frac{pq}{r}\right) = \left(\frac{pr}{q}\right) = \left(\frac{qr}{p}\right); \\ 0, & \text{dans d'autres cas.} \end{cases}$$

2° Si l'on a

$$p \equiv q \equiv -r \equiv 1 \pmod{4},$$

on a les congruences pour le module 8 :

$$\text{(15)} \qquad \mathrm{Cl}(-pqr) \equiv \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{p}{r}\right)\right]^2, & \text{si} \quad \left(\frac{p}{r}\right) = \left(\frac{q}{r}\right), \\ 2\left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right], & \text{si} \quad \left(\frac{p}{r}\right) = -\left(\frac{q}{r}\right). \end{cases}$$

Pour le calcul du nombre des classes d'un discriminant positif, l'emploi de la formule de Dirichlet est encore plus pénible; heureusement, on dispose d'une découverte extrêmement remarquable due à Kronecker, au moyen de laquelle la difficulté se ramène à la recherche des formes réduites d'un discriminant négatif un peu plus grand que le discriminant positif donné. Afin de rappeler

[1] Cette congruence est due à M. Hurwitz (*Acta mathematica*, t. XIX, p. 378); on trouvera les autres à la fin du chapitre III.

l'important théorème dans sa structure la plus simple, faisons usage de l'écriture[1]

$$\mathrm{H}(\omega) = e^{\frac{\omega\pi i}{12}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2n\omega\pi i}),$$

ω étant une quantité complexe à partie imaginaire positive. Étant donné un discriminant fondamental positif D, choisissons un discriminant fondamental négatif $-\Delta_1$ premier avec lui, de sorte que leur produit $-\Delta_1 \mathrm{D} = -\Delta$ sera un discriminant également fondamental. Pour une classe primitive du discriminant $-\Delta$, représentée par la forme (a, b, c), le symbole

$$\left(\frac{-\Delta_1}{ax^2 + bxy + cy^2}\right)$$

aura une valeur indépendante de x et y et du choix du représentant (a, b, c) toutes les fois que le nombre $ax^2 + bxy + cy^2$ sera premier avec Δ; convenons de représenter par le symbole

$$\left(\frac{-\Delta_1}{a, b, c}\right)$$

cette unité invariantive. Cela étant, soit τ_1 le nombre τ correspondant au discriminant $-\Delta_1$, et désignons par (a, b, c) tous les représentants des différentes classes du discriminant $-\Delta$, de sorte que $4ac - b^2 = \Delta = \Delta_1 \mathrm{D}$; alors la formule de Kronecker devient :

$$(16) \qquad \frac{2}{\tau_1} \mathrm{Cl}(-\Delta_1)\, \mathrm{Cl}(\mathrm{D}) \log \mathrm{E}(\mathrm{D})$$
$$= \sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta_1}{a, b, c}\right) \log \frac{a}{\mathrm{H}^2\left(\frac{b + i\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \mathrm{H}^2\left(\frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a}\right)}.$$

[1] Cette transcendante se trouve désignée par la lettre $\eta(\omega)$ dans les écrits de MM. Dedekind et H. Weber; mais la lettre η ayant une signification toute différente dans la notation de Weierstrass, je pense avoir bon motif pour changer la notation des illustres géomètres.

Le calcul numérique du second membre sera le plus commode, si l'on choisit pour (a, b, c) les formes réduites, et on voit que la seule difficulté sérieuse pouvant se présenter dans la pratique consiste dans la recherche desdites formes réduites.

En profitant d'un des plus beaux résultats de Dirichlet qui n'a pas été destiné au calcul numérique, nous avons essayé d'obtenir un procédé élémentaire convenant à certains discriminants composés. Un théorème annoncé par Cauchy, qui généralise les recherches antérieures de Gauss, Jacobi et Dirichlet, consiste en ce que pour un discriminant fondamental de signe quelconque D, dont la valeur absolue soit représentée par Δ, le polynôme irréductible du degré $\varphi(\Delta)$, qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$ que je représente par $F(x)$, admet la décomposition suivante :

$$(a) \qquad 4F(x) = Y(x)^2 - DZ(x)^2,$$

les polynômes aux coefficients entiers $Y(x)$ et $Z(x)$ des degrés respectifs $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$ et $\frac{1}{2}\varphi(\Delta) - 1$ ayant les coefficients des puissances les plus élevées positifs. Cela étant, soient D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux du même signe et représentons pour abréger par Y_1 et Z_1 les polynômes Y et Z formés pour le discriminant D_1; en posant ensuite $\Delta_2 = |D_2|$, nous aurons la formule :

$$(17) \qquad \mathrm{Cl}(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)},$$

qui pourrait rendre de réels services, si l'on disposait d'une table soigneusement construite des polynômes Y et Z. Mais c'est là une difficulté purement externe, et j'espère que la théorie des fonctions Y et Z, à laquelle on trouvera dans la partie algébrique du présent mémoire de petites contributions, attirera l'attention des géomètres; je vais profiter de cette occasion pour signaler un problème dont la solution serait fort importante. Comme on sait, l'équation (a) fournit pour $x = 1$ une solution de l'équation de Fermat; mais cette solution n'est pas en général celle qu'on appelle fondamentale et qu'il serait très important de tirer de cette théorie. Je pense qu'en substituant pour x une valeur convenable, réelle ou complexe, un facteur commun apparaîtra dans les deux membres, et après sa suppression, on obtient en Y et Z la solution voulue.

J'ose aussi rappeler l'attention sur le résultat suivant, se rattachant au cas où le discriminant est le produit de deux nombres premiers impairs p et q. Représentons par s les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, pq-1$ qui satisfont à la double condition

$$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s}{q}\right) = 1;$$

nous aurons ;

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} -4\sum_s{}^{*}\log 2\sin\frac{s\pi}{pq} &= \mathrm{Cl}(pq)\log \mathrm{E}(pq) \\ &\quad + \left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\left[\mathrm{Cl}(p)\log \mathrm{E}(p) + \mathrm{Cl}(q)\log \mathrm{E}(q)\right], \end{aligned}\right.$$

en convenant de prendre $\mathrm{Cl}(p) = 0$, si $p \equiv 3 \pmod{4}$, c'est-à-dire lorsque p n'est pas un discriminant.

Mais le nombre des classes d'un discriminant fondamental positif peut se calculer directement au moyen de la méthode d'approximation fournie par les relations suivantes :

$$(19)\quad \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = \frac{2\sqrt{\mathrm{D}}}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{\mathrm{D}z}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

$$(20)\quad \frac{1}{2}\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = \sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}}+1} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{nu\pi}{\mathrm{D}}}}{1-e^{-\frac{nu\pi}{\mathrm{D}}}}.$$

$$(21)\quad \frac{1}{2}\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = \frac{\pi}{2}u\sum_{h=1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2} - \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\log\left[1-e^{-\frac{2nu\pi}{\mathrm{D}}}\right]$$
$$-\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right)\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{\frac{2n\pi}{u}}-1},$$

où z et u sont des constantes positives pour lesquelles on prend le mieux $z=1$, $u=\sqrt{2D}$ et $u=\sqrt{D}$ dans l'équation (21). Cette dernière formule contient des séries dont la convergence est plus rapide que celle des séries (21); mais la présence de la somme finie

$$N=\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2},$$

composée d'un très grand nombre de termes, rend cet avantage complètement illusoire; cette circonstance ne s'améliore pas beaucoup en profitant de la formule

$$N=-\frac{4}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D},$$

ou des autres encore plus simples qu'on peut obtenir dans le cas de D pair.

Pour la détermination de N on a le développement

$$N=\frac{4}{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{n}{e^{\frac{2n v\pi}{D}}-1}+\frac{4\sqrt{D}}{v^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{\left(e^{\frac{n\pi}{v}}-e^{-\frac{n\pi}{v}}\right)^2},$$

mais son emploi ne présente aucun avantage sur la formule (20).

Plusieurs des formules que nous établirons n'ont pas le caractère de résultats définitifs et ne sont que des théorèmes auxiliaires ne pouvant fournir qu'un intérêt théorique; de cette espèce est, par exemple, la relation

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cl}(D_1 D_2 \cdots D_r)\\&=(-1)^{\nu+1}\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\cdots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\mathfrak{R}\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)\end{aligned}$$

qui généralise la formule (3) et dans laquelle $\mathfrak{R}(z)$ sert d'abréviation pour le plus petit reste positif $z-E(z)$, et $D_1, D_2, \cdots D_r$ sont des discriminants fondamentaux parmi lesquels il y a $2\nu+1$ négatifs, et où l'on pose comme d'habitude $|D_\alpha| = \Delta_\alpha$.

C'est dans cette même catégorie qu'il faut compter les formules

$$\frac{4}{\tau^2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)^2 = \frac{1}{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\right)^2 - \frac{\Delta}{12}\prod_d\left(1-\frac{1}{d^2}\right),$$

d parcourant les facteurs premiers de Δ, puis

$$\mathrm{Cl}(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{4\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\Theta_1(n)}{n}\left(e^{-\frac{2nx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{2n\pi}{\Delta x}}\right),$$

où $\Theta_1(n)$ désigne la somme des diviseurs du nombre n, et x représente une quantité positive arbitraire.

J'ai laissé entièrement de côté certaines relations entre la théorie des fonctions elliptiques et celle des formes quadratiques du discriminant négatif, qui ont été données par Kronecker, et qui pourraient être établies avec une extrême facilité; je les ai supprimées, puisque nos contributions ne seraient en grande partie au moins que des simplifications méthodiques et qu'elles ne donnent rien pour la pratique du calcul du nombre des classes. Je me contente d'annoncer que j'avais cherché les propriétés analogues de formes d'un discriminant positif qui m'ont conduit à deux théorèmes que voici :

En posant pour abréger

$$\sum_{\rho=1}^{m-1}\rho\,\mathfrak{R}\left(\frac{n\rho}{m}\right) = \mathrm{R}(m,n),$$

où $\mathfrak{R}(z)$ signifie le plus petit reste positif de la quantité réelle z, et en représentant par t, u deux nombres positifs satisfaisant à l'équation de Fermat

$$t^2 - \mathrm{D}u^2 = 4,$$

on aura

$$\sum_{(a,b,c)} \left[\frac{1}{a} \mathrm{R}\left(au, \frac{bu-t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{u^2}{4} a\right] = 0,$$

en supposant que les formes (a, b, c) parcourent un système complet de représentants des classes primitives du discriminant fondamental positif D, choisis de la sorte que a soit toujours positif.

Soient ensuite $-\Delta_1$ et $-\Delta_2$ deux discriminants négatifs fondamentaux et premiers entre eux, τ_1 et τ_2 des symboles qui leur correspondent dans le sens connu, et désignons comme plus haut par

$$\left(\frac{-\Delta_1}{a, b, c}\right) \text{ le symbole } \left(\frac{-\Delta_1}{ax^2 + bxy + cy^2}\right)$$

indépendant de x et y; nous aurons :

$$\sum_{(a,b,c)} \left(\frac{-\Delta_1}{a, b, c}\right) \left[\frac{1}{a} \mathrm{R}\left(au, \frac{bu-t}{2}\right) + \frac{t}{12a} - \frac{u^2}{4} a\right] = \frac{2\tau u}{\tau_1 \tau_2} \mathrm{Cl}(-\Delta_1)\,\mathrm{Cl}(-\Delta_2),$$

où la sommation se rattache à tous les représentants (a, b, c) des différentes classes du discriminant positif $\Delta_1 \Delta_2$, et où τ est l'exposant défini par l'équation

$$\frac{t + u\sqrt{\mathrm{D}}}{2} = \left(\frac{\mathrm{T} + \mathrm{U}\sqrt{\mathrm{D}}}{2}\right)^\tau.$$

Nos propres recherches sont précédées d'une exposition n'ayant d'autre but que la simplification des raisonnements de Dirichlet, en particulier la suppression de la considération des séries infinies suivantes :

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(am^2 + bmn + cn^2)^s} \text{ et } \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \frac{1}{h^s}.$$

Nous avons adopté une méthode d'exposition qui, en réalité, a été publiée par M. Hermite il y a longtemps[1].

[1] *Sur la théorie des formes quadratiques; Comptes rendus*, t. LV (1862).

IMPRIMERIE NATIONALE.

CHAPITRE PREMIER.

DÉDUCTION ET PREMIÈRE TRANSFORMATION DES FORMULES DE DIRICHLET.

1. Pour un discriminant donné de signe quelconque D, nous désignerons le discriminant fondamental dont il dérive par D_0 et nous aurons par conséquent $D = D_0 Q^2$, en désignant par Q un certain entier. Si le discriminant est positif, il lui correspond une solution fondamentale T, U de l'équation de Fermat; pour une forme (a, b, c) de discriminant D on aura à considérer le nombre rationnel

$$g = \frac{T - bU}{2aU}.$$

Si, au contraire, le discriminant est négatif, on désigne par τ le nombre 6 pour $D = -3$, $\tau = 4$ pour $D = -4$ et $\tau = 2$ pour $D < -4$; pour plus de brièveté, on pose $\tau = 1$ lorsque le discriminant est positif.

Cela étant, désignons par (a, b, c) tous les représentants des différentes classes primitives du discriminant D, qui soient de plus positives pour $D < 0$, et prenons soin, dans le choix desdits représentants, que les premiers coefficients a soient partout positifs. En désignant par $F(z)$ une fonction en quelques égards arbitraire, on aura *l'équation fondamentale de Dirichlet*

$$(1) \qquad \sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2)$$
$$= \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \left(\frac{Q^2}{k}\right) F(hk),$$

où il faut encore fixer les conditions sommatoires relatives à m, n. Si $D < 0$, on prend pour m, n tous les entiers positifs et négatifs indépendamment les uns des autres, à l'exclusion de la seule combinaison $m = n = 0$; mais si $D > 0$, les entiers m, n doivent satisfaire aux inégalités $m > gn$, $n \geqq 0$, g signifiant la fraction définie plus haut qui varie d'une forme à l'autre.

Le vrai sens de cette admirable découverte n'est autre chose que le théorème concernant la solution de l'équation

$$am^2 + bmn + cn^2 = l, \quad \begin{pmatrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ \text{et, lorsque } D > 0,\ m > gn,\ n \geqq 0 \end{pmatrix},$$

pour les différentes classes (a, b, c) et pour le même nombre l premier avec Q. Ce théorème, affirmant que le nombre de représentations « vraiment distinctes » du nombre l par les différentes classes du discriminant D est donné par l'expression

$$\tau \sum_{hk=l} \left(\frac{D}{h}\right) \left(\frac{Q^2}{k}\right),$$

a été démontré d'une manière purement arithmétique par Dirichlet. Et d'ailleurs la déduction de la formule (1) elle-même, telle que l'a donnée Dirichlet, ne quitte pas le domaine élémentaire et naturel de l'arithmétique, si l'on a soin de choisir la fonction $F(z)$ telle que l'on ait $F(z) = 0$ lorsque z surpasse une certaine limite; car dans ce cas les deux membres de l'équation (1) se composent d'un nombre fini de termes.

Si on possédait une fonction $F(z)$ de cette dernière espèce, jouissant de plus de cette propriété que les différentes sommes dont se compose le premier membre auraient une valeur commune G, le premier membre de (1) serait précisément $G\,\mathrm{Cl}(D)$, et on en trouverait en divisant par G une expression générale et élémentaire du nombre des classes, dont la déduction n'emprunterait rien à l'analyse.

Mais malheureusement on ne connaît aucune fonction de la propriété énoncée, et il ne reste qu'à s'en approcher par les méthodes de l'analyse.

2. Nous choisirons une quantité positive auxiliaire X que nous ferons plus tard grandir indéfiniment; nous prendrons $F(z) = 1$ pour $z \leqq X$, puis $F(z) = 0$ pour $z > X$. Pour une forme fixe (a, b, c) nous poserons :

$$(2) \qquad N(X) = \sum_{m,n}^{*} \left(\frac{Q^2}{am^2 + bmn + cn^2}\right) F(am^2 + bmn + cn^2);$$

cette quantité devient plus aisée à étudier, si l'on suppose que D soit fondamental, c'est-à-dire que $Q = 1$; dans ce cas :

$$(2^o) \qquad N(X) = \sum_{m,n}^{*} F(am^2 + bmn + cn^2)$$

pourra s'interpréter comme le nombre de points aux coordonnées entières et différents de l'origine qui se trouvent dans le domaine caractérisé par l'inégalité

$$(2^a) \qquad ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X,$$

à laquelle s'ajoutent, dans le cas de $D > 0$, les deux autres $x > gy$, $y \geqq 0$.

Séparons les deux cas et supposons d'abord :

$$1. \qquad D = -\Delta < 0.$$

Le domaine (2^a) sera la surface d'une ellipse; nous allons déterminer la limite :

$$\lim \frac{N(X)}{X} \text{ pour } X = \infty.$$

Le quotient $N(X) : X$ peut être considéré comme la surface de $N(X)$ carrés égaux à $\frac{1}{X}$, et dont le côté commun aura pour valeur $\frac{1}{\sqrt{X}}$. Construisons les points aux coordonnées

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{X}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{X}};$$

ils se trouvent dans l'aire de l'ellipse

$$(\alpha) \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = 1,$$

et les N(X) carrés dont nous venons de parler peuvent être distribués de sorte que leurs centres seront les points (ξ, η); ils couvriront simplement et complètement presque toute l'aire de l'ellipse (α), en négligeant un petit carré autour de l'origine et une région très mince placée le long de la périphérie de la courbe. La limite cherchée coïncide alors avec la grandeur de l'aire de notre ellipse et on aura

$$\lim \frac{N(X)}{X} = J \quad \text{pour} \quad X = \infty,$$

en posant pour abréger

$$J = \iint d\xi d\eta, \qquad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1.$$

La condition qui détermine le domaine de l'intégration pouvant prendre la forme

$$(2a\xi + b\eta)^2 + \Delta\eta^2 \leqq 4a,$$

je pose

$$2a\xi + b\eta = \sqrt{\Delta} \cdot \zeta, \qquad d\xi = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} d\zeta,$$

ce qui donne

$$J = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iint d\eta d\zeta, \qquad \zeta^2 + \eta^2 \leqq \frac{4a}{\Delta};$$

l'intégrale double qui figure au second membre est la surface du cercle de rayon $\sqrt{\frac{4a}{\Delta}}$ et a pour valeur $\frac{4a\pi}{\Delta}$, de sorte que

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

On a donc, pour X infini :

$$\lim \frac{N(X)}{X} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}, \tag{3}$$

($D = -\Delta$ un discriminant fondamental négatif).

Passons maintenant au deuxième cas :

2. $D > 0$ et fondamental.

Le domaine où se trouvent nos points x et y sera alors défini par les inégalités

$$ax^2 + bxy + cy^2 \leqq X, \qquad x > gy, \qquad y \geqq 0,$$

et les points aux coordonnées

$$\frac{x}{\sqrt{X}} = \xi, \qquad \frac{y}{\sqrt{X}} = \eta$$

seront dans le domaine

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1, \qquad \xi > g\eta, \qquad \eta \geqq 0,$$

qui, évidemment, est limité par l'arc d'hyperbole et par deux droites. L'aire de cette figure sera à peu près égale à $N(X) : X$, et l'on aura par conséquent :

$$\lim \frac{N(X)}{X} = J' \text{ pour } X = \infty,$$

si l'on pose

$$J' = \iint d\xi d\eta, \quad a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1, \quad \xi > g\eta, \quad \eta \geqq 0.$$

En faisant

$$2a\xi + b\eta = \zeta,$$

et en observant que $2ag + b = \frac{T}{U}$, il s'ensuit :

$$J' = \frac{1}{2a}\iint d\eta d\zeta, \quad \zeta^2 - D\eta^2 \leqq 4a, \quad \eta \geqq 0, \quad \zeta > \frac{T}{U}\eta.$$

Pour un η donné, ζ varie de $\frac{T}{U}\eta$ à $\sqrt{4a+D\eta^2}$ et la condition

$$\frac{T}{U}\eta \leqq \sqrt{4a+D\eta^2}$$

devient, en employant la relation $T^2-DU^2=4$, la suivante :

$$\eta \leqq U\sqrt{a}.$$

Il vient donc

$$J' = \frac{1}{2a}\int_0^{U\sqrt{a}} \left(\sqrt{4a+D\eta^2} - \frac{T}{U}\eta\right) d\eta,$$

d'où, en faisant

$$\eta = \frac{2x\sqrt{a}}{\sqrt{D}},$$

$$J' = \frac{2}{\sqrt{D}}\int_0^{\frac{1}{2}U\sqrt{D}} \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{T}{U\sqrt{D}}x\right) dx.$$

Cela étant, la formule élémentaire

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

permet de conclure

$$J' = \frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2},$$

et par conséquent

$$(4) \qquad \lim\frac{N(X)}{X} = \frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}, \quad (D>0 \text{ et fondamental}).$$

3. Passons maintenant au cas général où D est quelconque, et prenons en effet $Q>1$. Nous aurons besoin dans ce qui suit de la fonction numérique $\mu(n)$ de Moebius[1] laquelle est égale à $(-1)^{\varpi}$,

[1] La notation $\mu(n)$ est maintenant presque généralement adoptée; Kronecker s'est servi de ε_n.

si n se compose de ϖ facteurs premiers différents, tandis qu'elle est nulle pour n divisible par un carré plus grand que 1; on fait $\mu(1)=1$.

La fonction $\mu(n)$ jouit de la propriété que la somme $\Sigma\mu(d)$ étendue à tous les diviseurs d'un nombre n plus grand que 1 est nulle; elle est évidemment égale à 1 pour $n=1$. On en tire la relation très utile

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)f(k)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=0}^{\infty}f(hd),$$

d parcourant tous les diviseurs de Q.

Pour simplifier la formule fondamentale de Dirichlet, je choisirai avec Kronecker les représentants (a, b, c) de telle sorte que a soit premier avec Q en restant positif, et que b et c contiennent tous les facteurs premiers de Q; on aura alors

$$\left(\frac{Q^2}{am^2+bmn+cn^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{am^2}\right)=\left(\frac{Q^2}{m}\right),$$

et la formule (1) s'écrira d'une manière un peu plus simple

$$(1\ bis) \qquad \sum_{(a,b,c)}\sum{}^{*}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)=\tau\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk).$$

Nous allons supposer $D=-\Delta<0$. La somme N(X) pourra s'écrire

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2);$$

or, en appliquant convenablement l'identité (5), il vient

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{m=-\infty}^{\infty}F(ad^2m^2+bdmn+cn^2),$$

d parcourant les diviseurs de Q; il vient donc

$$N(X)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{m,n}{}^{*}F(ad^2m^2+bdmn+cn^2).$$

En posant comme plus haut

$$\sum_{m,\,n}^{*} F(ad^2m^2+bdmn+cn^2)=N(X;\,ad^2,bd,c),$$

on aura, pour X infini,

$$\lim\frac{N(X)}{X}=\sum_{d}\mu(d)\lim\frac{N(X;\,ad^2,bd,c)}{X};$$

la limite du quotient $N(X;\,ad^2,bd,c):X$ se trouve égale à l'expression suivante, comme cela résulte de (3) :

$$\frac{2\pi}{\sqrt{4acd^2-b^2d^2}}=\frac{2\pi}{d\sqrt{\Delta}},$$

et nous aurons

$$\lim\frac{N(X)}{X}=\sum\frac{\mu(d)}{d}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}.$$

Or, comme on sait

$$\sum\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\varphi(Q)}{Q},$$

en représentant d'après Gauss par $\varphi(Q)$ le nombre des entiers plus petits que Q et premiers avec Q; donc

$$(3^*)\qquad \lim\frac{N(X)}{X}=\frac{\varphi(Q)}{Q}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},\ (D=-\Delta=-\Delta_0Q^2).$$

Lorsque le discriminant est positif, on a

$$N(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m>gn}\left(\frac{Q'}{m}\right)F(am^2+bmn+cn^2),$$

et l'application de la formule (5) fournit

$$N(X)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{dm>gn}F(ad^2m^2+bdmn+cn^2),$$

d parcourant les diviseurs de Q.

IMPRIMERIE NATIONALE.

La condition $dm > gn$ pouvant s'écrire

$$(\beta) \qquad m > \frac{d\mathrm{T} - bd\mathrm{U}}{2ad^2\mathrm{U}}\, n,$$

posons, pour abréger :

$$d\mathrm{T} = \mathrm{T}_1, \qquad \mathrm{U} = \mathrm{U}_1, \qquad ad^2 = a_1, \qquad bd = b_1, \qquad c = c_1,$$

de sorte que

$$\mathrm{D}_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 = \mathrm{D}d^2, \quad \text{et puis} \quad \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{D}_1\mathrm{U}_1^2 = 4d^2;$$

en faisant

$$g_1 = \frac{\mathrm{T}_1 - b_1\mathrm{U}_1}{2a_1\mathrm{U}_1},$$

la condition sommatoire (β) devient

$$m > g_1 n.$$

En cherchant la limite J'' du quotient

$$\frac{1}{\mathrm{X}} \sum_{m,\,n}^{*} \mathrm{F}(a_1m^2 + b_1mn + c_1n^2) \qquad (m > g_1 n,\ n \geqq 0),$$

le raisonnement sera à peu près le même que dans le cas précédent et on parvient à l'intégrale

$$\mathrm{J}'' = \frac{1}{2a_1} \iint d\eta\, d\zeta, \quad \zeta^2 - \mathrm{D}_1\eta^2 \leqq 4a_1, \quad \eta \geqq 0, \quad \zeta > \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{U}_1}\eta,$$

laquelle se trouvera égale à

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}'' &= \frac{1}{2a_1} \int_0^{\mathrm{U}\sqrt{a}} \left(\sqrt{4a_1 + \mathrm{D}_1\eta^2} - \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{U}_1}\eta\right) d\eta \\
&= \frac{1}{2da} \int_0^{\mathrm{U}\sqrt{a}} \left(\sqrt{4a + \mathrm{D}\eta^2} - \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{U}}\eta\right) d\eta = \frac{1}{d}\mathrm{J}';
\end{aligned}$$

la limite partielle étant

$$\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2},$$

le résultat final sera

$$(4^*)\qquad \lim\frac{N(X)}{X}=\frac{\varphi(Q)}{Q}\cdot\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}.$$

Les formules (3) et (4) résultent de (3*) et (4*) en y prenant $Q=1$; celles-ci sont donc générales.

En représentant, pour abréger, par la lettre M la quantité

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}},\quad \text{si}\quad D=-\Delta<0,$$

et la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{2},\quad \text{si}\quad D>0,$$

on aura donc, en divisant les deux membres de (1 *bis*) par X et passant à la limite pour X infini, le résultat suivant :

$$\frac{\varphi(Q)}{Q}\,\mathrm{M}.\,\mathrm{Cl}(D)=\lim_{X=\infty}\frac{\tau}{X}\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{D}{h}\right)\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk),$$

et il est clair qu'il devra fournir l'évaluation du nombre Cl(D). Afin de transformer le second membre, faisons usage de la relation (5), qui donne

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{k}\right)F(hk)=\sum\mu(d)\sum_{k=1}^{\infty}F(dkh),$$

d parcourant les diviseurs de Q; évidemment, pour notre fonction $F(z)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}F(dhk)=E\left(\frac{X}{dh}\right),$$

en représentant, suivant Legendre, par $\mathrm{E}(z)$ la partie entière de la quantité z. On aura donc, pour X infini :

$$\frac{\varphi(\mathrm{Q})}{\mathrm{Q}}\mathrm{M}\cdot\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) = \lim \frac{\tau}{\mathrm{X}} \sum \mu(d) \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{X}}{dh}\right),$$

ou bien

$$= \tau \sum \frac{\mu(d)}{d} \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \mathrm{E}\left(\frac{x}{h}\right),$$

en posant $x = \frac{\mathrm{X}}{d}$. Nous verrons que cette dernière limite ne dépend pas de d, de sorte que le second membre contiendra le facteur

$$\sum \frac{\mu(d)}{d} = \frac{\varphi(\mathrm{Q})}{\mathrm{Q}},$$

et après sa suppression, on aura

$$(6^0) \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) = \lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \mathrm{E}\left(\frac{x}{h}\right).$$

Comme évidemment

$$\lim \frac{1}{x}\mathrm{E}\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{1}{h},$$

il est probable qu'on aura :

$$(6) \qquad \mathrm{M}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \frac{1}{h},$$

mais il faut établir ce fait avec plus de rigueur.

4. Le problème est un cas particulier du suivant :

$$\lim_{x=\infty} \frac{\mathrm{S}}{x}, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{S} = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \mathrm{E}(c_h x),$$

en supposant que les quantités

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \ldots,\ c_h,\ \ldots$$

sont positives et convergent vers zéro; nous introduirons une condition de plus, à savoir que la suite n'est jamais croissante.

Cette question entre comme cas particulier dans une question concernant la théorie générale des séries, lorsqu'il s'agit du calcul numérique d'une série convergente

$$\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h v_h,$$

dans laquelle les quantités ε_h, positives ou négatives, doivent conserver leur valeur exacte, tandis que les v_h doivent être remplacées par leurs approximations limitées à un nombre donné m de chiffres décimaux; en posant en effet $10^m = x$, la valeur approchée de v_h n'est autre chose que la quantité

$$\frac{1}{x} \mathrm{E}(x v_h),$$

de sorte que la série infinie dont nous venons de parler se trouve remplacée par l'expression finie

$$\frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h \mathrm{E}(x v_h).$$

Il reste à décider si cette expression est une véritable valeur approchée de la série, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h \mathrm{E}(x v_h) = \sum_{1}^{\infty} \varepsilon_h v_h.$$

Chose curieuse, la réponse n'est pas affirmative en général, et il faut que la série donnée remplisse certaines conditions pour qu'on puisse obtenir sa valeur approchée par le procédé indiqué. Mais dans tous les cas qui peuvent intéresser la pratique, par exemple pour des séries absolument convergentes, la difficulté ne subsiste pas, comme on le voit facilement, et dans des cas analogues au nôtre, on résoudra souvent la difficulté en employant une identité fort connue d'Abel. Je me borne à établir le théorème suivant:

Si les quantités positives

$$v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad \ldots$$

constituent une suite décroissante et tendant vers zéro, et si les quantités de signes quelconques ε_1, ε_2, ε_3, ... sont telles que leurs sommes

$$\varepsilon_0,\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2,\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\quad \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\quad \ldots$$

restent plus petites qu'une constante connue g, la quantité

$$\frac{1}{x}\sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h\,\mathrm{E}(xv_h)=\mathrm{S}^{(x)}$$

tend pour x infini à la limite

$$\sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h v_h=\mathrm{S}.$$

Pour abréger la démonstration, posons.

$$\mathrm{S}_n=\sum_{1}^{n-1}\varepsilon_h v_h,\qquad \mathrm{S}_n^{(x)}=\sum_{h=1}^{n-1}\varepsilon_h\frac{\mathrm{E}(xv_h)}{x},$$

$$\mathrm{R}_n=\sum_{h=n}^{\infty}\varepsilon_h v_h,\qquad \mathrm{R}_n^{(x)}=\sum_{h=n}^{\infty}\varepsilon_h\frac{\mathrm{E}(xv_h)}{x}.$$

L'identité d'Abel

$$\sum_{0}^{l}a_\mu b_\mu=\sum_{0}^{l-1}(a_\mu-a_{\mu+1})(b_0+b_1+\ldots+b_\mu)+a_l(b_0+b_1+\ldots+b_l)$$

donne, en prenant $a_\mu = v_{n+\mu}$, $b_\mu = \varepsilon_{n+\mu}$, l'équation suivante :

$$\sum_n^{n+l} \varepsilon_h v_h = \sum_{h=n}^{n+l-1} (v_h - v_{h+1})(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \ldots + \varepsilon_h)$$

$$+ v_{n+l}(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \ldots + \varepsilon_{n+l});$$

d'après l'hypothèse, les sommes $\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \ldots + \varepsilon_h$ sont plus petites que $2g$, et puisque $\lim\limits_{l=\infty} v_{n+l} = 0$, on a évidemment :

$$\sum_n^{\infty} \varepsilon_h v_h = \sum_{h=n}^{\infty} (v_h - v_{h+1})(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} + \ldots + \varepsilon_h),$$

ce qui donne :

$$|R_n| < v_n \,.\, 2g.$$

On a aussi par la même raison :

$$|R_n^{(x)}| < \frac{E(xv_n)}{x} \,.\, 2g < v_n \,.\, 2g;$$

donc, la différence

$$S - S^{(x)} = (S_n - S_n^{(x)}) + R_n - R_n^{(x)}$$

se compose de trois quantités qui, pour x suffisamment grand, peuvent être rendues aussi petites qu'on le veut; c'est-à-dire on a :

$$\lim_{x=\infty} S^{(x)} = S.$$

Les conditions concernant les quantités ε_h sont remplies dans notre cas où

$$\varepsilon_h = \left(\frac{D}{h}\right),$$

et on a par conséquent :

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) E(c_h x) = \sum_1^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) c_h$$

toutes les fois que les c_h font une série décroissante et convergente vers zéro.

5. Ceci complète la démonstration de l'équation (6), et en substituant les valeurs de M, nous aurons les formules de Dirichlet

$$\text{(I)} \qquad \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{Cl}(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{h},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{Cl}(D) \log \frac{T + U\sqrt{D}}{2} = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}, \qquad (D > 0).$$

La quantité

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2}$$

sera désormais représentée par le symbole $E(D)$; nous poserons aussi, pour abréger,

$$(7) \qquad P(D) = \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h} \qquad (D \gtrless 0),$$

de sorte que les formules (I) et (II) deviennent :

$$(7^a) \qquad \operatorname{Cl}(-\Delta) = \frac{\tau\sqrt{\Delta}}{2\pi} P(-\Delta), \qquad \operatorname{Cl}(D) \log E(D) = \sqrt{D}\, P(D).$$

Une première remarque fournit la sommation de la série $P(D)$ à l'aide des transcendantes Eulériennes, ce qui peut, dans certains cas, être utile.

Soit m un entier positif et posons pour abréger $|D| = \Delta$, et puis

$$P_m = \sum_{h=1}^{m\Delta} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{1}{h}.$$

En faisant $h = \alpha + \Delta\nu$, cette dernière somme devient :

$$P_m = \sum_{\alpha=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\alpha}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha + \Delta\nu},$$

d'où, en faisant usage des circonstances,

$$\left(\frac{D}{\Delta}\right)=0, \qquad \sum_{\alpha=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\alpha}\right)=0,$$

$$P_m=\frac{1}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\frac{\alpha}{\Delta}+\nu}-\log m\right).$$

Cela posé, l'équation connue

$$\lim_{m=\infty}\left\{\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{x+\nu}-\log m\right\}=-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

fournit immédiatement la limite de P_m qui est $P(D)$, et on a :

$$(8) \qquad P(D)=-\frac{1}{\Delta}\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)}, \qquad (D\gtrless 0, \quad |D|=\Delta),$$

ou, en employant les formules (7^a),

$$(8^a) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) &= -\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\Delta}\right)};\\ \sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) &= -\sum_{\alpha=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{\alpha}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{D}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Dans la première de ces formules, on peut immédiatement réduire le second membre à une expression plus élémentaire, si l'on se rappelle l'équation

$$\frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\pi\cot x\pi.$$

Si l'on y change, en effet, α en $\Delta-\alpha$, l'équation

$$\left(\frac{-\Delta}{\Delta-\alpha}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

donnera immédiatement la forme

$$+\sum\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\frac{\Gamma'\left(1-\frac{\alpha}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{\Delta}\right)},$$

et en ajoutant, il s'ensuit la formule

$$(9)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}=\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

qui a lieu pour tous les discriminants négatifs et a été donnée par Lebesgue[1].

Le même résultat s'obtient en faisant usage de la formule de Gauss :

$$(\alpha)\qquad \frac{\Gamma'\left(\frac{h}{\Delta}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{\Delta}\right)}=\Gamma'(1)-\log 2\Delta-\frac{\pi}{2}\cot\frac{h\pi}{\Delta}+\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\cos\frac{2\alpha h\pi}{\Delta}\cdot\log\sin\frac{\alpha\pi}{\Delta},$$

dont on peut se servir aussi pour transformer la deuxième des formules (8^a). En observant que pour les discriminants positifs on a :

$$\left(\frac{D}{D-h}\right)=\left(\frac{D}{h}\right),$$

les cotangentes se détruisent deux à deux, et il ne reste que l'expression

$$(10)\qquad \sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=-\sum_{\alpha=1}^{D-1}\log\sin\frac{\alpha\pi}{D}\cdot\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\alpha h\pi}{D}.$$

Le deuxième membre se simplifie essentiellement si D est un discriminant fondamental; on aura alors :

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2\alpha h\pi}{D}=\left(\frac{D}{\alpha}\right)\sqrt{D},$$

[1] *Journal de Liouville*, t. XV, 1850; pour Δ premier, déjà t. VII, 1842.

et il s'ensuit

$$(10^*)\qquad \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = -\sum_{\alpha=1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{\mathrm{D}}$$

(D un discriminant fondamental).

C'est là un des principaux résultats de Lejeune-Dirichlet que nous vérifierons tout à l'heure d'une manière plus simple, qui ne fait pas usage de la formule de Gauss (α). Remarquons que les termes du second membre sont égaux deux à deux, de sorte qu'on pourra l'écrire :

$$-2\sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{\mathrm{D}}.$$

La même remarque a lieu au sujet de la formule (9).

6. Nous allons maintenant établir la relation très simple entre les quantités P(D) et P(DS^2), en représentant par S un entier positif quelconque.

Nous emploierons dans ce but la formule

$$\mathrm{P}(\mathrm{DS}^2) = \lim_{x=\infty}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{DS}^2}{h}\right)\frac{\mathrm{E}\left(\frac{x}{h}\right)}{x},$$

en la transformant au moyen de l'équation (5); on a d'abord :

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{DS}^2}{h}\right)\mathrm{E}\left(\frac{x}{h}\right) = \sum_{d}\mu(d)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{dk}\right)\mathrm{E}\left(\frac{x}{dk}\right),$$

d parcourant les diviseurs de S; il s'ensuit :

$$\mathrm{P}(\mathrm{DS}^2) = \sum_{d}\mu(d)\left(\frac{\mathrm{D}}{d}\right)\frac{1}{d}\lim_{x=\infty}\frac{d}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{k}\right)\mathrm{E}\left(\frac{x}{dk}\right),$$

d'où, en substituant la valeur

$$\lim_{x=\infty} \frac{d}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{D}{k}\right) E\left(\frac{x}{dk}\right) = P(D),$$

il vient :

$$\frac{P(DS^2)}{P(D)} = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D}{d}\right) \frac{1}{d} = \prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right) \frac{1}{s}\right), \tag{11}$$

s parcourant les facteurs premiers différents du nombre S.

Eu égard aux formules (7^a), ce résultat donne les relations

$$\frac{Cl(-\Delta S^2)}{Cl(-\Delta)} = \frac{2}{\tau} S \prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right) \frac{1}{s}\right), \tag{12}$$

$$\frac{Cl(DS^2) \log E(DS^2)}{Cl(D) \log E(D)} = S \prod_s \left(1 - \left(\frac{D}{s}\right) \frac{1}{s}\right), \tag{13}$$

dont on conclut comment le calcul du nombre des classes d'un discriminant quelconque se réduit à la détermination dudit nombre pour le discriminant fondamental correspondant. C'est des discriminants fondamentaux exclusivement que nous nous occuperons dans la suite, puisque leur emploi est commode et que les généralisations pour des discriminants quelconques sont à peine possibles.

7. Les deux formules suivantes :

$$\frac{1}{2} - x = \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2hx\pi}{h\pi}, \qquad -\log(2 \sin x\pi) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos 2hx\pi}{h},$$

qui ont lieu pour $0 < x < 1$ et ne sont que de légères conséquences de la série logarithmique, conduisent immédiatement à la valeur de la série P(D) dans les deux cas. Posons en effet, dans la première équation, $x = \frac{\nu}{\Delta}$, en supposant que $-\Delta$ est un discriminant fondamental négatif; puis multiplions les deux membres par $\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$ et ajoutons les résultats pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$; on aura ainsi :

$$-\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{h\pi}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\sin\frac{2\nu h\pi}{\Delta},$$

d'où, en substituant la valeur

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\sin\frac{2\nu h\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sqrt{\Delta},$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{\sqrt{\Delta}}{h\pi},$$

ou bien

$$\mathrm{Cl}(-\Delta) = -\frac{\tau}{2\Delta}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu. \tag{14}$$

En traitant la seconde formule d'une manière analogue, on parvient à la formule (10*), qui, par là, est démontrée d'une manière plus élémentaire.

La série logarithmique

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}, \qquad (|z| < 1),$$

donne naissance à une généralisation des formules (14) et (10*) que nous allons établir.

Considérons r discriminants fondamentaux de signes quelconques $D_1, D_2, \ldots, D_r$, dont les valeurs absolues soient désignées par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$, et prenons, dans la série en question,

$$z = xe^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\ldots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}, \qquad |x| < 1;$$

puis multiplions les deux membres par le produit des signes de Legendre

$$\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)$$

et ajoutons les résultats pour les valeurs

$$h_1 = 1, 2, \ldots, \Delta_1 - 1; \quad h_2 = 1, 2, \ldots, \Delta_2 - 1,$$

et ainsi de suite; on aura :

$$-\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\log\left(1 - xe^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)e^{2n\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)};$$

en faisant usage de l'identité

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots e^{2n\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots\right)}$$

$$= \sum_{h_1}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)e^{\frac{2nh_1\pi i}{\Delta_1}}\cdot\sum_{h_2}\left(\frac{D_2}{h_2}\right)e^{\frac{2nh_2\pi i}{\Delta_2}}\cdots$$

$$= \left(\frac{D_1}{n}\right)\sqrt{D_1}\cdot\left(\frac{D_2}{n}\right)\sqrt{D_2}\cdots = \left(\frac{D_1D_2\cdots}{n}\right)\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\cdots,$$

on aura ce résultat plus simple

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\cdots\sqrt{D_r}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D_1D_2\cdots D_r}{n}\right)\frac{x^n}{n}$$

$$= -\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right)\log\left(1 - xe^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)}\right).$$

Si le nombre

$$D = D_1D_2\cdots D_r$$

n'est pas un carré, il sera un discriminant et on pourra passer à la limite pour $x = 1$; on obtient au premier membre la quantité

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\quad\sqrt{D_r}\,P(D),$$

et le deuxième se simplifiera en faisant usage de l'équation

$$\log(1 - e^{2\xi\pi i}) = \log(2 \sin \xi\pi) + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)\pi i,$$

qui a lieu sous la condition $0 < \xi < 1$; on ne peut pas substituer à ξ la quantité

$$\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r} = \eta,$$

puisqu'elle n'est pas en général entre des limites annoncées, mais son plus petit reste positif $\mathfrak{R}(\eta)$, c'est-à-dire la différence $\eta - \mathrm{E}(\eta)$, satisfait à l'équation :

$$e^{2\eta\pi i} = e^{2\mathfrak{R}(\eta)\pi i},$$

et on pourra faire $\xi = \mathfrak{R}(\eta)$.

On aura par conséquent :

$$\log\left(1 - e^{2\pi i\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)}\right) = \log\left|2 \sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$
$$+ \pi i\left(-\frac{1}{2} + \mathfrak{R}\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right),$$

et notre équation devient, pour $x = 1$:

$$\sqrt{\mathrm{D}_1}\sqrt{\mathrm{D}_2} \cdots \sqrt{\mathrm{D}_r}\,\mathrm{P}(\mathrm{D})$$
$$= -\sum_{h_1 h_2 \ldots h_r} \left(\frac{\mathrm{D}_1}{h_1}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{D}_r}{h_r}\right) \log\left|\sin \pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$
$$- \pi i \sum_{h_1 h_2 \ldots h_r} \left(\frac{\mathrm{D}_1}{h_1}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{D}_r}{h_r}\right) \mathfrak{R}\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right).$$

Si le nombre des discriminants négatifs dans la suite $\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2 \ldots \mathrm{D}_r$ est impair, $2\nu + 1$, on aura :

$$\sqrt{\mathrm{D}_1}\sqrt{\mathrm{D}_2} \cdots \sqrt{\mathrm{D}_r} = (-1)^\nu \sqrt{\mathrm{D}} = (-1)^\nu i \sqrt{\Delta},$$

en posant

$$D = -\Delta,$$

et puisque $\tau = 2$ pour $|D| > 4$, on a :

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} P(D) = \mathrm{Cl}(D),$$

et notre équation devient, dans ce cas,

$$(15)\quad \mathrm{Cl}(D_1 D_2 \ldots D_r)$$
$$= (-1)^{\nu+1} \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \mathfrak{R}\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots + \frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

($r > 1$; $D_1, D_2, \ldots, D_r$ étant des discriminants fondamentaux dont $2\nu + 1$ sont négatifs et dont $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ sont les valeurs absolues).

Si, au contraire, le nombre des discriminants négatifs est pair, 2ν, on aura :

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2} \ldots \sqrt{D_r} = (-1)^\nu \sqrt{D},$$

de sorte que notre résultat prend la forme :

$$(16)\quad \mathrm{Cl}(D_1 D_2 \ldots D_r) \log E(D_1 D_2 \ldots D_r)$$
$$= (-1)^{\nu+1} \sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1} \sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1} \cdots \sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1} \left(\frac{D_1}{h_1}\right)\left(\frac{D_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{D_r}{h_r}\right) \log\left|\sin\pi\left(\frac{h_1}{\Delta_1} + \frac{h_2}{\Delta_2} + \cdots \frac{h_r}{\Delta_r}\right)\right|$$

($r > 1$; $D_1, D_2, \ldots, D_r$ étant des discriminants fondamentaux dont 2ν sont négatifs et qui ont leurs valeurs absolues égales à Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_r$).

Chaque discriminant impair peut être mis sous la forme $D_1 D_2 \ldots D_r$; parmi les discriminants pairs, il y en a qui ne s'obtiennent pas de cette manière; par exemple le discriminant $4p$, n'est pas décomposable si p est premier, positif ou négatif, et de la forme $4k+1$.

La formule (15) peut s'écrire d'une manière différente si l'on remplace l'expression $\mathfrak{R}(x)$ par $x - \mathrm{E}(x)$; la quantité

$$\sum_{h_1}\sum_{h_2}\cdots\sum_{h_r}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{h_1}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{D}_r}{h_r}\right)\cdot\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right)$$

sera évidemment nulle, et il s'ensuit :

$$(15^*)\quad \mathrm{Cl}(\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\ldots\mathrm{D}_r)$$
$$=(-1)^{\nu}\sum_{h_1=1}^{\Delta_1-1}\sum_{h_2=1}^{\Delta_2-1}\cdots\sum_{h_r=1}^{\Delta_r-1}\left(\frac{\mathrm{D}_1}{h_1}\right)\left(\frac{\mathrm{D}_2}{h_2}\right)\cdots\left(\frac{\mathrm{D}_r}{h_r}\right)\mathrm{E}\left(\frac{h_1}{\Delta_1}+\frac{h_2}{\Delta_2}+\cdots+\frac{h_r}{\Delta_r}\right).$$

En prenant $r=2$, posons $\mathrm{D}_1=-\Delta$, $\mathrm{D}_2=\mathrm{D}$; nous aurons :

$$\mathrm{Cl}(-\mathrm{D}\Delta)=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\sum_{k=1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{k}\right)\mathrm{E}\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{k}{\mathrm{D}}\right).$$

Prenons-y $k=1, 2, \ldots, \left[\frac{\mathrm{D}}{2}\right]$, les autres valeurs de k seront de la forme $\mathrm{D}-k'$; on en conclut d'abord :

$$\mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D})=\sum_{h=1}^{\Delta-1}\sum_{k=1}^{\left[\frac{\mathrm{D}}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{k}\right)\mathrm{E}\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{k}{\mathrm{D}}\right)$$
$$+\sum_{h=1}^{\Delta-1}\sum_{k=1}^{\left[\frac{\mathrm{D}}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{\mathrm{D}}{k}\right)\mathrm{E}\left(\frac{h}{\Delta}+1-\frac{k}{\mathrm{D}}\right).$$

Les quantités $\mathrm{E}\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{k}{\mathrm{D}}\right)$ n'ont d'autre valeur que 0 ou 1, et ce dernier cas se présente pour :

$$h>\left(1-\frac{k}{\mathrm{D}}\right)\Delta;$$

la première somme sera alors :

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]}\left(\frac{\mathrm{D}}{k}\right)\sum_{h>\Delta-\frac{k\Delta}{\mathrm{D}}}\left(\frac{-\Delta}{h}\right),$$

et si l'on y substitue $h = \Delta - i$, on aura $i < \frac{k\Delta}{D}$, et par conséquent la somme sera égale à la suivante :

$$-\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{k}\right) \sum_{i=1}^{\left[\frac{k\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{i}\right).$$

Dans la seconde somme, les indices h des termes non nuls sont soumis à l'inégalité

$$h > \frac{k\Delta}{D};$$

la somme sera par conséquent :

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{k}\right) \sum_{h > \frac{k\Delta}{D}} \left(\frac{-\Delta}{h}\right);$$

or, en soustrayant la somme nulle

$$\sum_{1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right),$$

on aura

$$\sum_{h > \frac{k\Delta}{D}} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = -\sum_{h < \frac{k\Delta}{D}} \left(\frac{-\Delta}{h}\right),$$

et notre deuxième somme s'écrira comme la première; il vient donc

$$(17) \qquad \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{k}\right) \sum_{h=1}^{\left[\frac{k\Delta}{D}\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D).$$

En procédant de manière inverse, on serait parvenu à la formule

$$(18) \qquad \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{k=1}^{\left[\frac{hD}{\Delta}\right]} \left(\frac{D}{k}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D).$$

8. Nous reviendrons sur ces formules et sur l'équation (16), et nous passons à établir certaines transformations de l'équation (14).

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu=-\frac{2\Delta}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

En supposant d'abord Δ impair $=2n+1$, la somme qui constitue le premier membre

$$S=\sum_{1}^{2n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu$$

peut se décomposer comme il suit :

$$S=\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu+\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right)(n+\nu);$$

pour Δ impair on a :

$$\left(\frac{-\Delta}{n+\nu}\right)=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2n+2\nu}\right)=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\frac{-\Delta}{2\nu-1}\right);$$

il s'ensuit, en écrivant $2\nu-1=\lambda$,

$$S=\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu+\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\Delta+\lambda}{2},\qquad(\lambda=1,\ 3,\ 5,\ldots 2n-1).$$

La première partie du second membre peut évidemment être écrite comme il suit :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)2\nu,$$

et puisque l'expression

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)2\nu+\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda$$

n'est autre chose que la somme S, on a la relation

$$S=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{1}{2}S+\frac{1}{2}\Delta\cdot\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right);$$

d'où

$$\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)S=\Delta\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

ou, en substituant la valeur de S,

$$(19)\quad \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(\left(\frac{2}{\Delta}\right)-2\right)\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);\quad (\lambda=1,3,5,\dots\Delta-2).$$

Cette relation subsiste d'ailleurs aussi pour Δ pair, car dans ce cas les deux membres se réduisent à zéro.

Si dans la relation

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=0$$

on sépare les termes de rang pair des termes de rang impair, il vient :

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)+\sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)=0,$$

d'où

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right);$$

en substituant dans (19) et supposant Δ impair, il s'ensuit :

$$(20)\quad \sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Cette équation est cependant générale, car nous allons voir qu'elle subsiste aussi pour Δ pair; posons dans ce but $\Delta=4n$; notre somme S deviendra

$$S=\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda,\qquad (\lambda=1,3,5,\dots 4n-1).$$

En conservant les λ inférieurs à $2n$, nous écrirons les autres $2n+\lambda$, ce qui donne :

$$S=\sum_{\lambda<2n}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda+\sum_{\lambda<2n}\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)(2n+\lambda).$$

En distinguant les différentes formes du discriminant pair, à savoir $\Delta=4D$ ou $\Delta=8D$ ou enfin $\Delta=8\Delta_1E$, on s'assure que l'on a toujours

$$\left(\frac{-\Delta}{2n+\lambda}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)$$

et par conséquent

$$S=-2n\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=-2n\sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

ce qui vérifie l'équation (20) pour Δ pair. Remarquons que, comme cela résulte de la formule (12), l'équation (20) peut s'écrire aussi :

$$(20^*)\qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\mathrm{Cl}(-4\Delta),$$

ce qui est précisément une formule donnée par Dirichlet, car le deuxième membre n'est autre chose que le nombre des classes positives et proprement primitives $(a,\ 2b,\ c)$ du *déterminant* $b^2-ac=-\Delta$.

Si dans la somme S on retient les termes où $\nu<\frac{\Delta}{2}$ et que dans les autres on pose $\nu=\Delta-\mu$, il vient :

$$S=\sum_{1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu+\sum_{1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\Delta-\mu}\right)(\Delta-\mu),$$

ou bien :

$$S=2\sum_{1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu-\Delta\sum_{1}^{\left[\frac{\Delta}{2}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En substituant la valeur de S et faisant usage de l'équation (20), il vient :

$$(21)\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

La somme

$$\sum_{\lambda} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots; \lambda < \Delta)$$

est identique avec S si Δ est pair, et pour Δ impair on l'obtient en posant $\lambda = \Delta - 2\mu$ $\left(\mu = 1, 2, 3, \ldots \frac{\Delta-1}{2}\right)$; elle devient alors :

$$-\sum \left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right)(\Delta - 2\mu) = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\Delta \sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) + 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{2}(\Delta-1)} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right)\mu,$$

et les formules (20) et (21) donnent :

$$(22)\qquad \sum \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \qquad (\lambda = 1, 3, 5, \ldots \Delta - 2),$$

$-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair.

Enfin on peut évaluer la quantité

$$S_1 = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu^2;$$

en y remplaçant ν par $\Delta - \nu$, on aura :

$$S_1 = -\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)(\nu^2 - 2\Delta\nu + \Delta^2) = -S_1 + 2\Delta \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu;$$

la dernière somme étant donnée par (14), il vient :

$$(23)\qquad \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu^2 = -\frac{2}{\tau}\Delta^2\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

CHAPITRE II.

USAGE DES SÉRIES INFINIES.

1. On connaît la relation suivante, démontrée par Cauchy et Gauss, et qui donne naissance à la transformation linéaire des fonctions elliptiques :

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\nu^2\omega\pi i + 2\nu u\pi i} = \sqrt{\frac{i}{\omega}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(u+\nu)^2}.$$

J'y pose $\omega = ix$ en supposant x réel et positif, de sorte qu'on aura

$$(1) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 x\pi + 2\nu u\pi i} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2}.$$

Cela étant, soit D un discriminant fondamental positif; nous posons $u = \frac{h}{D}$, multiplions par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons pour $h = 1, 2, \cdots D-1$: le premier membre s'obtient au moyen de la formule

$$\sum_{h=1}^{D-1} e^{\frac{2\nu h\pi i}{D}} = \left(\frac{D}{\nu}\right)\sqrt{D},$$

et pour simplifier le second, je ferai $h + D\nu = n$; on aura alors :

$$\left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{D}{n}\right),$$

et le résultat final prend la forme :

$$\sqrt{D} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{D^2 x}}.$$

d'où en changeant x en $\frac{x}{D}$ et en réunissant les termes égaux :

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}.$$

Différentions maintenant les deux membres de l'équation (1) par rapport à u; il vient :

$$i\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\nu e^{-\nu^2 x\pi+2\nu u\pi i} = -\frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(u+\nu)e^{-\frac{\pi}{x}(u+\nu)^2};$$

en représentant par $-\Delta$ un discriminant fondamental négatif, prenons $u=\frac{h}{\Delta}$, multiplions les deux membres par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h=1, 2, \cdots \Delta-1$. Pour évaluer la somme au premier membre, on fera usage de la relation

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)e^{\frac{2\nu h\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\sqrt{\Delta}\,.\,i\,\mathrm{sgn}\,\nu;$$

pour la sommation dans le second membre, on fait $h+\nu\Delta=n$, et on observe que

$$\left(\frac{-\Delta}{n}\right) = \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{sgn}\,n,$$

de sorte qu'il vient :

$$\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu\,\mathrm{sgn}\,\nu\cdot e^{-\nu^2 x\pi} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{n}{\Delta}\mathrm{sgn}\,n\cdot e^{-\frac{n^2\pi}{x\Delta^2}},$$

ou, en changeant x en $\frac{x}{\Delta}$ et simplifiant :

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2 x\pi}{\Delta}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}.$$

Occupons-nous d'abord de cette dernière équation.

Son intégration fait voir que l'expression

$$F=\int_z^\infty dx\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2x\pi}{\Delta}}+\int_0^z\frac{dx}{x\sqrt{x}}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)ne^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}$$

est indépendante de la variable z supposée positive; sa valeur s'obtient en faisant tendre z vers zéro, ce qui donne :

$$F=\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\Delta}{n\pi}=\sqrt{\Delta}\,\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

on a par conséquent l'équation

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2z\pi}{\Delta}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\cdot\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)n\int_0^z e^{-\frac{n^2\pi}{\Delta x}}\frac{dx}{x\sqrt{x}};$$

pour simplifier l'intégrale qui figure dans le terme général de la deuxième série, posons-y :

$$x=\frac{n^2\pi}{\Delta x_1};$$

il vient :

$$(4)\quad \frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{n^2z\pi}{\Delta}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta z}}}^\infty e^{-x^2}dx.$$

On obtient les séries à convergence égale, si l'on fait $z=1$. Pour apprécier l'erreur en négligeant le reste, on peut se servir de la formule

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_w^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{\pi}e^{-w^2}\int_0^\infty e^{-w^2x^2}\frac{dx}{1+x^2}<\frac{1}{2}e^{-w^2}.$$

En ne considérant, dans la seconde série, au deuxième membre de l'équation (4), que m premiers termes, le reste sera en valeur absolue moindre que la quantité $\left(\xi=\frac{1}{\Delta z}\right)$

$$\sum_{n=m+1}^\infty e^{-n^2\xi\pi}<\int_m^\infty e^{-x^2\xi\pi}dx<\frac{1}{2\sqrt{\xi}}e^{-m^2\xi\pi};$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

l'erreur sera donc plus petite que

$$\frac{1}{2}\sqrt{\Delta z} \cdot e^{-\frac{m^2\pi}{\Delta z}};$$

on sera donc obligé de prendre m termes, où

$$m > \sqrt{\frac{\Delta z}{2\pi} \log \frac{\Delta z}{4}};$$

ce nombre est relativement petit. Pour évaluer l'erreur avec plus de précision, on déterminera les signes de Legendre $\left(\frac{-\Delta}{n}\right)$ pour un nombre un peu plus grand de valeurs de n qu'on ne songe à en employer dans le calcul.

Passons maintenant à la formule (2); elle fait voir que la quantité

$$G = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} + \int_0^z \frac{dx}{x} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}}$$

est indépendante de la quantité positive z; en passant à la limite pour $z = 0$, il vient :

$$G = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{\sqrt{D}}{n} = \mathrm{Cl}(D) \log E(D).$$

En employant cette valeur de G et les formules

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2 x\pi}{D}} = \frac{2\sqrt{D}}{n\sqrt{\pi}} \int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^z \frac{dx}{x} e^{-\frac{n^2\pi}{Dx}} = \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

on aura ce développement à convergence rapide :

$$(5) \qquad \mathrm{Cl}(D) \log E(D)$$

$$= 2\sqrt{\frac{D}{\pi}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{z\pi}{D}}}^\infty e^{-x^2}\,dx + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{Dz}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

A cause de la présence du facteur très grand $\log E(D)$ dans le premier membre, l'emploi de ce développement est encore plus facile que dans le cas des discriminants négatifs; la valeur préférable de z est également $z=1$. La présence du paramètre arbitraire z dans les formules (4) et (5) donne occasion à beaucoup de formules nouvelles; on n'a qu'à multiplier par des facteurs convenables et intégrer les deux membres; les résultats auxquels on parvient de la sorte sont souvent très élégants, mais ils présentent cette circonstance que leur convergence est trop lente. Je m'arrêterai seulement à la formule (5), dans laquelle j'écrirai pour un moment :

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=A, \qquad \frac{n^2\pi}{D}=c, \qquad \left(\frac{D}{n}\right)=\varepsilon,$$

de sorte qu'on aura :

$$A=\sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-cxz}\sqrt{z}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}+\sum\varepsilon\int_1^\infty e^{-\frac{cx}{z}}\frac{dx}{x}.$$

Cela étant, soit u une constante positive; je multiplie les deux membres par $e^{-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}$ et j'intègre de $z=0$ à $z=\infty$; il vient :

$$A\cdot\sqrt{\frac{\pi}{u}}=\sum\varepsilon\int_1^\infty\frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}}+\sum\varepsilon\int_1^\infty\frac{dx}{x}\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Dans la seconde série du deuxième membre, la première intégration s'effectue au moyen de la formule de Cauchy

$$\int_0^\infty e^{-\frac{cx}{z}-uz}\frac{dz}{\sqrt{z}}=\sqrt{\frac{\pi}{u}}\,e^{-2\sqrt{cux}};$$

l'intégrale double aura donc la valeur

$$\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_1^\infty e^{-2\sqrt{cux}}\frac{dx}{x}=2\sqrt{\frac{\pi}{u}}\int_{2\sqrt{cu}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

et si l'on emploie encore la valeur

$$\int_1^\infty \frac{1}{cx+u}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{cu}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{u}{c}},$$

on aura :

$$A\sqrt{\frac{\pi}{u}} = \frac{2}{\sqrt{u}} \sum \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{u}{c}} + 2\sqrt{\frac{\pi}{u}} \sum \varepsilon \int_{2\sqrt{cu}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x},$$

ou bien, si l'on fait $u = \frac{w^2\pi}{D}$:

$$(6) \quad \frac{1}{2}\operatorname{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{w}{n} + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{2nw\pi}{D}}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

2. Certaines propriétés de la fonction $E(x)$ de Legendre découlent immédiatement de sa représentation par la série trigonométrique donnée par un géomètre belge, M. Schaar[1], et utilisée par Stern[2]. Des applications plus intéressantes sur lesquelles nous devons revenir sont dues à M. Alexandre Berger[3]; plusieurs formules que nous rencontrerons ont été effectivement données par ce géomètre; seulement on ne trouve pas indiqué, dans ses mémoires, le rôle important qu'elles ont dans le problème qui nous occupe.

Nous emploierons aussi les développements trigonométriques des fonctions analogues, lesquelles ont été rencontrées par Riemann, dans ses notes posthumes sur les cas limites des fonctions modulaires.

Au lieu de $E(x)$ j'introduirai la fonction $E^*(x)$ qui n'en diffère que pour x entier, où elle est égale à $E(x) - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2}$. On aura, quel que soit x :

$$(7) \qquad E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

(1) *Mémoires des Savants étrangers* publiés par l'Académie des sciences de Belgique, t. 23.

(2) *Journal de Crelle*, t. 59.

(3) *Nova Acta reg. Soc. scient. Upsaliensis*, 1884-1886.

si l'on définit, pour x négatif, cette fonction au moyen de l'identité

$$E^*(x)+E^*(-x)=-1;$$

nous ne ferons usage cependant que des valeurs positives de l'argument de cette fonction.

La quantité

$$R(x)=x-E\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

s'appelle le plus petit reste absolu de la quantité réelle x, de sorte qu'on aura

$$-\frac{1}{2}\leqq R(x)<\frac{1}{2}$$

pour $x>0$, puis $-\frac{1}{2}<R(x)\leqq\frac{1}{2}$ pour $x<0$.

Je préfère introduire la fonction

$$R^*(x)=x-E^*\left(x+\frac{1}{2}\right),$$

égale à $R(x)$ en général, qui en diffère seulement pour les multiples impairs d'un demi, pour lesquels $R^*(x)$ s'annule. On a, quel que soit x :

$$R^*(x)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}. \tag{8}$$

Le signe de la fonction $R^*(x)$ et la valeur absolue de $R(x)$ donnent naissance aux séries suivantes :

$$\operatorname{sgn} R^*(x)=4\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(4\nu+2)x\pi}{(2\nu+1)\pi}, \tag{9}$$

$$|R(x)|=\frac{1}{4}-2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\cos(4\nu+2)x\pi}{(2\nu+1)^2\pi^2}. \tag{10}$$

En représentant par D un discriminant fondamental positif, et par m un entier positif arbitraire, on trouve aisément les formules suivantes, si l'on fait usage des relations

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\cos\frac{2hn\pi}{D}=\left(\frac{D}{n}\right)\sqrt{D},\qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\sin\frac{2hn\pi}{D}=0,$$

et puis

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h=0,\qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)=0:$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)E^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right)=\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},\tag{11}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)R^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right)=-\left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},\tag{12}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\operatorname{sgn}R^{*}\left(x+\frac{mh}{D}\right)=\left(\frac{D}{m}\right)4\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},\tag{13}$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(x+\frac{mh}{D}\right)\right|=-\left(\frac{D}{m}\right)2\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda^{2}\pi^{2}},\tag{14}$$

où $\lambda=1,3,5,7,\ldots$

En désignant par $-\Delta$ un discriminant fondamental négatif, on peut opérer d'une manière analogue; on n'aura qu'à se servir des relations connues

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sin\frac{2nh\pi}{\Delta}=\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\sqrt{\Delta},\qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cos\frac{2nh\pi}{\Delta}=0,$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}=-\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

on trouve de la sorte les relations suivantes, où m désigne un entier positif :

$$(15)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{E}^*\left(x+\frac{hm}{\Delta}\right)=-\frac{2m}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)+\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(16)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{R}^*\left(x+\frac{hm}{\Delta}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(17)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{sgn}\mathrm{R}^*\left(x+\frac{hm}{\Delta}\right)=\left(\frac{-\Delta}{m}\right)4\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\cos 2\lambda x\pi}{\lambda\pi},$$

$$(18)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|\mathrm{R}\left(x+\frac{hm}{\Delta}\right)\right|=\left(\frac{-\Delta}{m}\right)2\sqrt{\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\sin 2\lambda x\pi}{\lambda^2\pi^2}$$

$(\lambda=1, 3, 5, 7, \ldots)$.

La première de ces formules contient le nombre des classes directement, les autres (à l'exception de la dernière) pourront fournir différentes représentations de ce nombre, en choisissant pour x une valeur convenable. La première formule donne, pour $x=0$:

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{E}^*\left(\frac{hm}{\Delta}\right)=-\frac{2m}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)+\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

ou bien, en observant que $\frac{hm}{\Delta}$ ne peut devenir entier pour h premier avec Δ que si $\frac{m}{\Delta}$ est un entier :

$$(19)\qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{E}\left(\frac{hm}{\Delta}\right)=-\left(m-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\right)\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Si, dans l'équation (15), $0\leqq x<\frac{1}{\Delta}$, $m=1$, le premier membre s'annule et il vient, en posant $x=\frac{u}{\Delta}$:

$$(20)\qquad \frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu u\pi}{\Delta}}{\nu\pi},\qquad (0\leqq u<1).$$

Cette équation généralise la formule de Dirichlet

$$\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu\pi};$$

mais celle-ci subsiste pour tous les discriminants, tandis que la formule (20) a été démontrée pour des discriminants fondamentaux seulement.

Nous allons donc chercher la valeur de la série

$$S=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

pour $\Delta=\Delta_0 Q^2$, où $-\Delta_0$ est un discriminant fondamental. La formule (5) donne :

$$S=\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{d\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{d\nu},$$

d parcourant les diviseurs de Q; donc il vient :

$$S=\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{1}{d}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\frac{\cos 2d\nu x\pi}{\nu},$$

ou, en faisant usage de (15) dans le cas de $m=1$:

$$\frac{\sqrt{\Delta_0}}{\pi}S=\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{1}{d}\left[\frac{2}{\tau_0}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_0)+\sum_{h=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\mathrm{E}^*\left(dx+\frac{h}{\Delta_0}\right)\right].$$

En remarquant que la quantité

$$\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{1}{d}\cdot\frac{2}{\tau_0}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_0)=\prod\left(1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{2}{\tau_0}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_0)$$

(où q parcourt les facteurs premiers différents du nombre Q) n'est autre chose que

$$\frac{1}{Q}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_0 Q^2)=\frac{1}{Q}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

nous aurons :

$$(21)\qquad \sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$
$$=\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)+\mathrm{Q}\sum_{d}\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\frac{\mu(d)}{d}\sum_{h=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{h}\right)\mathrm{E}^*\left(dx+\frac{h}{\Delta_0}\right),$$

où d parcourt les diviseurs de Q; $\Delta=\Delta_0 Q^2$. Nous avons ajouté le facteur $\frac{2}{\tau}$ qui pour $Q>1$ est égal à 1, pour conserver la généralité de la formule. Si donc x est tel que tous les produits dx qui donnent $\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\mu(d)\gtrless 0$ restent plus petits que $\frac{1}{\Delta_0}$, la seconde partie du deuxième membre sera identiquement zéro. Dans ce but représentons par Q′ le produit des facteurs premiers différents de Q qui sont premiers avec Δ_0; il faudra prendre $x<\frac{1}{Q'\Delta_0}$.

La quantité $u=\Delta x$ sera inférieure à $\frac{Q^2}{Q'}$, et, par conséquent,

« La formule (20) a lieu aussi pour les discriminants quelconques « $-\Delta_0 Q^2$, et cela pour les valeurs de u satisfaisant à la condition

$$0\leqq u<\frac{Q^2}{Q'},$$

« Q′ étant le produit des facteurs premiers différents du nombre Q « lesquels sont premiers avec Δ_0. »

3. Nous allons transformer les premiers membres des relations (11) et (15) pour obtenir des formules plus commodes dans les applications; nous supposons $m=1$.

Transformons d'abord les expressions

$$\mathrm{A}=\sum_{1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{\mathrm{D}}\right),\qquad \mathrm{B}=\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right),$$

qu'on peut réunir dans une seule

$$\mathrm{A}^*=\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)\mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right),\qquad (\mathrm{D}\gtrless 0,\quad \Delta=|\mathrm{D}|).$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Lorsque $\frac{k}{\Delta} \leqq x < \frac{k+1}{\Delta}$, k étant entier, on aura :

$$\mathrm{E}\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha}{\Delta}\right),$$

et on peut se borner au cas où $x = \frac{k}{\Delta}$; posons donc :

$$\mathrm{A}_k^* = \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right) \mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha}{\Delta}\right);$$

on en déduit :

$$\mathrm{A}_k^* - \mathrm{A}_{k-1}^* = \sum_{\alpha=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right) \left\{ \mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha}{\Delta}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha-1}{\Delta}\right) \right\}.$$

Dans cette somme, une des différences

$$\mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha}{\Delta}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{k+\alpha-1}{\Delta}\right)$$

est différente de zéro et aura pour valeur l'unité; c'est celle où $\alpha = \Delta - k$.

On a donc :

$$\mathrm{A}_k^* - \mathrm{A}_{k-1}^* = \left(\frac{\mathrm{D}}{\Delta - k}\right),$$

puis, d'après la définition,

$$\mathrm{A}_0^* = 0;$$

il s'ensuit :

$$\mathrm{A}_k^* = \sum_{\nu=1}^{k} \left(\frac{\mathrm{D}}{\Delta - \nu}\right)$$

ou bien, en séparant les deux cas et en substituant la valeur $k = [\Delta x]$:

$$\mathrm{A} = \sum_{\nu=1}^{[\mathrm{D}x]} \left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right), \qquad \mathrm{B} = -\sum_{\nu=1}^{[\Delta x]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

Pour évaluer les deux sommes

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right),$$

observons que la quantité

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)$$

coïncide avec la quantité

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right)E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right),$$

à l'exception du cas où $x+\frac{\alpha}{\Delta}$ est un entier. Dans un tel cas, il faut que Δx soit un entier et que l'on ait :

$$\Delta x \equiv -\alpha \pmod{\Delta};$$

dans ce cas, on aura :

$$\left(\frac{D}{\alpha}\right)=\left(\frac{D}{\Delta-\Delta x}\right),$$

en supposant $0<x<1$. Nous convenons de prendre

$$\left(\frac{D}{y}\right)=0$$

toutes les fois que y n'est pas entier, et nous aurons alors la formule

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)=\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{D}{\Delta-\Delta x}\right).$$

En séparant les deux cas, il vient donc :

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{D}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{D}{Dx}\right)=\sum_{1}^{[Dx]}\left(\frac{D}{\nu}\right),$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right)=-\sum_{1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (11) et (15), nous aurons les équations

$$(22)\qquad \sum_{\alpha=1}^{[\mathrm{D}x]}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}x}\right)=\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$(23)\qquad \sum_{\alpha=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right)=\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)-\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

Nous poserons maintenant, quelle que soit la quantité positive x :

$$(24)\qquad \mathrm{S}(x,\mathrm{D})=\sum_{\alpha=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{D}}{\Delta x}\right),\qquad (\mathrm{D}\gtrless 0,\quad \Delta=|\mathrm{D}|),$$

D étant naturellement un discriminant fondamental; nous aurons alors la formule

$$(24^0)\qquad \mathrm{S}(x\ \ \mathrm{D})=\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

pour

$$\mathrm{D}>0,$$

$$(24')\qquad \mathrm{S}(x,\ -\Delta)=\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)-\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}$$

pour

$$\mathrm{D}=-\Delta<0;$$

car la définition (24) fait voir immédiatement qu'on a, pour $x>0$,

$$\mathrm{S}(x+1)=\mathrm{S}(x);$$

cette équation subsiste même pour $x<0$, mais dans ce cas la définition (24) perd toute signification.

4. De ces formules (24^0) et $(24')$ on conclut les deux suivantes :

$$\int_0^1 S^2(x, D)\,dx = \frac{D}{2}\sum_1^\infty \left(\frac{D}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\nu^2\pi^2},$$

$$\int_0^1 S^2(x, -\Delta)\,dx = \frac{4}{\pi^2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)^2 + \frac{\Delta}{2}\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\nu^2\pi^2};$$

or, en représentant par ϖ les facteurs premiers différents du nombre Δ, on a

$$\sum_1^\infty \left(\frac{\Delta}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\nu^2} = \prod_\varpi \left(1 - \frac{1}{\varpi^2}\right)\cdot \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2},$$

ou, en substituant la valeur

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\nu^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$(a)\qquad \sum_1^\infty \left(\frac{\Delta}{\nu}\right)^2 \frac{1}{\nu^2\pi^2} = \frac{1}{6}\prod_\varpi \left(1 - \frac{1}{\varpi^2}\right).$$

Évaluons maintenant l'intégrale

$$\int_0^1 S^2(x, D)\,dx;$$

on peut négliger le terme

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{D}{\Delta x}\right)$$

dans la formule (24), puisqu'il ne fournit que zéro dans l'intégration; puis l'intégrale pouvant se décomposer comme il suit :

$$\sum_{h=0}^{\Delta-1} \int_{\frac{h}{\Delta}}^{\frac{h+1}{\Delta}} S(x)^2\,dx,$$

on n'a qu'à se rappeler que pour $\frac{h}{\Delta} \leqq x < \frac{h+1}{\Delta}$ la fonction $S(x)$ est constante et égale à

$$\sum_1^h \left(\frac{D}{\alpha}\right),$$

cette expression devant être remplacée par zéro pour $h = 0$; l'intégrale sera donc égale à la quantité

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{\alpha=1}^{h} \left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^2$$

En substituant cette valeur de l'intégrale dans les formules obtenues plus haut et en se servant de la formule (a), on aura les relations suivantes :

$$(25) \qquad \frac{4}{\tau^2} \mathrm{Cl}(-\Delta)^2 = \frac{1}{\Delta} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left[\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\right]^2 - \frac{1}{12} \Delta \cdot \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{1}{\varpi^2}\right),$$

$$(26) \qquad \sum_{\nu=1}^{D-1} \left[\sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(\frac{D}{\alpha}\right)\right]^2 = \frac{1}{12} D^2 \cdot \prod_{\varpi} \left(1 - \frac{1}{\varpi^3}\right),$$

ϖ parcourant les différents facteurs premiers du nombre Δ, respectivement D.

Si Δ est premier plus grand que trois, on a $\tau = 2$ et le nombre $\mathrm{Cl}(-\Delta) = \mathrm{H}$ sera impair; l'équation (25) donne alors :

$$(\alpha) \qquad 3 \sum_1^{\Delta-1} s_\nu^2 = 3\,\mathrm{H}^2 \Delta + \frac{\Delta^2 - 1}{4},$$

en posant, pour abréger,

$$s_\nu = \sum_1^{\nu} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right).$$

Pour le module 8, on a :

$$s_\nu^2 \equiv 1, \quad 4, \quad 0$$

selon que s_ν est impair, double d'un nombre impair ou divisible par 4. Les s_ν impairs sont évidemment les suivants : s_1, s_3, s_5, ..., $s_{\Delta-2}$; leur nombre étant $\frac{\Delta-1}{2}$, le premier membre sera congru, suivant le module 8, à l'expression

$$3\frac{\Delta-1}{2}+4\,\mathrm{N},$$

en désignant par N le nombre des s_ν impairement pairs. Le second membre étant congru à

$$3\Delta+\frac{\Delta^2-1}{4},$$

on aura :

$$4\mathrm{N}\equiv\left(3\Delta+\frac{\Delta^2-1}{4}\right)-3\frac{\Delta-1}{2}\quad(\mathrm{mod.}\ 8),$$

d'où il suit, en faisant $\Delta=4n-1$:

$$\mathrm{N}\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Le nombre des valeurs s_ν impairement paires est donc nécessairement pair, si Δ est un nombre premier $4n-1$.

En étudiant les deux membres de (α) pour le module 16, on trouve la congruence suivante :

$$(27)\qquad \sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{2}{s_\nu}\right)-\mathrm{N}\equiv n(n-1)-\left(\frac{2}{\mathrm{H}}\right)\quad(\mathrm{mod.}\ 4)$$

$\big(\Delta=4n-1$ un nombre premier, $\mathrm{H}=\mathrm{Cl}(-\Delta)\big)$.

En opérant d'une manière analogue sur (26) pour

$$\mathrm{D}=4n+1\ \text{premier},$$

on trouve, en posant

$$\sum_1^{\nu}\left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right)=s_\nu,$$

la congruence

$$(28)\qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{2}{s_\nu}\right)-N\equiv n(n+1)\pmod{4}.$$

En observant que l'on a

$$s_{\frac{\Delta-1}{2}+\mu}=-s_{\frac{\Delta-1}{2}-\mu}\operatorname{sgn}D,$$

on trouve aisément que les deux théorèmes (27) et (28) reviennent à la congruence

$$N\equiv 2E\left(\frac{\Delta+1}{8}\right)\pmod{4}.$$

5. Des équations (24^0) et ($24'$) on tire les propriétés suivantes des fonctions $S(x)$:

$$(29)\quad \begin{cases} S(x, D)=-S(1-x, D) & \text{pour}\quad D>0, \\ S(x, -\Delta)=+S(1-x, -\Delta) & \text{pour}\quad D=-\Delta<0. \end{cases}$$

En désignant par m un entier positif, on tire des mêmes équations

$$(30)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} S\left(\frac{x+\alpha}{m}, D\right)=\left(\frac{D}{m}\right)S(x, D)\quad \text{pour}\quad D>0,$$

$$(31)\quad \sum_{\alpha=0}^{m-1} S\left(\frac{x+\alpha}{m}, -\Delta\right)=2\,\frac{m-\left(\frac{-\Delta}{m}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta)+\left(\frac{-\Delta}{m}\right)S(x, -\Delta);$$

le calcul, immédiat et élémentaire, n'emploie que cette circonstance que les sommes

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1}\cos\left(z+\frac{2n\alpha}{m}\right)\pi,\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1}\sin\left(z+\frac{2n\alpha}{m}\right)\pi$$

sont nulles pour n non divisible par m.

Si D et $-\Delta$ désignent toujours des discriminants fondamentaux, on trouve, au moyen des séries (24^0), et $(24')$ les formules suivantes, dans lesquelles r signifie un entier positif arbitraire :

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)S\left(x+\frac{rh}{\Delta}, D\right)=\left(\frac{-\Delta}{r}\right)\sqrt{\Delta D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta D}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi},$$

$$\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)S\left(x+\frac{rh}{D}, -\Delta\right)=-\left(\frac{D}{r}\right)\sqrt{\Delta D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta D}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu\pi}.$$

En particulier, on en tire, pour $x=0$, $r=1$:

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)S\left(\frac{h}{\Delta}, D\right)=\mathrm{Cl}(-\Delta D),\\ &\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)S\left(\frac{h}{D}, -\Delta\right)=-\mathrm{Cl}(-\Delta D).\end{aligned}\right.$$

Les termes de ces suites étant égaux deux à deux, on peut les écrire :

$$(32^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{[\frac{1}{2}\Delta]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)S\left(\frac{h}{\Delta}, D\right)=\tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta D),\\ &\sum_{1}^{[\frac{1}{2}D]}\left(\frac{D}{h}\right)S\left(\frac{h}{D}, -\Delta\right)=-\tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta D);\end{aligned}\right.$$

ces formules deviennent identiques avec les formules (17) et (18) du chapitre I, si l'on remarque que l'on a identiquement

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\frac{hD}{\Delta}}\right)\cdot\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=0,\qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{-\Delta}{\frac{h\Delta}{D}}\right)\left(\frac{D}{h}\right)=0;$$

car pour h premier avec Δ la fraction $\frac{hD}{\Delta}$ n'est jamais entière, à

IMPRIMERIE NATIONALE.

l'exception du cas où D est un multiple de Δ; mais dans ce cas le signe $\left(\frac{D}{\frac{hD}{\Delta}}\right)$ sera $\left(\frac{D}{k}\right) = 0$, $k = \frac{hD}{\Delta}$ n'étant pas premier avec D.

Si, de plus, D et Δ sont premiers entre eux, la série qu'on vient de rencontrer peut être sommée par la formule (24') et on trouve ces deux relations :

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) S\left(x+\frac{rh}{\Delta}, D\right) = \left(\frac{-\Delta}{r}\right)[\mathrm{Cl}(-\Delta D) - S(x, -\Delta D)],\\ &\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right) S\left(x+\frac{rh}{D}, -\Delta\right) = -\left(\frac{D}{r}\right)[\mathrm{Cl}(-\Delta D) - S(x, -\Delta D)] \end{aligned}\right.$$

($D > 0$, $-\Delta < 0$ deux discriminants fondamentaux premiers entre eux; r un entier positif quelconque).

La formule (31) donne, pour $m = 2$, $x = 0$:

$$S(0) + S\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) + \left(\frac{2}{\Delta}\right) S(0),$$

et puisque $S(0) = 0$, on a ce résultat connu :

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2\,\frac{2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

En posant dans les formules (33) $x = \frac{1}{2}$, on aura par conséquent :

$$\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right) S\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{\Delta}, D\right) = -\left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta D),$$

$$\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right) S\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{D}, -\Delta\right) = \left(1 - \left(\frac{2}{\Delta D}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta D).$$

Pendant que $h < \frac{\Delta}{2}$ ou $h < \frac{D}{2}$, on a respectivement, d'après (29) :

$$S\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{\Delta}\right) = -S\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{\Delta}\right), \qquad S\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{D}\right) = S\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{D}\right);$$

pour les autres valeurs de h, posons $h = \Delta - k$, resp. $\mathrm{D} - k$; les quantités

$$\mathrm{S}\left(\frac{3}{2} - \frac{k}{\Delta}\right)$$

se réduiront à $\mathrm{S}\left(\frac{1}{2} - \frac{k}{\Delta}\right)$, et, en somme, il s'ensuit :

$$(34)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \mathrm{S}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{\Delta}, \mathrm{D}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta\mathrm{D}}\right)}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}), \\ \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \mathrm{S}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{\mathrm{D}}, -\Delta\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta\mathrm{D}}\right)}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}) \end{cases}$$

($-\Delta$ et D étant des discriminants fondamentaux premiers entre eux).

Ces équations peuvent s'écrire :

$$(34^*)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{\alpha=1}^{\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{\Delta}\right)\mathrm{D}} \left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta\mathrm{D}}\right)}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}), \\ \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \sum_{\alpha=1}^{\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{\mathrm{D}}\right)\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{1 - \left(\frac{2}{\Delta\mathrm{D}}\right)}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}). \end{cases}$$

Mettons ici encore une fois les formules toutes semblables (32^*)

$$(32^a)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \sum_{1}^{\left[\frac{h\mathrm{D}}{\Delta}\right]} \left(\frac{\mathrm{D}}{\alpha}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}), \\ \displaystyle\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]} \left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) \sum_{1}^{\left[\frac{h\Delta}{\mathrm{D}}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}), \end{cases}$$

qui ont cependant lieu sous des hypothèses plus générales.

En y prenant $\Delta = 3, 4, 7, 8$, on trouve pour les deux premiers cas immédiatement

$$(35) \qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-3D), \qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{4}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-4D),$$

puis

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{3}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-7D),$$

ou, en réduisant,

$$(36) \qquad \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\nu=\left[\frac{2}{7}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{7}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-7D).$$

Pour $\Delta = 8$, on a d'abord

$$\sum_{1}^{\frac{1}{8}D} \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\frac{3}{8}D} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8D),$$

et, en soustrayant l'expression

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}D} \left(\frac{D}{\nu}\right) = 0,$$

$$(37) \qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8D).$$

En retranchant les deux formules (35), il vient :

$$(38) \qquad \sum \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{\mathrm{Cl}(-3D) - \mathrm{Cl}(-4D)}{2}, \qquad \left(\frac{1}{4}D < \nu < \frac{1}{3}D\right).$$

Posons $D = 4\Delta$, $-\Delta$ étant un discriminant fondamental impair; le second membre

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-4^2\cdot\Delta)$$

peut s'écrire :

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) - \left(2 - \left(\tfrac{2}{\Delta}\right)\right)\tfrac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

d'où l'on a :

$$(38^a) \qquad \sum_{\Delta+1}^{\left[\frac{4}{3}\Delta\right]} \left(\frac{4\Delta}{\nu}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) - 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Le nombre des termes à calculer est environ $\frac{1}{6}\Delta$; posons maintenant $D = 3\Delta$, Δ ne contenant pas le facteur trois; il vient :

$$(38^b) \qquad \sum_{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]+1}^{\Delta-1} \left(\frac{3\Delta}{\nu}\right) = \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta).$$

En posant dans la formule (38^a) $\nu = \Delta + 2\mu$, puisque les ν sont impairs, il vient :

$$\left(\frac{4\Delta}{\nu}\right) = (-1)^{\frac{\Delta-1}{2}+\mu}\left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right) = -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\cdot(-1)^{\mu}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right),$$

d'où :

$$(38^c) \quad -\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\mu=1}^{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]} (-1)^{\mu}\left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) - 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Posons maintenant, dans la seconde des formules (32^a), successivement $D = 5, 8, 12$.

Nous aurons :

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta),$$

ou bien, en réduisant,

$$(39) \qquad \sum_{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta);$$

on a d'une manière analogue

$$(40) \qquad \sum_{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta),$$

$$(41) \qquad \sum_{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta).$$

En en retranchant l'expression

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

on trouve :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) - 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau.}\,\mathrm{Cl}(\quad\Delta) = -\sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{5\Delta}{12}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right).$$

Cette expression doit donc coïncider avec (38^c) dans le cas où Δ est impair; or on a :

$$\sum (-1)^{\mu} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\left[\frac{\Delta}{12}\right]} \left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right) - \sum_{\lambda<\frac{\Delta}{6}} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right);$$

il s'ensuit l'équation, pour Δ impair,

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right) \sum \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = -\sum_{\left[\frac{5\Delta}{12}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \quad \left(\lambda = 1, 3, 5, \ldots; \ \lambda < \frac{\Delta}{6}\right).$$

ce qui a lieu en faisant $\lambda = \Delta - 2\mu$; la forme (38^c) est plus commode.

Posons maintenant, dans la première des équations (34^*), $\Delta = 3$ et $\Delta = 7$; il vient :

$$(42)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{6}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-3D) \quad .$$

équation qui a lieu aussi pour D multiple de 3, comme nous le verrons plus tard,

$$\sum_{1}^{\left[\frac{5D}{14}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\left[\frac{3D}{14}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{1}^{\left[\frac{D}{14}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-7D),$$

d'où, en réduisant et retranchant la somme nulle,

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right),$$

$$(43)\qquad \sum_{\left[\frac{D}{14}\right]+1}^{\left[\frac{3D}{14}\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{5D}{14}\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-7D),$$

D étant premier avec 7.

La seconde formule (34^*) donne pour $D = 5$:

$$(44)\qquad \sum_{\left[\frac{\Delta}{10}\right]+1}^{\left[\frac{3\Delta}{10}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta),$$

(Δ premier avec 5).

En retranchant avec (39), il vient :

$$\sum_{\left[\frac{\Delta}{10}\right]+1}^{\left[\frac{\Delta}{5}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3\Delta}{10}\right]+1}^{\left[\frac{2\Delta}{5}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) \tag{45}$$

(Δ premier avec 5).

6. D'autres résultats découlent en combinant les équations (29)-(31) pour les premières valeurs de m. Posons $m=3$, $x=0$, il vient, en écrivant $S(x)$ au lieu de $S(x, -\Delta)$:

$$S\left(\frac{1}{3}\right) + S\left(\frac{2}{3}\right) = 2\,\frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

ou bien, puisque $S\left(\frac{2}{3}\right) = S\left(\frac{1}{3}\right)$,

$$S\left(\frac{1}{3}, -\Delta\right) = \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \tag{46}$$

de sorte qu'en supposant $\Delta > 3$:

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{\Delta}{3}\right]} \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = \frac{3-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta). \tag{46*}$$

Pour $m=4$, on a :

$$S\left(\frac{1}{4}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{3}{4}\right) = 2\,\frac{4-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et puisque

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \qquad S\left(\frac{3}{4}\right) = S\left(\frac{1}{4}\right),$$

il vient :

$$S\left(\frac{1}{4}, -\Delta\right) = \frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \tag{47}$$

ou bien, pour $\Delta \gtrless 4$

$$(47^*) \qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{2 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

La substitution de $m = 6$ fournit d'abord :

$$S\left(\frac{1}{6}\right) + S\left(\frac{1}{3}\right) + S\left(\frac{1}{2}\right) + S\left(\frac{2}{3}\right) + S\left(\frac{5}{6}\right) = 2\,\frac{6 - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et en faisant usage des relations

$$S\left(\frac{1}{3}\right) + S\left(\frac{2}{3}\right) = 2\,\frac{3 - \left(\frac{-\Delta}{3}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 2\,\frac{2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

il vient :

$$S\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1 + \left(\frac{-\Delta}{2}\right) + \left(\frac{-\Delta}{3}\right) - \left(\frac{-\Delta}{6}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

ou bien :

$$(48) \qquad S\left(\frac{1}{6}, -\Delta\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{-3}{\Delta}\right) + \left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et sous la forme explicite :

$$(48^*) \qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1 + \left(\frac{2}{\Delta}\right) - \left(\frac{-3}{\Delta}\right) + \left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Supposons Δ impair, multiplions par $\left(\frac{2}{\Delta}\right)$ et retranchons membre à membre de l'équation (38^c); il vient :

$$-\left(\frac{2}{\Delta}\right) \cdot 2 \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right) = \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-12\Delta) - \frac{5 - \left(\frac{2}{\Delta}\right) + \left(\frac{-3}{\Delta}\right) - \left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

ou bien :

$$(49)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) + \frac{5-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

formule qui suppose Δ impair, et que nous vérifierons sous l'hypothèse plus générale.

Prenant $m=5$, nous aurons :

$$(a)\qquad S\left(\tfrac{1}{5}\right)+S\left(\tfrac{2}{5}\right) = \frac{5-\left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et l'équation (32*) pour $D=5$, qui a déjà été utilisée, d'ailleurs, donne :

$$S\left(\tfrac{1}{5}\right)-S\left(\tfrac{2}{5}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta);$$

par conséquent

$$S\left(\tfrac{1}{5}\right) = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) + \frac{5-\left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

d'où

$$(50)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) + \frac{5-\left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

L'équation (a) peut s'écrire :

$$\sum_{1}^{\frac{1}{5}\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) + \sum_{1}^{\frac{2}{5}\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{5-\left(\frac{-\Delta}{5}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

d'où, en retranchant l'expression

$$\sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{2}{\tau}\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

il vient

$$(51)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\sum_{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\frac{1-\left(\frac{5}{\Delta}\right)+2\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et en comparant avec (50) :

$$(51^a)\qquad \sum_{\left[\frac{2}{5}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=-\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-5\Delta)+\frac{3+\left(\frac{5}{\Delta}\right)-4\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

En retranchant les équations (48*) et (50), il vient :

$$(52)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{5}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=-\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-5\Delta)$$
$$+\frac{3-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)+2\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{5}{\Delta}\right)-2\left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Le nombre des termes est environ $\frac{\Delta}{30}\cdot$ Posant $\Delta=5\Delta_1$, de sorte que Δ_1 est premier avec 5, on aura $\tau=2$ et puis

$$\mathrm{Cl}(-5\Delta)=\mathrm{Cl}(-5^2\Delta_1)=2\,\frac{5-\left(\frac{5}{\Delta_1}\right)}{\tau_1}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_1),$$

et la formule devient :

$$\sum_{\left[\frac{5}{6}\Delta_1\right]+1}^{\Delta_1-1}\left(\frac{-5\Delta_1}{\nu}\right)=-\frac{5-\left(\frac{5}{\Delta_1}\right)}{2\tau_1}\,\mathrm{Cl}(-\Delta_1)$$
$$+\frac{3+2\left(\frac{2}{\Delta_1}\right)-2\left(\frac{-3}{\Delta_1}\right)-2\left(\frac{-6}{\Delta_1}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta_1);$$

les formules qu'on obtient par ce dernier procédé sont peu avantageuses.

En retranchant les formules (46*) et (47*), on aura :

$$(53)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1-\left(\frac{-\Delta}{3}\right)-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

le nombre des termes étant à peu près $\frac{\Delta}{12}$; on trouve, en opérant de la même manière sur (47*) et (48*) :

$$(54)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)-\left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

On trouve de la même manière les relations

$$(b)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{1}{8}\right)+\mathrm{S}\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(c)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{1}{10}\right)+\mathrm{S}\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{3+\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{5}{\Delta}\right)-\left(\frac{10}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(d)\qquad \mathrm{S}\left(\frac{1}{12}\right)+\mathrm{S}\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)+\left(\frac{-\Delta}{6}\right)-\left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

En retranchant la première de la troisième, on trouve :

$$(55)\qquad \sum_{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{6}\right)\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

où le nombre des termes est aussi environ $\frac{\Delta}{12}$.

Soit maintenant $m=2n$, puis $m=2n+1$; on a les équations :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S\left(\frac{k}{2n}\right)+\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-\left(\frac{-\Delta}{2n}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} S\left(\frac{k}{2n+1}\right)+S\left(\frac{n}{2n+1}\right)=\frac{2n+1-\left(\frac{-\Delta}{2n+1}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

ajoutant à la première l'expression

$$\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

retranchons-les membre à membre, il vient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{S\left(\frac{k}{2n}\right)-S\left(\frac{k}{2n+1}\right)\right\}=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{2n}\right)+\left(\frac{-\Delta}{2n+1}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

En substituant la valeur

$$S(x)=\sum_{1}^{[\Delta x]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right),$$

on aura par conséquent la formule suivante :

$$(56)\qquad \sum_{k=1}^{n}\ \sum_{\nu=\left[\frac{k\Delta}{2n+1}\right]+1}^{\left[\frac{k\Delta}{2n}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{-\Delta}{\frac{k\Delta}{2n}}\right)-\left(\frac{-\Delta}{\frac{k\Delta}{2n+1}}\right)\right\}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{-\Delta}{2n}\right)+\left(\frac{-\Delta}{2n+1}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Si Δ est premier avec $2n$ et $2n+1$, la deuxième somme disparaîtra; le nombre des termes est environ

$$\frac{(n+1)\Delta}{4(2n+1)}.$$

La méthode est aussi trop immédiate pour qu'elle puisse être bonne; il faut chercher des combinaisons spéciales des valeurs de m.

En combinant les formules (b) et (d) avec les suivantes qui sont des cas particuliers de (32^*),

$$S\left(\frac{1}{8}\right) - S\left(\frac{3}{8}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta),$$

$$S\left(\frac{1}{12}\right) - S\left(\frac{5}{12}\right) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta),$$

nous aurons :

$$(57)\quad S\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta) + \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(58)\quad S\left(\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) + \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)+\left(\frac{-\Delta}{6}\right)-\left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

d'où, en supposant $\Delta \gtrless 8$,

$$(57^*)\quad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta) + \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(58^*)\quad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-12\Delta) + \frac{4-\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{4}{\Delta}\right)+\left(\frac{-\Delta}{6}\right)-\left(\frac{-\Delta}{12}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

Cette dernière équation devient identique avec (49) en supposant Δ impair.

La deuxième équation (34), pour $D = 5$, devient :

$$S\left(\frac{3}{10}\right) - S\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta),$$

Δ étant supposé premier avec 5 ; en retranchant de l'équation (b) membre à membre, nous aurons :

$$S\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) + \frac{3+\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{5}{\Delta}\right)-\left(\frac{10}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

ou bien

$$(59)\quad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{10}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) + \frac{3+\left(\frac{2}{\Delta}\right)+\left(\frac{5}{\Delta}\right)-\left(\frac{10}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

Δ étant premier avec 5.

Pour $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = -1$, $\left(\frac{5}{\Delta}\right) = -1$, on aura par conséquent :

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{10}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = 0;$$

cela a lieu pour $\Delta = 40l + 3$, ou $40l + 27$.

7. Pour les discriminants positifs fondamentaux D nous avons les formules :

$$(a)\qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} \mathrm{S}\left(x + \frac{\alpha}{m}, \mathrm{D}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right) \mathrm{S}(mx, \mathrm{D}),$$

$$(b)\qquad \mathrm{S}(1-x, \mathrm{D}) = -\mathrm{S}(x, \mathrm{D});$$

nous avons trouvé :

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{3}, \mathrm{D}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-3\mathrm{D}).$$

En prenant, dans l'équation (a), $x = \frac{1}{3}$, $m = 2$, il vient :

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{3}\right) + \mathrm{S}\left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right) \mathrm{S}\left(\frac{2}{3}\right);$$

donc

$$\mathrm{S}\left(\frac{1}{6}, \mathrm{D}\right) = \left(1 + \left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)\right) \mathrm{S}\left(\frac{1}{3}, \mathrm{D}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-3\mathrm{D}),$$

ou bien

$$(42)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{6}\mathrm{D}\right]} \left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-3\mathrm{D});$$

en retranchant de la valeur de $S\left(\frac{1}{3}, D\right)$, il vient :

$$(42^a) \qquad \sum_{\left[\frac{1}{6}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{3}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{D}\right) \mathrm{Cl}(-3D).$$

Pour $m=2$, $x=\frac{1}{8}$, la formule (a) devient :

$$S\left(\frac{1}{8}\right)+S\left(\frac{5}{8}\right)=\left(\frac{2}{D}\right)S\left(\frac{1}{4}\right),$$

ou bien

$$S\left(\frac{1}{8}\right)-S\left(\frac{3}{8}\right)=\left(\frac{2}{D}\right)S\left(\frac{1}{4}\right);$$

or on a [(32*) et (35)]

$$S\left(\frac{1}{8}\right)+S\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8D),$$

$$S\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-4D),$$

et par conséquent :

$$S\left(\frac{1}{8}, D\right)=\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-8D)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{D}\right)\mathrm{Cl}(-4D),$$

d'où, pour $D \gtrless 8$,

$$(60) \qquad 4\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right)=\mathrm{Cl}(-8D)+\left(\frac{2}{D}\right)\mathrm{Cl}(-4D).$$

En prenant $m=2$, $x=\frac{1}{12}$, il vient :

$$(c) \qquad S\left(\frac{1}{12}\right)-S\left(\frac{5}{12}\right)=\left(\frac{2}{D}\right)S\left(\frac{1}{6}\right)$$

ou bien

$$(61) \qquad \sum_{\left[\frac{1}{12}D\right]+1}^{\left[\frac{5}{12}D\right]} \left(\frac{D}{\nu}\right)=-\left(\frac{2}{D}\right)\frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{2}\mathrm{Cl}(-3D).$$

Prenant dans l'équation (a) $x=\frac{1}{4}$, $m=3$, on aura :

$$S\left(\frac{1}{4}\right)-S\left(\frac{5}{12}\right)-S\left(\frac{1}{12}\right)=-\left(\frac{D}{3}\right)S\left(\frac{1}{4}\right);$$

donc

$$S\left(\frac{1}{12}\right)+S\left(\frac{5}{12}\right)=\left(1+\left(\frac{D}{3}\right)\right)S\left(\frac{1}{4}\right);$$

en remplaçant $S\left(\frac{1}{4}\right)$ par sa valeur et ajoutant avec (c), il vient :

$$(62)\qquad S\left(\frac{1}{12},\,D\right)=\left(\frac{2}{D}\right)\frac{1+\left(\frac{2}{D}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-3D)+\frac{\left(1+\left(\frac{D}{3}\right)\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-4D),$$

ou, en supposant $D \gtreqless 12$,

$$(62^*)\qquad \sum_{1}^{\left[\frac{1}{12}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{\left(\frac{2}{D}\right)+\left(\frac{4}{D}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-3D)+\frac{1+\left(\frac{D}{3}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-4D).$$

8. Je ne veux pas multiplier ces exercices sur les formules fondamentales $(29)-(34^*)$, dont on pourrait peut-être conclure encore d'autres résultats simples et utiles dans la pratique. Je veux seulement rappeler l'attention du lecteur sur les formules (32^a)

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{hD}{\Delta}\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D),\\ &\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{h\Delta}{D}\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta D),\end{aligned}\right.$$

qui peuvent rendre d'excellents services dans la pratique.

Dans ce but je me servirai de la seconde et j'écrirai

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=(x\;\ldots\;y),$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

si les conditions sommatoires sont $x \leqq \nu \leqq y$; la formule pourra alors s'écrire :

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta\mathrm{D}) = \left(1 \cdots \frac{\Delta}{\mathrm{D}}\right) + \left(\frac{\mathrm{D}}{2}\right)\left(1 \cdots \frac{2\Delta}{\mathrm{D}}\right) + \left(\frac{\mathrm{D}}{3}\right)\left(1 \cdots \frac{3\Delta}{\mathrm{D}}\right)$$
$$+ \cdots + \left(\frac{\mathrm{D}}{\left[\frac{\mathrm{D}}{2}\right]}\right)\left(1 \cdots \frac{\left[\frac{1}{2}\mathrm{D}\right]\Delta}{\mathrm{D}}\right).$$

Si $\mathrm{D} = 13$, cette formule devient

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-13\Delta) = \left(1 \cdots \frac{\Delta}{13}\right) - \left(1 \cdots \frac{2\Delta}{13}\right) + \left(1 \cdots \frac{3\Delta}{13}\right) + \left(1 \cdots \frac{4\Delta}{13}\right)$$
$$- \left(1 \cdots \frac{5\Delta}{13}\right) - \left(1 \cdots \frac{6\Delta}{13}\right);$$

en supprimant les parties communes de ces sommes qui se détruisent, que l'on trouve le plus rapidement en désignant les parenthèses successives par

$$a, \quad (a+b), \quad (a+b+c), \quad (a+b+c+d), \quad (a+b+c+d+e),$$
$$(a+b+c+d+e+f),$$

où

$$a = \left(1 \cdots \frac{\Delta}{13}\right), \quad b = \left(\frac{\Delta}{13} \cdots \frac{2\Delta}{13}\right), \quad c = \left(\frac{2\Delta}{13} \cdots \frac{3\Delta}{13}\right), \text{ etc.};$$

on aura le deuxième membre de notre formule sous la forme

$$a - (a+b) + (a+b+c) + (a+b+c+d) - (a+b+c+d+e)$$
$$- (a+b+c+d+e+f)$$
$$= -b - d - 2e - f,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-13\Delta) = \left(\frac{\Delta}{13} \cdots \frac{2\Delta}{13}\right) + \left(\frac{3\Delta}{13} \cdots \frac{4\Delta}{13}\right) + 2\left(\frac{4\Delta}{13} \cdots \frac{5\Delta}{13}\right) + \left(\frac{5\Delta}{13} \cdots \frac{6\Delta}{13}\right).$$

Si l'on veut calculer le nombre des classes pour le discriminant $-13.43=-559$, où $\Delta=43$, on devra déterminer les sommes

$$\left(\frac{\Delta}{13}\cdots\frac{2\Delta}{13}\right)=(4\cdots6)=1-1+1=1,$$
$$\left(\frac{3\Delta}{13}\cdots\frac{4\Delta}{13}\right)=(10\cdots13)=1+1-1+1=2,$$
$$\left(\frac{4\Delta}{13}\cdots\frac{5\Delta}{13}\right)=(14\cdots16)=1+1+1=3,$$
$$\left(\frac{5\Delta}{13}\cdots\frac{6\Delta}{13}\right)=(17\cdots19)=1-1-1=-1,$$

qui donnent

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-559)=1+2+2\cdot3-1=8,\quad \mathrm{Cl}(-559)=16,$$

ce qui se peut vérifier par la recherche des formes réduites qui sont :

$(1,\ 1,\ 140)$, $(2,\ \pm1,\ 70)$, $(4,\ \pm1,\ 35)$, $(5,\ \pm1,\ 28)$,
$(7,\ \pm1,\ 20)$, $(10,\ \pm1,\ 14)$, $(8,\ \pm7,\ 19)$, $(10,\ \pm9,\ 16)$.

Leur recherche est beaucoup plus laborieuse que l'emploi de notre formule qui n'exige que la détermination de treize symboles de Legendre.

Prenons comme second exemple $D=21$, $\Delta=59$, nous aurons à transformer la formule

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-21\cdot\Delta)=\left(1\cdots\frac{\Delta}{21}\right)-\left(1\cdots\frac{2\Delta}{21}\right)+\left(1\cdots\frac{4\Delta}{21}\right)+\left(1\cdots\frac{5\Delta}{21}\right)$$
$$-\left(1\cdots\frac{8\Delta}{21}\right)-\left(1\cdots\frac{10\Delta}{21}\right);$$

son deuxième membre est l'expression

$$a-(a+b)+(a+b+c)+(a+b+c+d)-(a+b+c+d+e)$$
$$-(a+b+c+d+e+f)$$
$$=-b-d-2e-f,$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-21\cdot\Delta)=\left(\frac{\Delta}{21}\cdots\frac{2\Delta}{21}\right)+\left(\frac{4\Delta}{21}\cdots\frac{5\Delta}{21}\right)+2\left(\frac{5\Delta}{21}\cdots\frac{8\Delta}{21}\right)$$
$$+\left(\frac{8\Delta}{21}\cdots\frac{10\Delta}{21}\right);$$

en substituant $\Delta=59$, le second membre sera

$$(3\ldots5)+(12\ldots14)+2(15\ldots22)+(23\ldots28);$$

on a vingt symboles $\left(\frac{-59}{\cdots}\right)$ à déterminer, et le résultat sera

$$\mathrm{Cl}(-1159)=24.$$

9. Les recherches analogues sur le nombre des classes d'un discriminant positif fournissent beaucoup moins de résultats de la même importance; cette circonstance est dans la nature des choses, puisque dans la théorie des discriminants négatifs, c'étaient les signes de Legendre que nous avions à sommer, tandis que dans la théorie des formes du discriminant positif, c'est partout une fonction transcendante $\log\sin x\pi$ qui fait l'élément de nos expressions.

Nous emploierons le développement trigonométrique

$$-\log|2\sin x\pi|=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu}$$

pour en tirer de la manière connue les identités

$$(63)\quad -\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\sin\pi\left(x+\frac{h}{D}\right)\right|=\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu},\quad (D>0),$$

$$(64)\quad +\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\sin\pi\left(x+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\sqrt{\Delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu}.$$

En posant pour abréger

$$(65)\quad L(x,D)=-\operatorname{sgn.}D.\sum_{h=1}^{|D|-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\sin\pi\left(x+\frac{h}{|D|}\right)\right|,\quad (D\gtrless 0),$$

on vérifie aisément les deux formules suivantes :

$$(66) \qquad \sum_{\alpha=0}^{m-1} L\left(x+\frac{\alpha}{m},\ D\right) = \left(\frac{D}{m}\right) L(mx,\ D), \quad (D \gtrless o),$$

m désignant un entier positif arbitraire, puis

$$(67) \quad \sum_{h=1}^{|D'|-1} \left(\frac{D'}{h}\right) L\left(\frac{h}{|D'|},\ D\right) = \begin{cases} Cl(DD')\log E(DD'), & \text{si } DD' > o, \\ o, & \text{si } DD' < o, \end{cases}$$

en désignant par D' un nouveau discriminant de signe quelconque.

La formule (66) donne pour $x = o$, $m = 2$:

$$L(o) + L\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{D}\right) L(o),$$

d'où

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\left(\frac{2}{D}\right) - 1\right) L(o);$$

or, en supposant D positif, on a :

$$L(o) = Cl(D) \log E(D),$$

puis

$$L\left(\frac{1}{2}\right) = -\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log\left|\cos\frac{h\pi}{D}\right|,$$

et notre résultat s'écrira

$$(68) \qquad \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log\left|\cos\frac{h\pi}{D}\right| = \left(1 - \left(\frac{2}{D}\right)\right) Cl(D) \log E(D),$$

D étant un discriminant fondamental positif.

Dans l'équation (67) je pose

$$D' = -\Delta < o, \quad D = -4;$$

j'aurai à déterminer la valeur de l'expression

$$\frac{\sin\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\sin\pi\left(x+\frac{3}{4}\right)},$$

qui est

$$\operatorname{tg}\pi\left(x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}x\pi}{1-\operatorname{tg}x\pi};$$

l'équation (67) devient alors

$$(69)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}{1-\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}}\right|=\mathrm{Cl}(4\Delta)\log\mathrm{E}(4\Delta),$$

où $-\Delta$ signifie un discriminant fondamental négatif.

Pour $\mathrm{D}=-8$ la fonction $\mathrm{L}(x)$ devient :

$$\mathrm{L}(x)=\log\left|\frac{\sin\pi\left(x+\frac{1}{8}\right)\sin\pi\left(x+\frac{3}{8}\right)}{\sin\pi\left(x-\frac{5}{8}\right)\sin\pi\left(x+\frac{7}{8}\right)}\right|$$

$$=\log\left|\frac{\operatorname{tg}\pi\left(x+\frac{1}{8}\right)}{\operatorname{tg}\pi\left(x-\frac{1}{8}\right)}\right|,$$

et la formule (67) donnera, par conséquent, en y faisant $\mathrm{D}'=-\Delta$:

$$(70)\qquad \sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\log\left|\frac{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{h}{\Delta}+\frac{1}{8}\right)}{\operatorname{tg}\pi\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{1}{8}\right)}\right|=\mathrm{Cl}(8\,\Delta)\log\mathrm{E}(8\,\Delta).$$

Si enfin $\mathrm{D}=8$, on trouve d'une manière analogue

$$\mathrm{L}(x)=-\log\left|\operatorname{tg}\pi\left(x+\frac{1}{8}\right)\operatorname{tg}\pi\left(x-\frac{1}{8}\right)\right|,$$

et par conséquent, en écrivant D au lieu de D′ :

$$(71)\quad -\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\operatorname{tg}\pi\left(\frac{h}{D}+\frac{1}{8}\right)\cdot\operatorname{tg}\pi\left(\frac{h}{D}-\frac{1}{8}\right)\right| = \mathrm{Cl}(8D)\log E(8D).$$

Il est clair que dans ces équations les termes sont égaux deux à deux, de sorte qu'on peut réduire à la moitié leur nombre.

Remarquons que l'on a :

$$L(x+1) = L(x),$$

et puis, comme cela résulte de (63) et (64),

$$L(1-x,\, D) = L(x,\, D), \qquad L(1-x,\, -\Delta) = -L(x,\, -\Delta);$$

cela étant, posons $x=0$, $m=3$ dans l'équation (66); nous aurons :

$$L(0)+L\left(\frac{1}{3}\right)+L\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{D}{3}\right)L(0),$$

d'où, pour $D>0$,

$$L\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1-\left(\frac{D}{3}\right)}{2}L(0),$$

ou bien

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\sin\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{h}{D}\right)\right| = \frac{1-\left(\frac{D}{3}\right)}{2}\mathrm{Cl}(D)\log E(D).$$

En rangeant en paires les termes h et $D-h$ et en observant que

$$2\sin\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{h}{D}\right)\sin\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{h}{D}\right) = \cos\frac{2h\pi}{D}+\frac{1}{2},$$

on trouve :

$$(72)\qquad \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}{}'\left(\frac{D}{h}\right)\log\left|\frac{1}{2}+\cos\frac{2h\pi}{D}\right| = \frac{1-\left(\frac{D}{3}\right)}{2}\mathrm{Cl}(D)\log E(D).$$

Si dans (67) on fait $D = -3$, $D' = -\Delta$, il vient :

$$(73) \qquad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(3\Delta)\log \mathrm{E}(3\Delta) = \sum_{h=1}^{[\frac{1}{2}\Delta]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} + \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} - \sqrt{3}} \right| .$$

Nous verrons, dans le chapitre III, comment on peut opérer la simplification pour un discriminant produit DD' quelconque.

10. Je veux développer maintenant deux détails d'importance toute secondaire, à savoir les valeurs des expressions fondamentales

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) h, \qquad \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \log \sin \frac{h\pi}{D}$$

dans le cas des discriminants non fondamentaux.

Considérons d'abord la somme suivante :

$$A = \sum_{\nu=1}^{k\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu,$$

k étant un entier; en posant $\nu = \rho + \mu\Delta$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \Delta$; $\mu = 0, 1, 2, \ldots, k-1$), cette somme devient :

$$A = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{k-1} (\rho + \mu\Delta) = k \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) \rho + \Delta \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) \sum_{1}^{k-1} \mu;$$

la dernière somme étant nulle, il reste :

$$A = k \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right) \rho,$$

de sorte qu'on a le lemme

$$(a) \qquad \sum_{1}^{k\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu = k \sum_{1}^{\Delta} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \nu.$$

Cela étant, considérons la quantité

$$B=\sum_{1}^{\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu \qquad \text{pour} \qquad \Delta=\Delta_0 Q^2;$$

en faisant usage du théorème (5), savoir :

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)f(\nu)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{\nu=1}^{\infty}f(\nu d).$$

la quantité B, qui s'écrit

$$B=\sum\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)\cdot\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\nu, \qquad \nu\leqq\Delta,$$

devient

$$B=\sum_{d}\mu(d)\sum_{\nu}\left(\frac{-\Delta_0}{d\nu}\right)d\nu, \qquad d\nu\leqq\Delta,$$

d parcourant les diviseurs de Q; ce résultat peut s'écrire :

$$B=\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)d\cdot\sum_{\nu=1}^{\Delta_0\frac{Q^2}{d}}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\nu;$$

la somme interne a, d'après le lemme (a), la valeur

$$\frac{Q^2}{d}\sum_{\nu=1}^{\Delta_0}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\nu,$$

et par conséquent

$$B=Q^2\sum_{d}\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)\cdot\sum_{\nu=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\nu;$$

or on a :

$$\sum\mu(d)\left(\frac{-\Delta_0}{d}\right)=\prod_{q}\left(1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right),$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

q parcourant les facteurs premiers différents du nombre Q; si $-\Delta_0$ est discriminant fondamental, on connaît la valeur de la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta_0-1}\left(\frac{-\Delta_0}{\nu}\right)\nu=-\frac{2}{\tau_0}\Delta_0\,\mathrm{Cl}(-\Delta_0),$$

et il s'ensuit :

$$(74)\qquad -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}=\frac{2}{\tau_0}\mathrm{Cl}(-\Delta_0)\cdot\prod_q\left(1-\left(\frac{-\Delta_0}{q}\right)\right)$$

($\Delta=\Delta_0 Q^2$; q parcourt les facteurs premiers différents du nombre Q).

La somme

$$C=\sum_1^{D_0Q^2}\left(\frac{D_0Q^2}{\nu}\right)\log\sin\frac{\nu\pi}{D_0Q^2}=\sum_1^{D_0Q^2}\left(\frac{D_0Q^2}{\nu}\right)\log\left(2\sin\frac{\nu\pi}{D_0Q^2}\right)$$

peut, en vertu de la formule (5), se transformer dans la suivante :

$$C=\sum_d\mu(d)\sum_{\nu=1}^{D_0\frac{Q^2}{d}}\left(\frac{D_0}{d\nu}\right)\log\left(2\sin\frac{d\nu\pi}{D_0Q^2}\right),$$

ou bien

$$C=\sum_d\mu(d)\left(\frac{D_0}{d}\right)\sum_{\nu=1}^{D_0\frac{Q^2}{d}}\left(\frac{D_0}{\nu}\right)\log\left(2\sin\frac{d\nu\pi}{D_0Q^2}\right).$$

En faisant $\nu=\rho+D_0n$, il vient :

$$C=\sum_d\mu(d)\left(\frac{D_0}{d}\right)\sum_{\rho=1}^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{\rho}\right)\sum_{n=0}^{\frac{Q^2}{d}-1}\log\left(2\sin\pi\left(\frac{d\rho}{D_0Q^2}+\frac{dn}{Q^2}\right)\right),$$

et la relation connue et facile à établir

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1}\log\left|\,2\sin\pi\left(x+\frac{\alpha}{m}\right)\right|=\log|\,2\sin mx\pi\,|$$

donne, pour $m=\frac{Q^2}{d}$:

$$\sum_{n=0}^{\frac{Q^2}{d}-1} \log\left(2\sin\pi\left(\frac{d\rho}{D_0Q^2}+\frac{dn}{Q^2}\right)\right)=\log\left(2\sin\frac{\rho\pi}{D_0}\right);$$

la quantité C sera donc :

$$C=\sum_d \mu(d)\left(\frac{D_0}{d}\right)\sum_1^{D_0-1}\left(\frac{D_0}{\rho}\right)\log\left(2\sin\frac{\rho\pi}{D_0}\right),$$

ou bien

$$C=-\operatorname{Cl}(D_0)\log E(D_0)\cdot\prod_q\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\right),$$

de sorte que l'on a la formule

$$(75)\quad -\sum_1^{D-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\log\sin\frac{\nu\pi}{D}=\operatorname{Cl}(D_0)\log E(D_0)\cdot\prod_q\left(1-\left(\frac{D_0}{q}\right)\right)$$

($D=D_0Q^2$, D_0 discriminant fondamental; q parcourant les facteurs premiers différents de Q).

11. Reprenons la formule

$$(15)\quad \frac{2}{\tau}\operatorname{Cl}(-\Delta)+\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos 2\nu x\pi}{\nu};$$

multiplions ses deux membres par $e^{-ax^2\pi}\,dx$ et intégrons de zéro à l'infini, en supposant a positif; il vient :

$$\frac{1}{\tau\sqrt{a}}\operatorname{Cl}(-\Delta)+\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\int_0^{\infty}e^{-ax^2\pi}E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)dx$$

$$=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_1^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\int_0^{\infty}e^{-ax^2\pi}\cos 2\nu x\pi\,dx;$$

nous avons, dans les premières intégrales, remplacé la fonction $E^*\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)$ par $E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)$ qui en diffère seulement aux points isolés.

Les intégrales qui figurent au second membre s'expriment sous forme finie, car on a cette formule de Laplace :

$$\int_0^\infty e^{-ax^2\pi}\cos 2\nu x\pi\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{\nu^2\pi}{a}},$$

et il ne reste qu'à évaluer les intégrales au premier membre; on a, en changeant x en $x-\frac{\alpha}{\Delta}$ et observant que $E(x)=0$ pour $0<x<1$:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2\pi}E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)dx = \int_{\frac{\alpha}{\Delta}}^\infty e^{-a\pi\left(x-\frac{\alpha}{\Delta}\right)^2}E(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-a\pi\left(x-\frac{\alpha}{\Delta}\right)^2}E(x)\,dx.$$

Cette dernière intégrale se transforme en série en faisant usage de l'identité suivante qui se vérifie aisément :

$$\int_0^\infty f(x)E(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^\infty f(x)\,dx;$$

on aura ainsi :

$$\int_0^\infty e^{-a\pi\left(x-\frac{\alpha}{\Delta}\right)^2}E(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_n^\infty e^{-a\pi\left(x-\frac{\alpha}{\Delta}\right)^2}dx,$$

ou, en changeant x en $x+\frac{\alpha}{\Delta}$,

$$\int_0^\infty e^{-ax^2\pi}E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-\frac{\alpha}{\Delta}}^\infty e^{-a\pi x^2}dx;$$

la somme qui figure au premier membre de notre relation

$$\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\int_0^\infty e^{-ax^2\pi}E\left(x+\frac{\alpha}{\Delta}\right)dx$$

a donc pour valeur la série

$$\sum_n \sum_\alpha \left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) \int_{n-\frac{\alpha}{\Delta}}^{\infty} e^{-ax^2\pi}\, dx;$$

celle-ci prend une forme un peu plus simple, si l'on fait $\Delta n - \alpha = m$, ce qui donne :

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{m}\right),$$

et notre quantité devient :

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \int_{\frac{m}{\Delta}}^{\infty} e^{-ax^2\pi}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{a\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \int_{\frac{m\sqrt{a\pi}}{\Delta}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

On retrouve ainsi la formule

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} e^{-\frac{\nu^2\pi}{a}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \int_{\frac{m\sqrt{a\pi}}{\Delta}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

laquelle revient à la formule (4) si l'on pose $a = \frac{\Delta}{z}$.

Le procédé que nous venons d'exposer dans un cas particulier peut fournir une foule de relations intéressantes dont beaucoup contiennent la fonction numérique $\mathrm{Cl}(-\Delta)$.

Représentons par $f(x)$ une fonction finie de $x = 0$ à $x = \infty$, ayant une dérivée finie et déterminée et qui est infiniment petite, d'un degré suffisant pour x infini. Multiplions les deux membres de (15) par $f'(x)\,dx$ et intégrons de zéro à l'infini. En employant les valeurs

$$\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0), \quad \int_0^{\infty} f'(x)\, \mathrm{E}\left(x + \frac{\alpha}{\Delta}\right) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} f\left(n - \frac{\alpha}{\Delta}\right),$$

et en transformant l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(x)\cos 2\nu x\pi\, dx$$

à l'aide d'une intégration par parties dans la suivante :

$$-f(0)+2\nu\pi\int_0^\infty f(x)\sin 2\nu x\pi\, dx,$$

nous aurons :

$$-\tfrac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)f(0)-\sum_{\alpha=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)\sum_{n=1}^{\infty}f\left(n-\frac{\alpha}{\Delta}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\left[-f(0)+2\nu\pi\int_0^\infty f(x)\sin 2\nu x\pi\, dx\right].$$

Les deux expressions qui se trouvent multipliées par $f(0)$ sont égales et disparaîtront de l'équation; la somme qui figure au premier membre se simplifie en faisant $n\Delta-\alpha=m$, puisque

$$\left(\frac{-\Delta}{\alpha}\right)=-\left(\frac{-\Delta}{m}\right),$$

et il s'ensuit que l'on a cette relation importante :

$$(76)\quad \sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)f\left(\frac{m}{\Delta}\right)=2\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\int_0^\infty f(x)\sin 2mx\pi\, dx.$$

Pour l'appliquer, rappelons-nous cette formule élémentaire :

$$\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

On ne peut pas faire

$$f(x)=\frac{e^{-ax}}{x},$$

puisque cette fonction cesse d'être finie pour $x=0$, mais on peut prendre

$$f(x)=\frac{1-e^{-ax}}{x},$$

et on n'a qu'à se rappeler l'équation

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$$

pour avoir

$$\int_0^\infty f(x)\sin bx\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}.$$

Cela étant, notre formule (76) devient, dans ce cas,

$$\Delta\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1-e^{-\frac{am}{\Delta}}}{m}=2\sqrt{\Delta}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{2m\pi};$$

en substituant la valeur

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}=\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et posant $a=2u\pi$, cette relation devient :

$$(77)\quad \frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{m}+\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_1^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mu\pi}{\Delta}},$$

u étant une quantité positive quelconque et $-\Delta$ désignant un discriminant fondamental.

La formule suivante [1] :

$$2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\alpha\pi}{e^{ux\pi}+\cos\alpha\pi}\cdot\sin vx\pi\,dx=\frac{1}{v}\left[\alpha-\frac{\sin\operatorname{hyp}\frac{\alpha v\pi}{u}}{\sin\operatorname{hyp}\frac{v\pi}{u}}\right],$$

[1] REINHARD MILDNER, Beitrag zur Ausmittlung des Werthes bestimmter Integrale (*Denkschriften* de l'Académie de Vienne, t. XLVIII; 1884).

dans laquelle $0 < \alpha < 1$, $u > 0$, $v > 0$, conduit à choisir

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{ux\pi} + \cos \alpha\pi};$$

la formule (76) devient alors :

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos \alpha\pi} = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2m} \left(\alpha - \frac{\sin \text{hyp} \frac{2m\alpha\pi}{u}}{\sin \frac{2m\pi}{u}} \right),$$

et en substituant

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{\sqrt{\Delta}}{2m} = \frac{\pi}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\alpha\pi}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) = \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \alpha\pi}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + \cos \alpha\pi} \\ + \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \text{hyp} \frac{2m\alpha\pi}{u}}{\sin \text{hyp} \frac{2m\pi}{u}} \end{aligned} \right.$$

($-\Delta$ un discriminant fondamental; $0 < \alpha < 1$, $u > 0$).

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on a une forme plus simple :

$$(78^0) \quad \frac{\pi}{2\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{mu\pi}{\Delta}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\Delta} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos \text{hyp} \frac{m\pi}{u}}.$$

Si, au contraire, on divise en (78) par α et passe à la limite pour $\alpha = 0$, il s'ensuit :

$$(78^1) \quad \frac{1}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) = \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{e^{\frac{mu\pi}{\Delta}} + 1} + \frac{\sqrt{\Delta}}{u} \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{\sin \text{hyp} \frac{2m\pi}{u}}.$$

12. Soit maintenant D un discriminant fondamental positif, nous aurons la formule

$$(11) \quad \sum_{\alpha=1}^{D-1} \left(\frac{D}{\alpha}\right) E^*\left(x + \frac{\alpha}{D}\right) = \frac{\sqrt{D}}{\pi} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\sin 2\nu x\pi}{\nu};$$

en la multipliant, de part et d'autre, par $f'(x)\,dx$ et en intégrant de zéro à l'infini, on parvient à la formule suivante :

$$(79)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right) f\left(\frac{m}{D}\right) = 2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_0^{\infty} f(x)\cos 2mx\pi\, dx,$$

qui est analogue à (76).

Pour l'appliquer, je me rappelle la formule connue :

$$\int_0^{\infty}\log\frac{1+e^{-ax}}{1-e^{-ax}}\cos bx\, dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{1-e^{-\frac{b\pi}{a}}}{1+e^{-\frac{b\pi}{a}}};$$

en faisant donc

$$f(x) = \log\frac{1+e^{-ax}}{1-e^{-ax}},$$

la relation (79) devient :

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{am}{D}}}{1-e^{-\frac{am}{D}}} = \sqrt{D}\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{2m}\,\frac{1-e^{-\frac{2m\pi^2}{a}}}{1+e^{-\frac{2m\pi^2}{a}}};$$

j'y fais $a = u\pi$ et je fais usage de la décomposition

$$\frac{1-e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}}{1+e^{-\frac{2\nu\pi}{u}}} = 1 - \frac{2}{e^{\frac{2\nu\pi}{u}}+1};$$

alors, dans le deuxième membre, il apparaîtra la série

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{\sqrt{D}}{m} = \mathrm{Cl}(D)\log E(D),$$

et on aura la relation

$$(80)\qquad \tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}(D)\log E(D)$$

$$= \sqrt{D}\sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}}+1} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{mu\pi}{D}}}{1-e^{-\frac{mu\pi}{D}}},$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

où figure la quantité positive arbitraire u, pour laquelle on prend le mieux la valeur $\sqrt{2D}$, si l'on veut s'en servir pour calculer le nombre $\mathrm{Cl}(D)$.

13. Étant une fois occupé des conséquences des formules (11) et (15), je m'arrêterai à une application à laquelle se rattache peu d'intérêt, mais que je veux cependant placer ici pour indiquer la grande variété des résultats qu'on rencontre sur cette voie.

J'emploie la formule (20), dans laquelle je remplace u par ux,

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\cos\frac{2\nu u x\pi}{\Delta}}{\nu} \qquad (0\leqq x\leqq 1)$$

et qui a lieu tant que $0\leqq u<\frac{Q^2}{Q'}$, Q' étant un nombre défini dans le n° 2.

Si l'on multiplie les deux membres par la différentielle

$$\cos^{\beta-1}\frac{x\pi}{2}\,dx,$$

les intégrations de $x=0$ à $x=1$ pourront s'effectuer au moyen d'une formule de Kummer [1] :

$$\int_0^1 \cos^{\beta-1}\frac{x\pi}{2}\cos\gamma x\pi\,dx=\frac{2^{1-\beta}\Gamma(\beta)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\gamma\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}-\gamma\right)} \qquad (\beta>0),$$

où la partie réelle de β doit être positive, tandis que γ peut évidemment être quelconque; je suppose que β soit réel et par conséquent positif. Nous aurons :

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\frac{\Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}+\frac{2\nu u}{\Delta}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}-\frac{2\nu u}{\Delta}\right)},$$

[1] Sur quelques transformations générales des intégrales définies (*Journal de Crelle*, t. XX).

ou, en faisant

$$\frac{\beta+1}{2}=\xi,$$

$$(81) \qquad \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\,\frac{\Gamma^2(\xi)}{\Gamma\left(\xi+\frac{2\nu u}{\Delta}\right)\Gamma\left(\xi-\frac{2\nu u}{\Delta}\right)}$$

($-\Delta$ un discriminant négatif quelconque, $\xi \geqq \frac{1}{2}$, $0 \leqq u < \frac{Q^2}{Q'}$; l'entier Q' était défini dans le n° 2).

Pour $\xi=\frac{1}{2}$ la formule se réduit à la formule (20).

14. Nous allons exposer une formule qui a été le véritable point de départ de nos recherches et qui repose sur l'identité suivante :

$$\sum_{m,n} e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}=\frac{1}{u}\sum_{m,n} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}$$

$$(m,\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

qui n'est qu'un cas particulier d'une relation dont Kronecker s'est servi dans ses recherches et qui se vérifie aisément; on trouve sa démonstration à la page 159 de l'ouvrage de M. Séguier.

Les quantités a, b, c, u ne sont sujettes qu'à la condition de rendre convergentes les deux séries, et puis $\Delta=4ac-b^2$.

Nous prendrons pour (a, b, c) les coefficients d'une forme positive du discriminant fondamental $-\Delta$, et il suffit de prendre pour u une quantité positive quelconque.

Dans chacune de ces deux séries à double entrée, isolons les termes $m=n=0$ et mettons la relation sous la forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{m,n}{}' \left[e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}-\frac{1}{u}\,e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}}(am^2+bmn+cn^2)}\right]=\frac{1}{u}-1,$$

la virgule du signe $\sum'$ devant indiquer que la combinaison des valeurs $m = n = 0$ est exclue.

Cela étant, rappelons-nous la formule fondamentale de Dirichlet, qui, pour un discriminant fondamental, est :

$$(\beta) \qquad \sum_{(a,b,c)} \sum_{m,n}{}' f(am^2 + bmn + cn^2) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) f(hk),$$

où (a, b, c) parcourt les représentants des différentes classes positives du discriminant $-\Delta$. Si, dans cette équation, on fait

$$f(z) = e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}} z} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}} z},$$

les sommes

$$\sum_{m,n}{}' f(am^2 + bmn + cn^2)$$

auront, d'après (α), une somme commune, indépendante de a, b, c, à savoir $\frac{1}{u} - 1$; le premier membre de l'équation (β) sera par conséquent

$$\left(\frac{1}{u} - 1\right) \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

tandis que dans le second,

$$\tau \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \left[e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{\Delta}} hk} - \frac{1}{u} e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta}} hk}\right],$$

on peut effectuer la sommation relative à k; on aura donc la formule suivante

$$(82) \quad \left(\frac{1}{u} - 1\right) \mathrm{Cl}(-\Delta) = \tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2hu\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} - \frac{\tau}{u} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{u\sqrt{\Delta}}} - 1},$$

valable pour des discriminants fondamentaux, u désignant une quantité positive. En différentiant et prenant $u = 1$, il vient :

$$(83)\quad \mathrm{Cl}(-\Delta) = -\tau \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{1}{e^{\frac{2h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - 1} + \frac{4\tau\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \frac{h}{\left(e^{\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}} - e^{-\frac{h\pi}{\sqrt{\Delta}}}\right)^2}.$$

15. Ces formules et d'autres semblables découlent immédiatement de la transformation linéaire la plus simple des fonctions *thêta* et de leur décomposition en produits. On sait que les fonctions suivantes,

$$(a)\quad \vartheta_1(u \mid \omega) = 2e^{\frac{1}{4}\omega\pi i} \sin u\pi \prod_1^{\infty} \left(1 - e^{2n\omega\pi i}\right)\left(1 - e^{2n\omega\pi i + 2u\pi i}\right)\left(1 - e^{2n\omega\pi i - 2u\pi i}\right),$$

$$(b)\quad \vartheta_2(u \mid \omega) = 2e^{\frac{1}{4}\omega\pi i} \cos u\pi \prod_1^{\infty} \left(1 - e^{2n\omega\pi i}\right)\left(1 + e^{2n\omega\pi i + 2u\pi i}\right)\left(1 + e^{2n\omega\pi i - 2u\pi i}\right),$$

$$(c)\quad \vartheta_0(u \mid \omega) = \prod_1^{\infty} \left(1 - e^{2n\omega\pi i}\right)\left(1 - e^{(2n-1)\omega\pi i + 2u\pi i}\right)\left(1 - e^{(2n-1)\omega\pi i - 2u\pi i}\right),$$

ont les propriétés qui s'expriment par les équations :

$$(d)\qquad \vartheta_1\left(\frac{x}{\omega} \,\middle|\, \frac{-1}{\omega}\right) = -i\sqrt{\frac{\omega}{i}}\, e^{\frac{x^2\pi i}{\omega}}\, \vartheta_1(x \mid \omega),$$

$$(e)\qquad \vartheta_0\left(\frac{x}{\omega} \,\middle|\, \frac{-1}{\omega}\right) = \sqrt{\frac{\omega}{i}}\, e^{\frac{x^2\pi i}{\omega}}\, \vartheta_2(x \mid \omega),$$

la partie réelle de la racine carrée $\sqrt{\frac{\omega}{i}}$ étant supposée positive.

En supposant ω purement imaginaire, $\vartheta_1(x \mid \omega)$ sera réel et positif, si l'on suppose x réel et dans les limites $0 < x < 1$; sous ces mêmes hypothèses, la quantité

$$i\vartheta_1\left(\frac{x}{\omega} \,\middle|\, \frac{-1}{\omega}\right)$$

sera réelle et positive. Nous allons considérer son logarithme, qui sera réel et par conséquent défini sans ambiguïté.

En écrivant $\omega = ti$, $t > 0$, je prends les logarithmes des deux membres de l'équation (d), multipliés par i, ce qui donne :

$$\log i\,\vartheta_1\left(\frac{x}{ti}\middle|\frac{i}{t}\right) = \text{const} + \frac{x^2\pi}{t} + \log\sin x\pi + \sum_1^\infty \log\left(1 - e^{-2nt\pi + 2x\pi i}\right)$$
$$+ \sum_1^\infty \log\left(1 - e^{-2nt\pi - 2x\pi i}\right);$$

on a ensuite :

$$i\vartheta_1\left(\frac{x}{ti}\middle|\frac{i}{t}\right) = e^{\frac{x\pi}{t} - \frac{\pi}{4t}} \prod_{n=0}^\infty \left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{t} - \frac{2x\pi}{t}}\right) \cdot \prod_{n=1}^\infty \left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{t} + \frac{2x\pi}{t}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{t}}\right),$$

de sorte que notre équation devient :

$$\sum_{n=0}^\infty \log\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{t}(n+x)}\right) + \sum_{n=1}^\infty \log\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{t}(n-x)}\right)$$
$$= \text{const} + \frac{\pi}{t}(x^2 - x) + \log\sin x\pi + \sum_{n=1}^\infty \log\left(1 - e^{-2nt\pi + 2x\pi i}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^\infty \log\left(1 - e^{-2nt\pi - 2x\pi i}\right),$$

la constante ne dépendant que du paramètre t.

En employant la série

$$\log\left(1 - e^{-2nt\pi + 2x\pi i}\right) = -\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m} e^{-2mnt\pi + 2mx\pi i},$$

on aura, en effectuant la sommation relative à n,

$$\sum_1^\infty \log\left(1 - e^{-2nt\pi + 2x\pi i}\right) = -\sum_1^\infty \frac{1}{m} \frac{e^{2mx\pi i}}{e^{2mt\pi} - 1},$$

ce qui permet de mettre notre relation sous la forme suivante :

$$\text{(A)}\quad \mathrm{A}-\log\sin x\pi = \frac{\pi}{t}(x^2-x) - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\cdot\frac{\cos 2mx\pi}{e^{2mt\pi}-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\log\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n+x)}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n-x)}\right),$$

A étant une constante.

Dans cette équation, remplaçons x par $\frac{h}{\mathrm{D}}$, D étant un discriminant fondamental positif, multiplions les deux membres par $\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)$ et ajoutons pour $h=1, 2, 3, \ldots \mathrm{D}-1$. En faisant usage des relations :

$$-\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\log\sin\frac{h\pi}{\mathrm{D}} = \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log\mathrm{E}(\mathrm{D}),$$

$$\sum\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\cos\frac{2mh\pi}{\mathrm{D}} = \left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\sqrt{\mathrm{D}},\qquad \sum\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right) = \sum\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)h = 0,$$

nous aurons

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log\mathrm{E}(\mathrm{D})$$
$$=\frac{\pi}{t}\sum_{1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2} - 2\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{1}{e^{2mt\pi}-1}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2\pi}{\mathrm{D}t}(n\mathrm{D}+h)}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{h}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2\pi}{t}(n\mathrm{D}-h)}\right).$$

Les deux dernières sommes prennent une forme commune en y faisant $n\mathrm{D}+h=m$, respectivement $n\mathrm{D}-h=m$, et il s'ensuit :

$$(84)\quad \frac{1}{2}\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log\mathrm{E}(\mathrm{D}) = \frac{\pi}{2t}\sum_{1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2} - \sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{1}{e^{2mt\pi}-1}$$
$$-\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2m\pi}{\mathrm{D}t}}\right);$$

cette formule convient au calcul du nombre des classes, si le discriminant n'est pas trop grand, sans quoi la détermination du nombre rationnel

$$(84^a) \qquad N = \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \frac{h^2}{D^2}$$

serait pénible; il convient le mieux de prendre $t = \frac{1}{\sqrt{D}}$.

La formule (84) permet d'obtenir la quantité N elle-même sous forme de série à convergence rapide, si l'on fait $t = \frac{1}{v}$ et si l'on différentie par rapport à v; il vient

$$(84^b) \qquad N = \frac{4}{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{m}{e^{\frac{2mv\pi}{D}} - 1} + \frac{4\sqrt{D}}{v^2} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{\left(e^{\frac{m\pi}{v}} - e^{-\frac{m\pi}{v}}\right)^2},$$

où l'on fait le mieux $v = \sqrt{D}$. La quantité dont on aurait besoin, $M = \frac{1}{2} N\pi\sqrt{D}$ $\left(\text{dans le cas de } t = \frac{1}{\sqrt{D}}\right)$, serait alors

$$(84^c) \qquad M = \frac{2\pi}{\sqrt{D}} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{m}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{D}}} - 1} + 2\pi \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{\left(e^{\frac{m\pi}{\sqrt{D}}} - e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{D}}}\right)^2},$$

et en posant

$$(84^d) \qquad L = \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\sqrt{D}}} - 1} + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) \log\left(1 - e^{-\frac{2m\pi}{\sqrt{D}}}\right),$$

on aura :

$$(84^*) \qquad \mathrm{Cl}(D) = 2\,\frac{M - L}{\log E(D)}.$$

Nous avons ici besoin de quatre séries dont la convergence est plus rapide que celle des séries de la formule (80), mais cette dernière n'en contient que deux, et l'emploi des deux méthodes sera à peu près également commode.

Nous allons montrer que l'expression finie N peut être remplacée par celle-ci, plus commode dans les applications :

$$(84^e)\qquad N = -\frac{4}{4-\left(\frac{2}{D}\right)}\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}.$$

On y parvient en employant la série

$$x^2 - x + \frac{1}{6} = \sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2nx\pi}{n^2\pi^2};$$

en y posant en effet $x = \frac{h}{D}$ et opérant comme dans l'article 2, on trouve :

$$(85)\qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2} = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n^2\pi^2};$$

la formule (14) donne d'un autre côté pour $x = 0$, $m = 1$:

$$(86)\qquad \sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(\frac{h}{D}\right)\right| = -2\sqrt{D}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2}\qquad (\lambda = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots)$$

et en faisant usage de l'identité

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2} = \left(1 - \left(\frac{2}{D}\right)\frac{1}{2^2}\right)\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^2},$$

il vient :

$$\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(\frac{h}{D}\right)\right| = -\frac{4-\left(\frac{2}{D}\right)}{4}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2};$$

cette relation prend la forme annoncée (84^e) en faisant usage des circonstances

$$\left(\frac{D}{D-h}\right) = \left(\frac{D}{h}\right),\qquad \left|R\left(\frac{D-h}{D}\right)\right| = \left|R\left(\frac{h}{D}\right)\right|;$$

car on a, pour $h < \frac{1}{2}D$, $R\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{h}{D}$.

IMPRIMERIE NATIONALE.

Posons maintenant, dans la formule (18), $x=\frac{1}{4}$ et $x=\frac{1}{8}$ et observons que l'on a :

$$\sin\frac{\lambda\pi}{2}=\left(\frac{-4}{\lambda}\right), \qquad \sin\frac{\lambda\pi}{4}=\left(\frac{-8}{\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2}};$$

nous aurons :

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\sqrt{4\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{4\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2},$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{8\Delta}\sum_{\lambda}\left(\frac{8\Delta}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2},$$

ou bien, en employant (85), ce qui est permis en *supposant* Δ *impair,*

$$(87^a) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\sum_{1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(4\Delta)^2},$$

$$(87^b) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=\frac{1}{2}\sum_{1}^{8\Delta-1}\left(\frac{8\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(8\Delta)^2},$$

Si, dans l'équation (14), on fait $x=\frac{1}{8}$, on aura, en faisant usage de la valeur

$$\cos\frac{\lambda\pi}{4}=\left(\frac{8}{\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},$$

la relation

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{D}\right)\right|=-\frac{1}{2}\sqrt{8D}\sum_{\lambda}\left(\frac{8D}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda^2\pi^2};$$

si D *est impair,* 8D sera un discriminant fondamental et l'équation (85) sera applicable; il vient :

$$(87^c) \qquad \sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\left|R\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{D}\right)\right|=-\frac{1}{2}\sum_{1}^{8D-1}\left(\frac{8D}{h}\right)\frac{h^2}{(8D)^2}.$$

Les deux dernières formules peuvent être réunies dans la suivante :

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\left|\mathrm{R}\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|=-\frac{\mathrm{D}}{2\Delta}\sum_{1}^{8\Delta-1}\left(\frac{8\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{(8\Delta)^2}(\mathrm{D}=\pm\Delta).$$

Pour simplifier le premier membre de (87^a), écrivons-le comme il suit :

$$\mathrm{S}=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)+\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{h}{\Delta}\right)+\sum_{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]+1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{3}{4}\right),$$

où nous avons fait usage des valeurs que la fonction $\left|\mathrm{R}\left(\frac{1}{4}+\frac{h}{\Delta}\right)\right|$ possède dans différentes parties de l'intervalle $1\cdots\Delta-1$.

Dans la troisième partie, remplaçons h par $\Delta-k$, on aura :

$$k<\frac{1}{4}\Delta \qquad \text{et} \qquad \frac{h}{\Delta}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}-\frac{k}{\Delta};$$

dans la partie moyenne, les termes $\frac{3}{4}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ se détruisent deux à deux, puis

$$\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h=\sum_{h=\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)(2h-\Delta);$$

il vient par conséquent :

$$\mathrm{S}=2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}+\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right);$$

la somme

$$\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)-\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$$

se simplifie en faisant usage des formules (20) du chapitre I et (47^*) du chapitre II,

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=\frac{2}{\tau}\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et observant que Δ est ici impair; on obtient pour la somme en question l'expression

$$\frac{3}{\tau}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

de sorte que

$$S=2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}+3\,\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

en ajoutant l'expression nulle (21) du chapitre I

$$(\alpha)\qquad 2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\,\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

il vient :

$$S=4\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}+\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta).$$

On a donc, pour Δ impair :

$$(88^a)\qquad \sum_{1}^{4\Delta-1}\left(\frac{4\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(4\Delta)^2}=4\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}+\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

formule qui, pour les discriminants fondamentaux pairs $\equiv 4 \pmod{8}$, facilite essentiellement le calcul du nombre auxiliaire N.

Passons à simplifier le premier membre de (87^b). Il s'écrit :

$$S = \sum_{h=1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{h=\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{7}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{7}{8}-\frac{h}{\Delta}\right) + \sum_{\left[\frac{7}{8}\Delta\right]+1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{7}{8}\right);$$

décomposons les parenthèses et faisons usage de la symbolique appliquée plus haut :

$$\sum_{1}^{[\Delta x]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = S(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{-\Delta}{\Delta x}\right);$$

alors la quantité suivante

$$S + \sum_{h=\frac{\Delta+1}{2}}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} - \sum_{h=1}^{\frac{\Delta-1}{2}} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} = S'$$

s'écrira

$$S' = -\frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right) + \frac{7}{4}S\left(\frac{7}{8}\right) - 2\sum_{h=\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} + 2\sum_{h=\frac{7}{8}\Delta}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta},$$

et si, dans la dernière partie, on fait $h = \Delta - k$, il vient :

$$S' = \frac{7}{4}S\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right) + 2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\left(\frac{h}{\Delta}-1\right) - 2\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}.$$

On s'assure aisément que notre somme S' est égale à l'expression

$$S' = S - \sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) = S - \frac{2}{\tau}\left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et on obtient, en égalant les deux valeurs de S′ :

$$S=\frac{2}{\tau}\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)-\frac{1}{4}S\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right)$$
$$+2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}.$$

Cela fait, rappelons-nous les valeurs obtenues plus haut

$$2\,S\left(\frac{1}{8}\right)+2\,S\left(\frac{3}{8}\right)=2\,\frac{5-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$
$$S\left(\frac{1}{8}\right)-S\left(\frac{3}{8}\right)=-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta);$$

on aura, en retranchant,

$$S\left(\frac{1}{8}\right)+3\,S\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta)+2\,\frac{5-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

et, par conséquent,

$$S=\frac{3\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)-\frac{1}{8}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta)$$
$$+2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta},$$

ou bien

$$(88^b_1)\qquad \sum_{1}^{8\Delta-1}\left(\frac{8\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(8\Delta)^2}=\frac{3}{\tau}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)-\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-8\Delta)$$
$$+4\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-4\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta};$$

on peut atteindre une expression encore plus commode en transformant la somme

$$A = 2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h - 2\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)h.$$

Multiplions par $\left(\frac{2}{\Delta}\right)$ et substituons, dans la deuxième partie, $2h = \Delta - \lambda$ $\left(\lambda = 1, 3, 5, \ldots; \lambda < \frac{1}{4}\Delta\right)$; on aura :

$$\left(\frac{-\Delta}{2h}\right) = -\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right),$$

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right)A = \sum_{h}\left(\frac{-\Delta}{2h}\right)2h - \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\lambda + \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\cdot\Delta;$$

les nombres $2h$ et λ constituent l'ensemble des entiers de la suite $1, 2, \ldots \left[\frac{\Delta}{4}\right]$, et par conséquent

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right)A = \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu + \Delta\sum_{\lambda<\frac{\Delta}{4}}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right).$$

Or on a :

$$\sum_{\lambda<\frac{\Delta}{4}}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) + \sum_{\mu<\frac{\Delta}{8}}\left(\frac{-\Delta}{2\mu}\right) = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right),$$

d'où, en faisant usage de notre ancienne notation,

$$\sum\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right) = S\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{2}{\Delta}\right)S\left(\frac{1}{8}\right);$$

en substituant les valeurs connues $[(47^*)$ et $(57)]$,

$$S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1+\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$S\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-8\Delta) + \frac{5-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

on aura, pour Δ *impair* :

$$(89)\qquad \sum_{\lambda}\left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)=\frac{3}{2\tau}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\Delta}\right)\mathrm{Cl}(-8\Delta),$$

$$\left(\lambda=1,3,5,\ldots\lambda<\frac{1}{4}\Delta\right).$$

L'identité qu'on vient de trouver,

$$2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}-2\sum_{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta}=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}+\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-8\Delta)$$
$$-\frac{3}{2\tau}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

permet de mettre l'expression (88_1^b) sous la forme plus simple :

$$(88^b)\qquad \sum_{1}^{8\Delta-1}\left(\frac{8\Delta}{h}\right)\frac{h^2}{(8\Delta)^2}=\frac{1}{4}\mathrm{Cl}(-8\Delta)+2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{1}{4}\Delta\right]}(-1)^{\nu}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}.$$

Il reste encore à simplifier l'expression (87^c); posons-la égale à S; nous aurons :

$$\mathrm{S}=\sum_{1}^{\left[\frac{3}{8}\mathrm{D}\right]}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\left(\frac{1}{8}+\frac{h}{\mathrm{D}}\right)+\sum_{\left[\frac{3}{8}\mathrm{D}\right]+1}^{\left[\frac{7}{8}\mathrm{D}\right]}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\left(\frac{7}{8}-\frac{h}{\mathrm{D}}\right)+\sum_{\left[\frac{7}{8}\mathrm{D}\right]+1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\left(\frac{h}{\mathrm{D}}-\frac{7}{8}\right).$$

La somme des termes provenant des parties constantes des parenthèses sera :

$$-\frac{3}{4}\mathrm{S}\left(\frac{3}{8},\mathrm{D}\right)+\frac{7}{4}\mathrm{S}\left(\frac{7}{8},\mathrm{D}\right)=-\frac{7}{4}\mathrm{S}\left(\frac{1}{8},\mathrm{D}\right)-\frac{3}{4}\mathrm{S}\left(\frac{3}{8},\mathrm{D}\right);$$

on trouve, par conséquent, en posant

$$S-\sum_{h=1}^{\frac{D-1}{2}}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}+\sum_{h=\frac{D+1}{2}}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}=S',$$

$$S'=-\frac{7}{4}S\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right)-2\sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}+2\sum_{\left[\frac{7}{8}D\right]+1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D};$$

dans la dernière somme, mettons $h=D-k$; il vient :

$$S'=\frac{1}{4}S\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right)-2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}-2\sum_{\left[\frac{3}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}.$$

Or on tire aisément de la définition de S'

$$S=S'+2\sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D},$$

et il vient :

$$S=\frac{1}{4}S\left(\frac{1}{8}\right)-\frac{3}{4}S\left(\frac{3}{8}\right)+2\sum_{h=\left[\frac{1}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D};$$

en faisant usage des relations :

$$S\left(\frac{1}{8}\right)+S\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-8D),$$

$$4S\left(\frac{1}{8}\right)=\mathrm{Cl}(-8D)+\left(\frac{2}{D}\right)\mathrm{Cl}(-4D),$$

il vient :

$$S=\left(\frac{2}{D}\right)\frac{\mathrm{Cl}(-4D)}{4}-\frac{\mathrm{Cl}(-8D)}{8}+2\sum_{h=\left[\frac{1}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

La formule (87^c) devient donc :

$$(88^c)\quad \sum_{1}^{8D-1}\left(\frac{8D}{h}\right)\frac{h^2}{(8D)^2}=\frac{Cl(-8D)}{4}-\left(\frac{2}{D}\right)\frac{Cl(-4D)}{2}-4\sum_{\left[\frac{1}{8}D\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h}{D}.$$

L'étude des fonctions

$$(90)\quad \begin{cases} N(x,\,D)=\sqrt{D}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\cos 2nx\pi}{n^2\pi^2}, \\ N(x,\,-\Delta)=\sqrt{\Delta}\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{\sin 2nx\pi}{n^2\pi^2} \end{cases}$$

donnerait certainement différentes formules qui facilitent le calcul du nombre

$$N(D)=\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{h^2}{D^2}$$

pour certaines catégories de discriminants composés. Je me réserve de revenir sur cette matière dans une autre occasion, puisque les méthodes qui ont été déjà exposées suffisent pour notre but.

16. Dans la formule (e) prenons $x=\xi\omega$, $0<\xi<1$, $\omega=ti$; elle devient :

$$(a)\quad \vartheta_0\left(\xi\,\Big|\,\frac{i}{t}\right)=\sqrt{t}\,e^{-\xi^2 t\pi}\,\vartheta_2(\xi ti\,|\,ti)\,;$$

on a :

$$\vartheta_2(\xi ti\,|\,ti)=e^{-\frac{1}{4}t\pi+\xi t\pi}\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+e^{-2t\pi(n+\xi)}\right)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+e^{-2t\pi(n-\xi)}\right)\left(1-e^{-2nt\pi}\right);$$

$$\vartheta_0\left(\xi\,\Big|\,\frac{i}{t}\right)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-e^{-\frac{2n\pi}{t}}\right)\left(1-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{t}+2\xi\pi i}\right)\left(1-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{t}-2\xi\pi i}\right),$$

ce qui donne, en prenant les logarithmes des quantités (a),

$$t\pi(\xi^2-\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\log\left(1+e^{-2t\pi(n+\xi)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+e^{-2t\pi(n-\xi)}\right)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{t}+2\xi\pi i}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-e^{-\frac{(2n-1)\pi}{t}-2\xi\pi i}\right)$$

$$+\mathrm{C},$$

C ne dépendant que du paramètre t; les deux dernières séries ont pour somme

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\xi\pi}{m}e^{-(2n-1)\frac{m\pi}{t}}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{m\pi}{t}}-e^{-\frac{m\pi}{t}}}\frac{\cos 2m\xi\pi}{m},$$

et notre relation devient :

$$(\mathrm{B})\quad\left\{\begin{aligned}t\pi(\xi^2-\xi)&=\sum_{n=0}^{\infty}\log\left(1+e^{-2t\pi(n+\xi)}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+e^{-2t\pi(n-\xi)}\right)\\&\quad+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{m\pi}{t}}-e^{-\frac{m\pi}{t}}}\cdot\frac{\cos 2m\xi\pi}{m}+\mathrm{C}.\end{aligned}\right.$$

En prenant, D étant un discriminant fondamental positif, $\xi=\frac{h}{\mathrm{D}}$, multipliant par $\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)$ et ajoutant, nous aurons :

$$(91)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{t\pi}{2}\sum_{1}^{\mathrm{D}-1}\left(\frac{\mathrm{D}}{h}\right)\frac{h^2}{\mathrm{D}^2}&=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\left(1+e^{-\frac{2mt\pi}{\mathrm{D}}}\right)\\&\quad+\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{\frac{m\pi}{t}}-e^{-\frac{m\pi}{t}}},\end{aligned}\right.$$

ce qui fournit un nouveau développement pour le calcul de la constante N(D).

En ajoutant, membre à membre, avec (84), après avoir changé t en $\frac{1}{t}$, il vient :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{2mt\pi}{\mathrm{D}}}}{1-e^{-\frac{2mt\pi}{\mathrm{D}}}} + \sqrt{\mathrm{D}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{1}{e^{\frac{m\pi}{t}}+1},$$

ce qui n'est autre chose que la formule (80) écrite avec la valeur $u = \frac{t}{2}$.

Les formules (A) et (B) fournissent aussi les développements du nombre des classes du discriminant négatif $-\Delta$.

On tire en effet de (A) et (B) par différentiation

$$(\mathrm{A}') \qquad -\frac{1}{t}(2x-1) - \cot x\pi = 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2mx\pi}{e^{2mt\pi}-1}$$
$$-\frac{2}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{t}(n+x)}-1} + \frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{t}(n-x)}-1},$$

$$(\mathrm{B}') \qquad -t(2\xi-1) = 2t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{e^{2t\pi(n+\xi)}+1} - 2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2t\pi(n-\xi)}+1}$$
$$+4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2m\xi\pi}{e^{\frac{m\pi}{t}}-e^{-\frac{m\pi}{t}}};$$

cela posé, soit $-\Delta$ un discriminant négatif fondamental, posons dans les deux équations $x = \frac{h}{\Delta}$ resp. $\xi = \frac{h}{\Delta}$, et après avoir multiplié les deux membres de chacune de ces équations par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$, ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, 3, \ldots \Delta - 1$. On n'a qu'à se rappeler les formules (9) et (14) du chapitre 1^er^, savoir :

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta), \qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{h}{\Delta} = -\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

pour en conclure les équations :

$$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{t}-\sqrt{\Delta}\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{e^{2mt\pi}-1}-\frac{1}{t}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\Delta t}}-1},$$

$$\frac{1}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{\Delta}}+1}+\frac{\sqrt{\Delta}}{t}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{e^{\frac{m\pi}{t}}-e^{-\frac{m\pi}{t}}}.$$

La première n'est autre que la formule (82) écrite avec la valeur $u=t\sqrt{\Delta}$, l'autre est identique avec (78^1), si l'on y fait $u=2t$.

Terminons par une remarque au sujet de la formule (80) :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log\mathrm{E}(\mathrm{D})=\sqrt{\mathrm{D}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{1}{e^{\frac{2m\pi}{u}}+1}+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{mu\pi}{\mathrm{D}}}}{1-e^{-\frac{mu\pi}{\mathrm{D}}}};$$

elle donne

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log\mathrm{E}(\mathrm{D})<\sqrt{\mathrm{D}}\log\frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi}{u}}}+\sum_{1}^{\infty}\log\frac{1+e^{-\frac{mu\pi}{\mathrm{D}}}}{1-e^{-\frac{mu\pi}{\mathrm{D}}}}.$$

La seconde série n'est autre chose que $\log\varphi(\omega)$, en posant

$$\omega=\frac{ui}{2\mathrm{D}},\quad \varphi(\omega)=\sqrt{\frac{\pi\vartheta_3}{\vartheta_1'}},\quad \text{ou bien}\quad \varphi(\omega)^2=\frac{1}{\vartheta_0\vartheta_3};$$

or

$$\vartheta_0(0\mid\omega)=\sqrt{\frac{i}{\omega}}\,\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{-1}{\omega}\right),\quad \vartheta_3(0\mid\omega)=\sqrt{\frac{i}{\omega}}\,\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{-1}{\omega}\right),$$

et par conséquent

$$\varphi(\omega)^2=\frac{u}{2\mathrm{D}}\,\frac{1}{\vartheta_2\left(0\,\middle|\,\frac{2\mathrm{D}i}{u}\right)\vartheta_0\left(0\,\middle|\,\frac{2\mathrm{D}i}{u}\right)};$$

en supposant $\frac{\mathrm{D}}{u}$ très grand, cette quantité peut être remplacée par la suivante :

$$\varphi(\omega)^2=\frac{u}{4\mathrm{D}}e^{\frac{\mathrm{D}\pi}{2u}};$$

on aura par conséquent, pour D très grand,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) < \sqrt{\mathrm{D}}\log\frac{u}{2\pi} + \frac{\mathrm{D}\pi}{4u} + \frac{1}{2}\log\frac{u}{4\mathrm{D}},$$

d'où, en prenant $u = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\mathrm{D}}$,

$$(92)\quad \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) < \sqrt{\mathrm{D}}\,[\log \mathrm{D} - 2,15888] - \frac{1}{2}\log \mathrm{D} - 1,62785.$$

Cette inégalité suffit quelquefois pour déterminer le nombre des classes, par exemple pour $\mathrm{D} = 3.5.7 = 105$ elle donne $\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) < 5$, et puisque ce nombre est divisible par $2^2 = 4$, il faut que l'on ait $\mathrm{Cl}(105) = 4$.

Si l'on prend en second lieu le discriminant premier $\mathrm{D} = 569$, le calcul donne $\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) < \frac{95,03}{44,942} = 2 + \cdots$, de sorte que $\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) \leqq 2$; or, pour les discriminants premiers, le nombre des classes est impair; on a donc $\mathrm{Cl}(569) = 1$.

CHAPITRE III.

PARTIE ALGÉBRIQUE DU PROBLÈME.

1. Après avoir discuté la détermination du nombre des classes par la méthode d'approximation analytique, nous devons nous occuper des recherches algébriques qui ont été abordées par Gauss[1] et surtout par Lejeune-Dirichlet[2] et Jacobi[3]. Après que Dirichlet a fait ressortir le rôle que les polynômes Y et Z jouent dans la détermination du nombre des classes du discriminant positif, il ne restait pour ses successeurs que des détails méthodiques; un complément assez important à cette théorie est dû à V. Schemmel[4], qui a reconnu que les polynômes Y et Z fournissent aussi la solution pour les discriminants négatifs; on trouve divers détails dans les mémoires de Liouville[5], Alexandre Berger[6] et H. Weber[7].

Après ce qui vient d'être dit, le lecteur attendra à peine des découvertes entièrement neuves et importantes dans les premiers numéros de ce chapitre; il n'est en grande partie qu'une compilation, augmentée çà et là d'un détail facile à trouver, mais pouvant présenter de l'intérêt sous certains points de vue.

Dans les derniers numéros de ce chapitre, le lecteur trouvera quelques recherches spéciales qui présentent de l'analogie avec la théorie précédente et qui ont conduit à découvrir certaines con-

(1) Septième partie des *Disquisitiones*.

(2) Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires (*Journal de Crelle*, t. 17).

(3) Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (*Comptes rendus de l'Académie de Berlin*, 1837).

(4) *De multitudine formarum secundi gradus disquisitiones*; Vratislaviae, 1863.)

(5) *Journal de Liouville*, 2e série, t. II, 1857.

(6) Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries (*Nova Acta Regiæ Societatis scientiarum Upsaliensis*, t. XII, 1886).

(7) *Nachrichten* de Goettingue, 1893.

gruences concernant les discriminants fondamentaux impairs composés de deux ou trois nombres premiers.

Soit D un discriminant fondamental, Δ sa valeur absolue, et observons que l'expression suivante

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]$$

a pour valeur l'unité, si l'on a

$$\left(\frac{D}{\nu}\right)=1,$$

tandis qu'elle est nulle si l'on a ou

$$\left(\frac{D}{\nu}\right)=-1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{D}{\nu}\right)=0.$$

L'expression

$$(1^a) \qquad A(x, D)=\prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}$$

sera donc le produit des facteurs

$$x-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}},$$

formés avec les entiers a de la suite $1, 2, 3, \ldots \Delta-1$ qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{a}\right)=1$$

et qui sont au nombre de $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$:

$$A(x, D)=\prod_{a}\left(x-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

Représentons d'un autre côté par b les entiers de la même suite qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{b}\right) = -1,$$

et qui sont également au nombre de $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$. Le produit

$$B(x, D) = \prod_b \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}\right)$$

peut s'écrire

$$(1^b) \qquad B(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}.$$

Cela posé, représentons par $F(x, \Delta)$ le polynôme irréductible d'ordre $\varphi(\Delta)$ qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$, et qui s'exprime, comme on sait, par la formule suivante

$$(2) \qquad F(x, \Delta) = \prod_d \left(x^{\frac{\Delta}{d}} - 1\right)^{\mu(d)},$$

d parcourant tous les diviseurs du nombre Δ et $\mu(d)$ signifiant les nombres de Moebius; par exemple :

$$F(x, 15) = \frac{(x^{15}-1)(x-1)}{(x^3-1)(x^5-1)} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

L'ensemble des racines des équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ constitue la totalité des racines de l'équation $F(x) = 0$, et on a par conséquent l'identité

$$(3) \qquad A(x)\,B(x) = F(x).$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Des équations (1^a) et (1^b) on tire la formule

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{D}{\nu}\right)}, \tag{4}$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques,

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}}. \tag{5}$$

Posons pour abréger :

$$\Phi(x) = \log \frac{A(x)}{B(x)};$$

on aura :

$$\Phi'(x) = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}};$$

en supposant que la valeur absolue de la variable x soit plus petite que l'unité, on peut employer le développement

$$\frac{1}{e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} - x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} x^{\mu-1},$$

d'où

$$\Phi'(x) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu-1} \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}};$$

puisque nous avons supposé que D est un discriminant fondamental, on a :

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{D}{\mu}\right) \sqrt{D} \operatorname{sgn} D,$$

et par conséquent

$$\Phi'(x) = -\sqrt{D} \operatorname{sgn} D \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1},$$

ou bien :

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = -\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1}. \tag{6}$$

On en tire par l'intégration :

$$\log \frac{A(x)}{B(x)} = \log c - \sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^{\mu}}{\mu}, \tag{7}$$

où la constante c est égale à 1 pour $D > 0$ et pour $D < -4$, tandis qu'elle est égale à $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ pour $D = -3$, et à -1 pour $D = -4$. Pour le démontrer, il suffit d'observer que c n'est autre chose que la quantité $\frac{A(0)}{B(0)}$ pour laquelle la formule (4) donne :

$$c = \prod \left(-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{D}{\nu}\right)} = e^{\sum \left(\frac{D}{\nu}\right) \nu \cdot \frac{2\pi i}{\Delta}};$$

l'exposant est nul pour $D > 0$, puis on a :

$$\sum \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = -\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) \quad \text{pour} \quad D = -\Delta,$$

et par conséquent :

$$c = e^{-\frac{4\pi i}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)},$$

ce qui vérifie les résultats annoncés.

Des équations

$$\log A(x) - \log B(x) = \Phi(x),$$

$$\log A(x) + \log B(x) = \log F(x),$$

on tire

$$\log A(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\log F(x),$$

$$\log B(x) = -\frac{1}{2}\Phi(x) + \frac{1}{2}\log F(x);$$

le développement suivant les puissances de x de la fonction $\Phi(x)$ est précisément l'expression (7), tandis que le développement de $\log F(x)$ s'obtient au moyen de la formule (2), qui donne :

$$\log F(x) = \sum_d \mu(d) \log\left(1 - x^{\frac{\Delta}{d}}\right),$$

et par conséquent :

$$\log F(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 \frac{x^3}{3} + \cdots,$$

où les constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sont des nombres rationnels.

On a ainsi pour les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ la représentation suivante :

$$A(x) = \sqrt{c}\, e^{\sum_1^\infty \left[c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right]\frac{x^m}{2m}},$$

$$B(x) = \sqrt{c}\, e^{\sum_1^\infty \left[c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right]\frac{x^m}{2m}}.$$

Or on sait que le développement suivant les puissances croissantes d'une fonction telle que

$$e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots}$$

est une série $1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$, dans laquelle le coefficient a_m est une fonction entière aux coefficients rationnels des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Il s'ensuit que les coefficients des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont de la forme $a + b\sqrt{D}$, a et b étant des nombres rationnels, et que les coefficients homologues dans les deux polynômes sont toujours des nombres algébriquement conjugués, à savoir $a + b\sqrt{D}$ et $a - b\sqrt{D}$, toutes les fois que $c = 1$, c'est-à-dire à l'exception du cas de $D = -3$ et $D = -4$.

Les coefficients des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont comme des sommes des exponentielles de la forme $e^{\frac{2k\pi i}{\Delta}}$ des nombres algébriques entiers; alors les deux nombres

$$a + b\sqrt{D} \quad \text{et} \quad a - b\sqrt{D}$$

sont des entiers algébriques, d'où il suit que $2a$ et $2b\sqrt{D}$ sont des entiers algébriques. En prenant $2b = \frac{x}{y}$, le nombre $\frac{x}{y}\sqrt{D}$ n'est algébrique entier que si l'on a $y = 1$ pour D impair, et au plus $y = 2$ pour D pair. En supposant donc D impair, on vient de voir que les coefficients de nos polynômes seront de la forme

$$(\alpha) \qquad \frac{m + n\sqrt{D}}{2}, \quad \frac{m - n\sqrt{D}}{2}.$$

Si m est impair, l'intégrité de leur produit $\frac{m^2 - n^2 D}{4}$ exige que n le soit aussi.

Dans le cas de D pair, $4b$ sera un entier ordinaire et il faudra prendre $n = \frac{n'}{2}$, de sorte que nos coefficients conjugués seront :

$$\frac{m + n'\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}, \quad \frac{m - n'\sqrt{\frac{D}{4}}}{2};$$

leur produit

$$\frac{m^2 - n'^2 \frac{D}{4}}{4}$$

ne peut être entier que si n' est pair, à cause de la forme des discriminants fondamentaux; la forme (α) des coefficients sera donc conservée aussi dans ce deuxième cas, et il s'ensuit qu'on peut poser :

$$2A(x) = Y(x) \pm \sqrt{D}\, Z(x), \quad 2B(x) = Y(x) \mp \sqrt{D}\, Z(x),$$

Y et Z étant deux polynômes aux coefficients entiers ordinaires, et où nous avons à déterminer le signe du radical de sorte que le coefficient de la puissance la plus élevée dans Z soit positif.

Les termes les plus élevés des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ s'obtiennent immédiatement des définitions (1^a) et (1^b),

$$A(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} \cdot x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \cdots,$$

$$B(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} \cdot x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \cdots,$$

qui donnent

$$A(x) + B(x) = Y(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} \cdot x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \cdots,$$

$$A(x) - B(x) = \pm Z(x)\sqrt{D} = - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} \cdot x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \cdots$$

Le coefficient de $x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1}$ dans le polynôme $\pm\sqrt{D}\,Z(x)$ étant

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} = -\sqrt{D},$$

il faut prendre le signe inférieur et nous poserons alors d'une manière définitive :

$$(8) \qquad \begin{cases} 2A(x,\, D) = Y(x,\, D) - \sqrt{D}\,Z(x,\, D), \\ 2B(x,\, D) = Y(x,\, D) + \sqrt{D}\,Z(x,\, D). \end{cases}$$

Les fonctions $Y(x)$ et $Z(x)$ sont de la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} Y(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} + a_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + a_2 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \cdots, \\ Z(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + b_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \cdots, \end{cases}$$

et on voit en même temps que le coefficient a_1 a pour valeur

$$a_1 = -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}},$$

ce qui prouve qu'il coïncide avec le coefficient de la $[\varphi(\Delta)-1]^{\text{me}}$ puissance de x dans le polynôme $F(x)$ [1].

L'équation (3) s'écrira :

$$(10) \qquad Y^2(x, D) - DZ^2(x, D) = 4F(x, \Delta).$$

Dirichlet avait considéré le cas où $D = \pm P$ est un nombre impair, naturellement composé de facteurs premiers différents; le procédé qui vient d'être exposé permet de traiter séparément les deux cas de $D > 0$ et de $D < 0$, ce qui est utile pour bien comprendre les applications; le résultat plus général lui-même a été énoncé par Cauchy [2].

Il reste à traiter séparément les deux cas $D = -3$ et $D = -4$ qui ont été exclus.

Pour $D = -3$ on a $A = x - e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $B = x - e^{\frac{4\pi i}{3}}$,

d'où

$$Y = A + B = 2x + 1, \quad Z = \frac{B - A}{\sqrt{-3}} = 1, \quad Y^2 + 3Z^2 = 4F(x).$$

Pour $D = -4$ on a $A = x - i$, $B = x + i$,

d'où

$$Y = A + B = 2x, \quad Z = \frac{B - A}{\sqrt{-4}} = 1; \quad Y^2 + 4Z^2 = 4F.$$

[1] Le procédé le plus rapide du calcul des coefficients des polynômes Y et Z, qui repose sur les formules de Newton, a été indiqué par Legendre.

[2] *Œuvres*, 1re série, 5e volume, p. 84.

L'équation (10) définit sans ambiguïté les polynômes Y et Z, en retenant la convention sur la forme (9) de leurs développements. Admettons en effet que l'on ait encore :

$$4F = Y_1^2 - DZ_1^2 = (Y_1 - Z_1\sqrt{D})(Y_1 + Z_1\sqrt{D});$$

la fonction $Y_1 - Z_1\sqrt{D}$ s'annulera pour certaines racines de l'une des deux fonctions

$$Y \pm Z\sqrt{D};$$

soit $Y_2 - Z_2\sqrt{D}$ le plus grand commun diviseur des deux fonctions

$$Y_1 - Z_1\sqrt{D} \quad \text{et} \quad Y \pm Z\sqrt{D},$$

son degré étant supposé inférieur à $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$. Ce polynôme et par conséquent aussi le suivant,

$$Y_2^2 - Z_2^2 D,$$

s'annulent pour une certaine racine $x = e^{\frac{2h\pi i}{\Delta}}$ de l'équation irréductible $F(x) = 0$, ce qui n'est pas possible.

La décomposition (10) ne porte aucune trace de la définition arithmétique des polynômes Y et Z qui, elle, a fait usage des sommes de Gauss, et il semble possible, mais non connu que ladite relation puisse fournir, d'une manière indépendante et d'une source toute différente, les polynômes en question.

2. Les équations (8) donnent tout de suite

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = 2\sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{Y^2(x) - DZ^2(x)},$$

ou, en faisant usage de (10)

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{2F(x)}. \tag{11}$$

On parviendra à une autre représentation du premier membre en faisant usage du développement (6); la série

$$S=\sum_1^\infty\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1}$$

qui y figure peut se transformer en faisant $\mu=\rho+\Delta\nu$, et on aura :

$$S=\sum_{\rho=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^{\rho-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}x^{\Delta\nu}=\frac{1}{1-x^\Delta}\sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^{\rho-1}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction entière

(12) $$Q(x)=\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)x^\rho=Q(x,\ D),$$

et la formule cherchée devient :

(13) $$\frac{A'(x)}{A(x)}-\frac{B'(x)}{B(x)}=\frac{\sqrt{D}\operatorname{sgn}D}{x(x^\Delta-1)}Q(x);$$

en comparant avec (11) il vient :

(14) $$Q(x)=x\frac{x^\Delta-1}{F(x)}\frac{Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)}{2}\operatorname{sgn}D.$$

Représentons maintenant par Δ_ν tous les diviseurs du nombre Δ plus petits que Δ, mais y compris l'unité, et formons le produit[1]

$$\prod_\nu F(x,\ \Delta_\nu)$$

de tous les polynômes irréductibles correspondants; il sera identique avec le quotient

$$\frac{x^\Delta-1}{F(x)},$$

[1] On a $F(x,1)=x-1,\quad F(x,2)=x+1,\quad F(x,4)=x^2+1,\ \ldots$

IMPRIMERIE NATIONALE.

et la formule (14) pourra s'écrire

$$(14^*)\qquad Q(x)=\tfrac{1}{2}\,x\,\mathrm{sgn}\,D\left[Z(x)\,Y'(x)-Y(x)\,Z'(x)\right]\cdot\prod_{\nu}F(x,\,\Delta_\nu).$$

La fonction $Q^2(x)-D$ est évidemment divisible par $F(x)$, puisqu'elle s'annule pour $x=e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$; on a donc la congruence :

$$(15)\qquad Q^2(x)\equiv D\quad[\mathrm{mod.}\,F(x)].$$

Pour la même valeur de x on a :

$$Y(x)-\sqrt{D}\,Z(x)=0,\quad Q(x)=\sqrt{D},$$

d'où il suit que la fonction entière

$$Y(x)-Q(x)\,Z(x)$$

est divisible par $F(x)$; en d'autres termes :

$$(16)\qquad Y(x)\equiv Q(x)\,Z(x)\quad[\mathrm{mod.}\,F(x)].$$

Cette congruence, dans laquelle $Q(x)$ est supposé connu, définit d'une manière univoque les fonctions Y et Z, si l'on ajoute qu'elles sont de la forme (9). Car, en effet, elle donne, en prenant les carrés,

$$Y^2(x)\equiv Q^2(x)\,Z^2(x),$$

ou, en faisant usage de (15),

$$Y^2(x)-DZ^2(x)\equiv 0\quad[\mathrm{mod.}\,F(x)].$$

Le premier membre étant du degré au plus égal à $\varphi(\Delta)$, le quotient

$$\frac{Y^2(x)-DZ^2(x)}{F(x)}$$

sera une constante qui, évidemment, est le nombre 4; il s'ensuit que pour les fonctions Y et Z en question, l'équation (10) est satisfaite; ce sont donc nécessairement nos anciennes fonctions.

3. Reprenons l'équation (14) :

$$(14)\qquad Q(x)=\frac{1}{2}x\frac{x^{\Delta}-1}{F(x)}[Z(x)Y'(x)-Y(x)Z'(x)]\operatorname{sgn}D;$$

différentions-la de part et d'autre, et posons $x=1$; il vient :

$$Q'(1)=\frac{1}{2}\frac{\Delta}{F(1)}[Z(1)Y'(1)-Y(1)Z'(1)]\operatorname{sgn}D,$$

ou, en remarquant que $\Delta\operatorname{sgn}D=D$:

$$(a)\qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu=\frac{D}{2F(1)}[Z(1)Y'(1)-Y(1)Z'(1)].$$

On voit aisément que l'on a :

$$(17)\qquad F(1)=\begin{cases}\Delta, & \text{si } \Delta \text{ est premier ou puissance d'un nombre premier;}\\ 1, & \text{si } \Delta \text{ est composé de plusieurs nombres premiers.}\end{cases}$$

Si D est positif, le premier membre de (a) s'annule, et on trouve, en différentiant deux fois les deux membres de (14) et faisant $x=1$ au résultat, la relation suivante :

$$(18)\qquad \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu^2=\frac{D}{F(1)}[Z(1)Y''(1)-Y(1)Z''(1)],\qquad D>0.$$

Mais si $D=-\Delta<0$, le premier membre de (a) n'est autre chose que la quantité connue

$$-\frac{2\Delta}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

17.

et il s'ensuit que l'on a l'équation

$$(19)\qquad \frac{4}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\frac{Z(1)\,Y'(1)-Y(1)\,Z'(1)}{F(1)}$$

dont nous simplifierons encore le deuxième membre.

Nous supposerons désormais que D diffère des valeurs -3, -4, ± 8. Si alors Δ est composé, on aura $F(1)=1$ et l'équation (10) donnera, dans le cas $D=-\Delta$ qui nous occupe :

$$Y^2(1)+\Delta Z^2(1)=4;$$

puisque $\Delta>4$, il faut que $Z(1)$ soit nul, et par conséquent :

$$Y(1)=\pm 2,\quad Z(1)=0,\quad D=-\Delta \text{ composé},\quad \Delta>8.$$

L'équation (19) se simplifie comme il suit

$$(19^a)\qquad 2\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=-Y(1)\,Z'(1),\quad (\Delta \text{ composé}>8),$$

où il ne reste qu'à déterminer le signe de $Y(1)=\pm 2$.

Soit maintenant Δ un nombre premier supérieur à 3; on a

$$F(1)=\Delta,\quad Y^2(1)+\Delta Z^2(1)=4\Delta,$$

il s'ensuit que $Y(1)=\Delta y$ est divisible par Δ; il vient :

$$Z^2(1)+\Delta y^2=4,$$

d'où il suit que $y=0$, et par conséquent :

$$Y(1)=0,\quad Z(1)=\pm 2;\quad D=-\Delta \text{ premier},\quad \Delta>3.$$

L'équation (19) devient, dans ce cas :

$$(19^b)\qquad 2\Delta\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=Z(1)\,Y'(1),\quad (\Delta \text{ premier}>3).$$

Nous établirons plus tard le signe de la quantité $Z(1)=\pm 2$.

4. La plus simple des questions concernant les fonctions Y et Z est la détermination des valeurs $Y(o)$ et $Z(o)$; on a :

$$A(o)=(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}=(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{2\pi i}{\Delta}\sum a},$$

$$B(o)=(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\prod e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}=(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{2\pi i}{\Delta}\sum b},$$

a et b ayant l'ancienne signification des nombres qui satisfont aux conditions

$$\left(\frac{D}{a}\right)=1,\quad \left(\frac{D}{b}\right)=-1.$$

Il faut distinguer deux cas

1° D positif.

Ici on a :

$$\sum a=\sum b,\quad \sum a+\sum b=\tfrac{1}{2}\Delta\varphi(\Delta),$$

et par conséquent :

$$\sum a=\sum b=\tfrac{1}{4}\Delta\varphi(\Delta),$$

d'où :

$$A(o)=B(o)=1,$$

c'est-à-dire :

$$(20^a)\qquad Y(o,D)=2,\quad Z(o,D)=o\quad \text{pour}\quad D>o.$$

2° $D=-\Delta$ négatif.

Ici on a :

$$\sum a-\sum b=\sum\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\nu=-\frac{2\Delta}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=-\Delta\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et par conséquent :

$$\frac{2}{\Delta}\sum a = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$\frac{2}{\Delta}\sum b = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

d'où l'on conclut :

$$A(0) = B(0) = (-1)^{\mathrm{Cl}(-\Delta)}.$$

Si Δ est premier, le nombre des classes est impair, tandis qu'il est pair pour Δ composé plus grand que huit; par conséquent :

$$(20^b)\quad Y(0,\,\Delta) = \left\{\begin{matrix} -2, \text{ si } \Delta \text{ est premier} > 3 \\ +2, \text{ si } \Delta \text{ est composé} > 8 \end{matrix}\right\},\qquad Z(0,\,-\Delta) = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$A\left(\frac{1}{x}\right) = \prod_a \left(\frac{1}{x} - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right) = \left(\frac{-1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} \prod \left(x - e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right);$$

nous venons de voir que l'on a, en général :

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = 1,$$

tandis que le deuxième membre est -1, si D est négatif et premier; nous désignerons par ε cette quantité $+1$ ou -1 et nous aurons :

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon \prod_a \left(x - e^{\frac{2\pi i}{\Delta}(\Delta - a)}\right).$$

Si maintenant D est positif, on aura :

$$\left(\frac{D}{\Delta - a}\right) = \left(\frac{D}{a}\right) = +1,$$

de sorte que le symbole $\Delta - a$ parcourt le système des nombres a, et il vient :

$$(a) \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}, D\right) = A(x, D), \quad D > 0.$$

Mais si $D = -\Delta$ est négatif, on a

$$\left(\frac{D}{\Delta - a}\right) = -1,$$

de sorte que l'ensemble des nombres $\Delta - a$ coïncide avec les nombres b, et nous aurons :

$$(b) \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = \varepsilon B(x, -\Delta) \quad \begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ pour } \Delta \text{ composé.} \\ \varepsilon = -1 \text{ pour } \Delta \text{ premier.} \end{cases}$$

On en déduit les relations très importantes :

$$(21) \qquad \begin{cases} x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Y\left(\frac{1}{x}, D\right) = Y(x, D), \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Z\left(\frac{1}{x}, D\right) = Z(x, D), \qquad D > 0, \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = \varepsilon Y(x, -\Delta), \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = -\varepsilon Z(x, -\Delta), \end{cases}$$

($\varepsilon = -1$ pour Δ premier, $\varepsilon = +1$ pour Δ composé; sont exclues les valeurs de $\Delta = 3, 4, 8$ et $D = 8$).

Ces relations permettent d'étudier les valeurs complexes $Y(i)$ et $Z(i)$; les coefficients de ces fonctions étant réels, les valeurs $Y(i)$ et $Y(-i)$ seront conjuguées, ainsi que les quantités $Z(i)$ et $Z(-i)$; nous aurons besoin de la valeur de $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$ et de $\frac{1}{2}\varphi(D)$ pour le module 4.

Si Δ est composé, on a toujours $\frac{1}{2}\varphi(\Delta) \equiv 0 \pmod{4}$, tandis que pour Δ premier, $\frac{1}{2}\varphi(\Delta) = \frac{\Delta - 1}{2}$ est impair.

Si $D > 0$ est composé, on aura, en général, $\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 0 \pmod{4}$, mais il y a l'exception, si $D = 4P$, $P \equiv 3 \pmod{4}$ et premier, puis si $D = p_1 p_2$, les deux premiers $p_1 p_2$ étant congrus avec 3 pour le module 4; dans ces deux cas on aura :

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 2 \pmod{4},$$

Si $D > 0$ et $\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 0 \pmod{4}$, les formules (21) donnent :

$$Y(i, D) = Y(-i, D), \quad Z(i, D) = Z(-i, D),$$

et les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ sont par conséquent des entiers réels.

Si $D > 0$, mais $\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 2 \pmod{4}$, on aura :

$$Y(-i, D) = -Y(i, D), \quad Z(-i, D) = -Z(i, D),$$

et les deux quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront, ou purement imaginaires, ou nulles en partie.

Si $D = -\Delta$ est composé et par conséquent $\frac{1}{2}\varphi(\Delta) \equiv 0 \pmod{4}$, $\varepsilon = 1$, on a :

$$Y(-i) = Y(i), \quad Z(-i) = -Z(i),$$

d'où il suit que $Y(i)$ est réel, $Z(i)$ purement imaginaire.

Si $D = -\Delta$ est premier, et alors $\varepsilon = -1$, les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront essentiellement complexes; on trouve aisément, comme conséquence de (21) :

$$Y(i) = \left(1 + (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) y, \quad Z(i) = \left(1 - (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) z,$$

y et z étant réels.

Dans ce dernier cas on a $F(i)=i$, et il s'ensuit que ces nombres y et z donnent une solution de l'équation indéterminée

$$y^2-\Delta z^2=2(-1)^{\frac{\Delta+1}{4}}.$$

Pour les cas exclus $D=-3, -4, \pm 8$, les recherches seraient inutiles, puisque les expressions Y et Z sont très simples :

$$\begin{array}{lll}
D=-3, & Y=2x+1, & Z=1, \\
D=-4, & Y=2x, & Z=1, \\
D=-8, & Y=2x^2-2, & Z=x, \\
D=+8, & Y=2x^2+2, & Z=x.
\end{array}$$

5. Nous allons maintenant déterminer les valeurs $Y(1)$ pour Δ composé et $Z(1)$ pour Δ premier, en supposant $D=-\Delta$. La valeur $A(1)$ de la fonction $A(x)$ pour $x=1$ s'obtient directement de la définition,

$$(a)\qquad A(1)=\prod_a\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\,e^{\frac{\pi i}{\Delta}\sum a}\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right);$$

la quantité réelle et positive

$$\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right)$$

représente la valeur absolue de $A(1)$ et sera, par conséquent, égale à 1 si Δ est composé; il s'ensuit dans ce cas, si l'on substitue $\sum\frac{a}{\Delta}=\frac{1}{4}\varphi(\Delta)-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$,

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\cdot e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)},$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

d'où, $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ étant pair pour Δ composé,

$$A(1)=(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)},\qquad Y(1)=(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)}2.$$

Si, au contraire, Δ est premier, on a $Y(1)=0$, $Z(1)=\pm 2$, et, par conséquent :

$$A(1)=-\tfrac{1}{2}i\sqrt{\Delta}\,Z(1), \tag{b}$$

$|A(1)|=\sqrt{\Delta}$, et on tire de (a) :

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)}\cdot\sqrt{\Delta},$$

ou bien :

$$A(1)=-i\cdot\sqrt{\Delta}\cdot(-1)^{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Cl}(-\Delta)-1\right)},$$

d'où, en comparant avec (b) :

$$Z(1)=(-1)^{\frac{1}{2}\left(\mathrm{Cl}(-\Delta)-1\right)}2.$$

En portant ces valeurs dans les relations (19^a) et (19^b), nous aurons :

$$(19^*)\left\{\begin{array}{ll} Y'(1,\,-\Delta)=(-1)^{\frac{\mathrm{Cl}(-\Delta)-1}{2}}\Delta\,\mathrm{Cl}(-\Delta), & \text{si } \Delta \text{ est premier} > 3,\\ Z'(1,\,-\Delta)=-(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)}\mathrm{Cl}(-\Delta), & \text{si } \Delta \text{ est composé} > 8. \end{array}\right.$$

Observons que notre réponse dans le cas de Δ premier,

$$Z(1)=(-1)^{\frac{\mathrm{Cl}(-\Delta)-1}{2}}\cdot 2,$$

ne détermine le signe de $Z(1)$ qu'à l'aide du nombre des classes; cette question, qui revient à déterminer le reste suivant le module 4 du nombre $\mathrm{Cl}(-\Delta)$, avait occupé Dirichlet, Jacobi, Kronecker et Liouville, sans que leurs efforts aient été couronnés par un succès satisfaisant; la question est beaucoup plus facile, mais aussi beaucoup moins intéressante si Δ est un nombre composé, et nous en rencontrerons une complète solution.

On peut obtenir aussi aisément les valeurs $Y(-1)$ et $Z(-1)$ dans le cas de $D=-\Delta$; car on a toujours, si l'on ne tient pas compte des valeurs exceptées 3, 4 et 8, $F(-1)=1$, et, par conséquent :

$$Z(-1)^2+\Delta Z(-1)^2=4,$$

ce qui exige que l'on ait :

$$Z(-1)=0, \quad Y(-1)=\pm 2.$$

On a donc, en faisant usage de la définition (1^a),

$$\frac{1}{2}Y(-1)=A(-1)=\prod_a\left(-1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right)$$

ou bien :

$$\frac{1}{2}Y(-1)=(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\,e^{\sum\frac{a\pi i}{\Delta}}\prod\left(2\cos\frac{a\pi}{\Delta}\right).$$

Cela posé, employons la valeur

$$\sum\frac{a}{\Delta}=\frac{1}{4}\varphi(\Delta)-\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)$$

et observons que la valeur absolue de $\frac{1}{2}Y(-1)$ étant l'unité, on aura :

$$\prod_a\left(2\cos\frac{a\pi}{\Delta}\right)=(-1)^{N},$$

si N parmi les a appartiennent à l'intervalle $\left(\frac{\Delta}{2}\cdots\Delta\right)$, il vient :

$$\frac{1}{2}Y(-1)=(-1)^{N+\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\,i^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-\mathrm{Cl}(-\Delta)}.$$

D'après la définition du nombre N, on a :

$$2N = \sum_{\nu=\left[\frac{1}{2}\Delta\right]+1}^{\Delta} \left(1+\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\right)\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right),$$

ou bien :

$$2N = \sum \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) + \sum \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right), \qquad \left(\frac{\Delta}{2} < \nu < \Delta\right).$$

La première somme est $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$, la seconde $-\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)$, et, par conséquent :

$$(-1)^N = i^{-2N} = i^{-\frac{1}{2}\varphi(\Delta)+\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)},$$

d'où il suit :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Y}(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}\, i^{\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta)}.$$

Si Δ est impair, $1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)$ est toujours pair et on pourra écrire :

$$(22^a) \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Y}(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)+\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)};$$

ceci aura lieu aussi pour Δ composé, car dans ce cas $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ sera pair, mais il faudra distinguer les deux cas :

Si Δ est premier, on aura $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$ impair, $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ impair et par conséquent :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Y}(-1) = -(-1)^{\frac{1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{2}} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right);$$

on aura :

$$\mathrm{Y}(-1) = 2,$$

si Δ est composé et impair.

Mais si Δ est pair et plus grand que 8, la formule (22^a) devient :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Y}(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)},$$

et il faut déterminer le reste du nombre des classes suivant le module 4. La décomposition des classes en genres fait voir que $\mathrm{Cl}(-\Delta)$ est divisible par 4, si Δ admet trois diviseurs premiers, et on aura pour $\Delta = 4m$ ou $\Delta = 8m$:

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)} = 1,$$

si m est composé.

Nous devons donc encore examiner les cas de $\Delta = 4p$, $\Delta = 8p$, p désignant un nombre premier.

Dans le premier cas, p sera nécessairement de la forme $4k+1$, et la formule

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-4p) = \sum_{\alpha=1}^{\left[\frac{1}{4}p\right]} \left(\frac{p}{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

fait voir que le premier membre est de la même parité que k; on aura donc :

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-4p)} = (-1)^k = \left(\frac{2}{p}\right).$$

Dans le deuxième cas $\Delta = 8p$, le nombre p pourra avoir l'une ou l'autre des deux formes $4k+1$ et $4k+3$, et les formules (37) et (40) du chapitre II donnent :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8p) = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}k\right]} \left(\frac{p}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3k}{2}\right]+1}^{2k} \left(\frac{p}{\nu}\right), \qquad p = 4k+1,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8p) = \sum_{\left[\frac{1}{2}k\right]+1}^{\left[\frac{3k}{2}\right]+1} \left(\frac{-p}{\nu}\right), \qquad p = 4k+3.$$

Dans la première formule le nombre des termes est :

$$\left[\frac{1}{2}k\right]+2k-\left[\frac{3k}{2}\right]\equiv\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{3k}{2}\right] \pmod{2},$$

et il est aisé de voir que ceci est de la même parité que k, d'où :

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8p)}=\left(\frac{2}{p}\right).$$

Dans la deuxième formule, on a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8p)\equiv\left[\frac{3k}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]+1\equiv\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{3k}{2}\right]+1\equiv k+1 \pmod{2};$$

si $k=2h$ est pair, on a $p=8h+3$, $\left(\frac{2}{p}\right)=-1=(-1)^{k+1}$;

si $k=2h-1$ est impair, on a $p=8h+1$, $\left(\frac{2}{p}\right)=1=(-1)^{k+1}$;

donc on a aussi, dans le second cas :

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-8p)}=\left(\frac{2}{p}\right).$$

Nous avons donc la formule

$$(23) \qquad (-1)^{\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-\Delta)}=\left(\frac{2}{p}\right),$$

si $\Delta=4p$ ou $8p$, p premier; naturellement pour $\Delta=4p$ il faut que $p\equiv 1 \pmod{4}$, sans quoi $-\Delta$ ne pourrait être un discriminant fondamental.

En résumant ce que nous venons de trouver au sujet de la formule (22^a), nous avons le théorème suivant :

$$(22) \qquad \frac{1}{2}\mathrm{Y}(-1,-\Delta)=\begin{cases} -\left(\frac{2}{\Delta}\right) \text{ pour } \Delta \text{ premier;} \\ \left(\frac{2}{p}\right) \text{ pour } \Delta=4p \text{ ou } 8p,\ p \text{ premier;} \\ 1 \text{ pour } \Delta \text{ composé contenant au moins} \\ \quad \text{deux facteurs impairs.} \end{cases}$$

En portant ces résultats dans la formule (14) qui, à cause de $Z(-1)=0$, se simplifie comme il suit pour Δ *impair* :

$$Q(-1)=Y(-1)Z'(-1),$$

nous aurons une formule nouvelle si nous exprimons $Q(-1)$ d'une manière simple. De la définition

$$Q(x)=\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)x^{\nu}=\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)(1+x^{\nu})$$

on tire :

$$Q(-1)=2\sum\left(\frac{-\Delta}{2\nu}\right)\left(\nu=1,\ 2,\ldots\frac{\Delta-1}{2}\right)$$

ou bien

$$Q(-1)=\left(\frac{2}{\Delta}\right)\frac{4}{\tau}\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta),\qquad \tau=2,$$

et nous aurons le résultat suivant :

$$(24)\qquad Z'(-1,\ -\Delta)=\begin{cases}-\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ \quad\text{pour } \Delta \text{ premier;} \\ \left(\frac{2}{\Delta}\right)\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\Delta) \\ \quad\text{pour } \Delta \text{ composé impair.}\end{cases}$$

En supposant Δ *pair*, différentions les deux membres de (14) et posons $x=-1$; il vient :

$$\frac{Q'(-1)}{\Delta}=\frac{1}{2}Y(-1)Z'(-1);$$

or on a :

$$\frac{Q'(-1)}{\Delta} = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)(-1)^{\nu-1}\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{\lambda=1,3,5,\ldots} \left(\frac{-\Delta}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} = \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}$$
$$= -\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

et, en faisant usage de (22), nous aurons *pour* $\Delta = 4m$ *ou* $\Delta = 8m$:

$$(24^a) \qquad Z'(-1, -\Delta) = \begin{cases} -\left(\frac{2}{m}\right)\mathrm{Cl}(-\Delta), & \text{si } m \text{ est premier;} \\ -\mathrm{Cl}(-\Delta), & \text{si } m \text{ est composé.} \end{cases}$$

6. Nous allons montrer comment pourront s'obtenir les fonctions Y et Z pour un discriminant produit D_1D_2 en les supposant connues pour les discriminants facteurs D_1 et D_2.

Soient en effet D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux premiers entre eux, Δ_1 et Δ_2 leurs valeurs absolues; le produit $D_1D_2 = D$ sera aussi un discriminant fondamental, et il sera

$$A(x, D_1D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Le nombre $a = \Delta_1 + \Delta_2$ est premier avec $\Delta_1\Delta_2$ et on pourra remplacer l'indice ν par $a\nu$; il vient :

$$A(x, D_1D_2) = \prod_{\nu}\left(x - e^{\frac{2a\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{a\nu}\right) + \left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)^2\right]};$$

l'un des deux discriminants, soit D_1, sera nécessairement impair; on aura donc :

$$\left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{D_1}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right),$$

et l'expression

$$\left(\frac{D_1D_2}{a}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1+\Delta_2}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right)$$

sera égale à

$$\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\Delta_2^2 \operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right)=\left(\frac{\operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right);$$

ce que l'on peut exprimer par l'équation

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right)=(-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2}\cdot\frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}}=\varepsilon;$$

ε est donc -1, si les deux discriminants sont négatifs, et on a $\varepsilon=+1$ dans les deux autres cas. Ce résultat symétrique serait le même, si l'on avait supposé que D_2 est impair; il est donc général; faisant usage de cette petite remarque et remplaçant

$$\frac{a}{\Delta_1 \Delta_2} \text{ par sa valeur } \frac{1}{\Delta_1}+\frac{1}{\Delta_2},$$

nous aurons :

$$A(x,\, D_1 D_2)=\prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1}+\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)+\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)^2\right]};$$

introduisons, au lieu de ν, les indices ρ et μ par la substitution

$$\nu=\rho+\mu\Delta_1, \qquad (\rho=1,\,2,\,\ldots\,\Delta_1;\quad \mu=0,\,1,\,\ldots\,\Delta_2-1),$$

il vient :

$$A(x,\, D_1 D_2)=\prod_{\rho=1}^{\Delta_1}\prod_{\mu=0}^{\Delta_2-1}\left(x-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}+\frac{2\pi i}{\Delta_2}(\rho+\mu\Delta_1)}\right)^{\sigma_{\rho,\mu}},$$

en posant pour abréger

$$2\sigma_{\rho,\mu}=\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\rho+\mu\Delta_1}\right)+\left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\rho+\mu\Delta_1}\right).$$

Laissant ρ constant, effectuons la multiplication par rapport à μ; alors la quantité $\rho+\mu\Delta_1=\nu$ parcourt un système complet des

IMPRIMERIE NATIONALE.

restes suivant le module Δ_2, de sorte qu'on pourra remplacer ν par les nombres $0, 1, 2, \ldots \Delta_2 - 1$, et puisque pour $\nu = 0$ σ sera nul, on peut supprimer $\nu = 0$ et prendre seulement

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1 - 1} \prod_{\nu=1}^{\Delta_2 - 1} \left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}.$$

En mettant le facteur général

$$x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}} \quad \text{sous la forme} \quad e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}\left(xe^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right),$$

et si l'on fait usage de la valeur de l'expression

$$\sum_\rho \sum_\nu \frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]\rho$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon \sum_\rho \left(\frac{D_1}{\rho}\right)\rho \cdot \sum \left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \frac{1}{2}\sum_\rho \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\rho \cdot \sum_\nu \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)$$

qui résulte des formules connues

$$\sum \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right) = \varphi(\Delta_2), \qquad \sum \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\rho = \frac{1}{2}\Delta_1 \varphi(\Delta_1),$$

on aura l'expression suivante :

$$A(x, D_1 D_2) = e^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta_1)\varphi(\Delta_2)\pi i} \prod_\rho \prod_\nu \left(xe^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma'},$$

où

$$2\sigma' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\rho}\right);$$

le produit $\varphi(\Delta_1)\varphi(\Delta_2)$ étant toujours divisible par 4, le facteur exponentiel disparaît, et si l'on change ρ en $\Delta_1 - \rho$, $2\sigma'$ devient :

$$2\sigma'' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) \operatorname{sgn} D_1 + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right),$$

et nous aurons :

$$\mathrm{A}(x,\ \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1-1}\prod_{\nu=1}^{\Delta_2-1}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma''};$$

dans ce produit on peut supprimer tous les facteurs où ρ n'est pas premier avec Δ_1, car pour eux $\sigma'' = 0$. Pour un ρ fixe, premier avec Δ_1, le produit partiel

$$\prod_{\nu=1}^{\Delta_2-1}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma''}.$$

sera égal à $\mathrm{A}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}},\ \mathrm{D}_2\right)$ ou à $\mathrm{B}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}},\ \mathrm{D}_2\right)$, selon que

$$\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\rho}\right) = \varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\rho}\right) = -\,\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1.$$

Nous sommes amenés à répartir les nombres $1, 2, 3, \cdots \Delta_1 - 1$ en deux catégories α et β composées d'un nombre égal d'éléments en posant la définition

$$(25^a) \qquad \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\alpha}\right) = \varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1, \qquad \left(\frac{\mathrm{D}_1}{\beta}\right) = -\,\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1$$

$$(0 < \alpha < \Delta_1, \quad 0 < \beta < \Delta_1);$$

alors il vient :

$$(25) \qquad \mathrm{A}(x,\ \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2) = \prod_{\alpha} \mathrm{A}\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}},\ \mathrm{D}_2\right) \cdot \prod_{\beta} \mathrm{B}\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}},\ \mathrm{D}_2\right),$$

où, comme je répète,

$$(25^b) \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1-\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1}{2}\cdot\frac{1-\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_2}{2}}, \qquad \varepsilon\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1 = (-1)^{\frac{1-\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_1}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{sgn}\,\mathrm{D}_2}{2}}.$$

On trouve de la même manière :

$$(\overline{25}) \qquad B(x, D_1 D_2) = \prod_{\alpha} B\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \cdot \prod_{\beta} A\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right).$$

Ces deux formules (25) et $(\overline{25})$ résolvent le problème proposé. Si $D_1 D_2$ surpasse une certaine limite, le calcul des fonctions A et B serait incommode; ces formules peuvent faciliter la recherche des valeurs numériques desdites fonctions pour des valeurs particulières de x.

En particulier, ces formules servent à ramener le problème aux discriminants impairs.

Soit $D_2 = -\Delta$ un discriminant fondamental impair, et prenons $D_1 = -4$; on a :

$$\varepsilon \operatorname{sgn} D_1 = 1, \qquad \text{donc} \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 3.$$

$$(26) \qquad \begin{cases} A(x, 4\Delta) = A(ix, -\Delta)\, B(-ix, -\Delta), \\ B(x, 4\Delta) = A(-ix, -\Delta)\, B(ix, -\Delta). \end{cases}$$

Soit en second lieu $D_2 = D$ un discriminant fondamental positif impair, et posons $D_1 = -4$; alors :

$$\varepsilon \operatorname{sgn} D_1 = -1, \qquad \text{de sorte que} \qquad \alpha = 3, \qquad \beta = 1;$$

on aura donc :

$$(27) \qquad \begin{cases} A(x, -4D) = A(-ix, D)\, B(ix, D), \\ B(x, -4D) = A(ix, D)\, B(-ix, D). \end{cases}$$

En conservant la même valeur D_2, prenons $D_1 = 8$; on aura :

$$\varepsilon \operatorname{sgn} D_1 = 1, \quad \text{et, par conséquent,} \quad \alpha = 1, 7 \quad \text{et} \quad \beta = 3, 5;$$

posant pour abréger

$$j = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

nous aurons :

$$(28) \quad \begin{cases} A(x,\ 8D) = A(jx,\ D)\,A(j^{-1}x,\ D)\,B(j^3x,\ D)\,B(j^{-3}x,\ D), \\ B(x,\ 8D) = B(jx,\ D)\,B(j^{-1}x,\ D)\,A(j^3x,\ D)\,A(j^{-3}x,\ D). \end{cases}$$

On aurait obtenu les formules suivantes, si l'on avait choisi $D_1 = -8$:

$$(29) \quad \begin{cases} A(x,\ -8D) = A(j^{-1}x,\ D)\,A(j^{-3}x,\ D)\,B(jx,\ D)\,B(j^3x,\ D), \\ B(x,\ -8D) = B(j^{-1}x,\ D)\,B(j^{-3}x,\ D)\,A(jx,\ D)\,A(j^3x,\ D). \end{cases}$$

On trouve enfin :

$$(30) \qquad A(x, 8\Delta) = A(jx, -\Delta)\,A(j^3x, -\Delta)\,B(j^{-1}x, -\Delta)\,B(j^{-3}x, -\Delta),$$

$$(29^a) \quad A(x, -8\Delta) = A(jx, -\Delta)\,A(j^{-1}x, -\Delta)\,B(j^3x, -\Delta)\,B(j^{-3}x, -\Delta).$$

Cette dernière formule est contenue dans (29) si l'on y remplace D par $-\Delta$; par conséquent, la formule (29) a lieu pour des discriminants impairs D, positifs ou négatifs.

7. Considérons les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ pour un discriminant positif; elles sont évidemment réelles pour x réel, puis elles sont positives pour $x = 0$, et ne pouvant jamais s'annuler, elles restent positives pour les valeurs réelles de la variable.

En supposant que dans (7) le logarithme est pris dans le sens arithmétique, on a donc $\log c = 0$ et, par conséquent,

$$(a) \qquad \log\frac{B(x)}{A(x)} = \sqrt{D}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu}, \qquad |x| < 1 ;$$

en passant à la limite pour $x = 1$, le second membre devient :

$$\sqrt{D} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{1}{\mu} = \mathrm{Cl}(D) \log E(D),$$

d'où cette formule célèbre de Dirichlet :

$$(31) \qquad \mathrm{Cl}(D) \log E(D) = \log \frac{B(1)}{A(1)},$$

ou bien

$$(31^*) \qquad \mathrm{Cl}(D) \log E(D) = \log \frac{Y(1, D) + \sqrt{D}\, Z(1, D)}{Y(1, D) - \sqrt{D}\, Z(1, D)}.$$

Ce résultat ramène le calcul du nombre des classes $\mathrm{Cl}(D) = H$ à la détermination de l'exposant dans l'équation algébrique

$$\frac{Y + \sqrt{D}\, Z}{Y - \sqrt{D}\, Z} = \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^{H}, \qquad \big(Y = Y(1), \quad Z = Z(1)\big),$$

dont les éléments sont définis, mais non exprimés, d'une manière algébrique; cette circonstance est bien remarquable, puisqu'elle laisse espérer qu'on parvient à une expression du nombre des classes où les signes de Legendre ne figurent pas.

Prenons dans l'équation (a) $x = -1$, on aura, au second membre,

$$\sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{(-1)^{\mu}}{\mu} = \sqrt{D} \sum \left(\frac{D}{2\nu}\right) \frac{1}{2\nu} - \sqrt{D} \sum \left(\frac{D}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{D} \left(\frac{2}{D}\right) \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} - \sqrt{D} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{1}{\nu} \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{D}\right) \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\left(1 - \left(\frac{2}{D}\right)\right) \mathrm{Cl}(D) \log E(D)$$

et, par conséquent,

$$(32) \qquad \left[1 - \left(\frac{2}{D}\right)\right] \mathrm{Cl}(D) \log E(D) = \log \frac{Y(-1, D) - \sqrt{D}\, Z(-1, D)}{Y(-1, D) + \sqrt{D}\, Z(-1, D)};$$

si donc

$$D \equiv 1 \pmod{8},$$

la fonction $Z(x, D)$ sera divisible par $x+1$; dans ce cas, $Z(1, D)$ est toujours pair, ce qui est connu.

Si l'on prend $x = i$ dans l'équation (a), il vient :

$$\log \frac{B(i)}{A(i)} = \sqrt{D} \sum_1^\infty \left(\frac{D}{2\nu}\right) \frac{(-1)^\nu}{2\nu} + \frac{i}{2}\sqrt{4D} \sum_1^\infty \left(\frac{-4D}{\nu}\right)\frac{1}{\nu},$$

d'où

$$(33) \qquad \log \frac{B(i)}{A(i)} = \frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2} \operatorname{Cl}(D) \log E(D) + \frac{\pi i}{2} \operatorname{Cl}(-4D) \qquad (D \text{ impair});$$

la valeur absolue de la quantité réelle

$$\frac{Y(i) + \sqrt{D}\, Z(i)}{Y(i) - \sqrt{D}\, Z(i)}$$

est donc la quantité

$$E(D)^{\frac{1-\left(\frac{2}{D}\right)}{2} \operatorname{Cl}(D)}, \quad \text{si } D \text{ est impair.}$$

On parvient également à des résultats simples si l'on pose

$$x = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad e^{\frac{2\pi i}{8}}.$$

Revenons sur l'équation (31^*) en écrivant Y et Z au lieu de $Y(1)$, $Z(1)$; la relation

$$(b) \qquad Y^2 - DZ^2 = 4F, \qquad F = F(1)$$

fait voir qu'on a :

$$\frac{1}{2} \operatorname{Cl}(D) \log E(D) = \log \frac{Y + Z\sqrt{D}}{2\sqrt{F}}.$$

Pour D composé plus grand que 8, on a $F=1$; les entiers Y et Z satisferont à l'équation de Fermat :

$$Y^2-DZ^2=4,$$

et on aura, comme on sait, μ étant un entier,

$$\frac{Y+\sqrt{D}\,Z}{2}=E^\mu,$$

d'où $\mathrm{Cl}(D)=2\mu$.

Pour des discriminants fondamentaux composés plus grands que 8, le nombre des classes est donc toujours pair.

Si, au contraire, D est un nombre premier, on a $F=D$ et l'équation (*b*) fait voir qu'il faut mettre

$$Y=Dz, \qquad Z=y;$$

les entiers z et y satisferont à l'équation

$$y^2-Dz^2=-4;$$

et non à l'équation de Fermat; on ne peut pas avoir

$$\frac{y+z\sqrt{D}}{2}=E^\mu(D)$$

où μ serait entier; mais on a :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D)=\log\frac{y+z\sqrt{D}}{2},$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{y+z\sqrt{D}}{2}\right)^2=E^H(D), \qquad H=\mathrm{Cl}(D);$$

il s'ensuit que H est impair.

Donc, pour les discriminants fondamentaux positifs et premiers, le nombre des classes est impair.

Passons maintenant au cas de $D = 4\Delta$, où Δ est un nombre premier, naturellement de la forme $4k+3$. Les formules (26) donnent

$$\frac{B(1, 4\Delta)}{A(1, 4\Delta)} = \frac{A(-i, -\Delta)\, B(i, -\Delta)}{A(i, -\Delta)\, B(-i, -\Delta)};$$

or, en posant $(-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} = \sigma$, on a pour $\Delta > 3$:

$$Y(i, -\Delta) = (1 + \sigma i) y, \qquad Z(i, -\Delta) = -i\sigma(1 + \sigma i) z,$$
$$Y(-i, -\Delta) = (1 - \sigma i) y, \qquad Z(-i, -\Delta) = i\sigma(1 - \sigma i) z;$$

les entiers y et z satisfont à l'équation

$$y^2 - \Delta z^2 = 2\sigma.$$

En substituant les valeurs qu'on vient de noter, il vient :

$$\frac{B(1, 4\Delta)}{A(1, 4\Delta)} = \left(\frac{y + \sigma z\sqrt{\Delta}}{y - \sigma z\sqrt{\Delta}}\right)^2 = \frac{(y + \sigma z\sqrt{\Delta})^4}{4},$$

d'où il suit :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(4\Delta)\log E(4\Delta) = \log\frac{(y + \sigma z\sqrt{\Delta})^2}{2}.$$

Si le nombre $\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(4\Delta) = \mu$ était pair, on aurait :

$$\left|\frac{y + \sigma z\sqrt{\Delta}}{\sqrt{2}}\right| = E^{\frac{1}{2}\mu}(4\Delta) = \frac{t + u\sqrt{4\Delta}}{2},$$

où t et u sont deux entiers positifs; il faudrait donc qu'on eût :

$$y + \sigma z\sqrt{\Delta} = \pm\frac{1}{2}\left(t\sqrt{2} + 2u\sqrt{2\Delta}\right),$$

équation impossible; il s'ensuit que μ est nécessairement impair

IMPRIMERIE NATIONALE.

Nous avons ainsi démontré la congruence

$$(34)\qquad \mathrm{Cl}(4\Delta) \equiv 2 \pmod{4} \quad (\Delta \text{ premier supérieur à } 3);$$

ce fait mérite l'attention parce qu'il distingue les discriminants positifs des discriminants négatifs; pour ces derniers, l'équation (23) donne :

$$\mathrm{Cl}(4\mathrm{D}) \equiv 1 - \left(\frac{2}{\mathrm{D}}\right) \pmod{4} \quad (\mathrm{D} \text{ premier}).$$

Il paraît impossible d'établir ces deux dernières congruences comme conséquences d'une théorie algébrique commune aux deux catégories des formes, analogue par exemple à celle de la composition.

Si les discriminants D_1 et D_2 ont le même signe, alors dans les formules (25) et $(\overline{25})$ les α seront les nombres a et les β les nombres b correspondant au discriminant D_1; nous les désignerons par a_1 et b_1, de sorte que

$$\left(\frac{D_1}{a_1}\right) = +1, \qquad \left(\frac{D_1}{b_1}\right) = -1;$$

lesdites formules donnent par division, en substituant $x = 1$,

$$(35)\qquad \frac{B(1, D_1 D_2)}{A(1, D_1 D_2)} = \prod_{a_1} \frac{B\left(e^{\frac{2a_1\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right)}{A\left(e^{\frac{2a_1\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right)} : \prod_{b_1} \frac{B\left(e^{\frac{2b_1\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right)}{A\left(e^{\frac{2b_1\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right)},$$

ce qui ramène le calcul du nombre des classes d'un discriminant positif composé à la recherche des polynômes Y et Z correspondant à l'un de ses facteurs.

On peut présenter ce fait sous une forme plus intéressante en faisant usage d'un théorème élémentaire de la théorie de l'élimination.

Posons pour abréger :

$$A(x,\ D_1)=A_1,\qquad B(x,\ D_1)=B_1,\qquad \text{etc.},$$

et *représentons par* $R(A_1,\ A_2)$ *le résultant* (de l'élimination de x) *des deux polynômes* A_1 et A_2; on a, comme on sait :

$$R(A_1,\ A_2)=\prod_{a_1} A_2\left(e^{\frac{2a_1\pi i}{\Delta_1}}\right),\qquad R(A_1,\ B_2)=\prod_{a_1} B_2\left(e^{\frac{2a_1\pi i}{\Delta_1}}\right),$$

$$R(A_2,\ B_1)=\prod_{b_1} A_2\left(e^{\frac{2b_1\pi i}{\Delta_1}}\right),\qquad R(B_1,\ B_2)=\prod_{b_1} B_2\left(e^{\frac{2b_1\pi i}{\Delta_1}}\right),$$

et l'équation (35) donnera :

$$(35^*)\qquad \frac{B(1,\ D_1D_2)}{A(1,\ D_1D_2)}=\frac{R(A_1,B_2)}{R(A_1,A_2)}:\frac{R(B_1,\ B_2)}{R(B_1,\ A_2)},$$

de sorte qu'on a :

$$(35^a)\qquad \mathrm{Cl}(D_1D_2)\log E(D_1D_2)=\log\frac{R(A_1,\ B_2)}{R(A_1,\ A_2)}-\log\frac{R(B_1,\ B_2)}{R(B_1,\ A_2)};$$

l'état actuel de la théorie de l'élimination et de celle des polynômes Y et Z permet à peine d'en tirer quelque conséquence arithmétique; ce fait mérite cependant d'être signalé.

8. La dernière formule peut s'établir directement au moyen de l'équation (7) et avec moins d'hypothèses; mettons les polynômes $2A(x)$ et $2B(x)$ sous leur forme explicite en Y et Z et employons l'écriture abrégée $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ pour $Y(x,\ D_1)$ et $Z(x,\ D_1)$. La formule (7) s'écrira :

$$\operatorname{sgn} D_1\cdot\sqrt{D_1}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D_1}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu}=\log\frac{Y_1(x)+\sqrt{D_1}\,Z_1(x)}{Y_1(x)-\sqrt{D_1}\,Z_1(x)}-\log c,$$

où la quantité c a été définie plus haut.

Cela étant, soit D_2 un nouveau discriminant fondamental, non nécessairement premier avec D_1, Δ_2 sa valeur absolue; remplaçons x par $xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}$, multiplions les deux membres de l'équation ainsi obtenue par $\left(\frac{D_2}{h}\right)$ et ajoutons pour $h = 1, 2, 3, \cdots \Delta_2 - 1$. Il vient :

$$\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D_1 D_2}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu} \tag{36}$$
$$= \sum_{h=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h}\right)\log\frac{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)+\sqrt{D_1}\,Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)-\sqrt{D_1}\,Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)},$$

Si $D_1 D_2$ est négatif, la partie réelle disparaîtra et la formule ne nous fournit rien à cause de l'indétermination du logarithme; mais si $D_1 D_2$ est positif, c'est-à-dire si D_1 et D_2 sont du même signe, le premier membre sera réel et on peut négliger partout la partie imaginaire des logarithmes si elle doit se présenter dans certains termes. On a pour $x = 1$, au premier membre la série

$$\sqrt{D_1 D_2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D_1 D_2}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} = \mathrm{Cl}(D_1 D_2)\log E(D_1 D_2),$$

puisque la quantité $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\operatorname{sgn} D_1$ est réelle et positive, si le produit $D_1 D_2$ est positif. On a ainsi la relation

$$\mathrm{Cl}(D_1 D_2)\log E(D_1 D_2) \tag{36*}$$
$$= \sum_{h=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h}\right)\log\left|\frac{Y\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}, D_1\right)+\sqrt{D_1}\,Z\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}, D_1\right)}{Y\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}, D_1\right)-\sqrt{D_1}\,Z\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}, D_1\right)}\right|,$$

qui fait voir que la connaissance des fonctions Y et Z pour les valeurs de x qui sont les racines de l'unité signifie un certain progrès de l'arithmétique des formes. Remarquons que les termes du second membre sont égaux deux à deux, de sorte qu'il suffit de prendre $h < \frac{D}{2}$ en doublant le résultat.

Citons quelques formules particulières :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(3\Delta)\log E(3\Delta) = \log\left|\frac{Y\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -\Delta\right) + i\sqrt{\Delta}\,Z\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -\Delta\right)}{Y\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -\Delta\right) - i\sqrt{\Delta}\,Z\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -\Delta\right)}\right|,$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(4\Delta)\log E(4\Delta) = \log\left|\frac{Y(i) + i\sqrt{\Delta}\,Z(i)}{Y(i) - i\sqrt{\Delta}\,Z(i)}\right|,$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(5D)\log E(5D) = \log\left|\frac{Y\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right) + \sqrt{D}\,Z\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)}{Y\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right) - \sqrt{D}\,Z\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)}\,\frac{Y\left(e^{\frac{4\pi i}{5}}\right) - \sqrt{D}\,Z\left(e^{\frac{4\pi i}{5}}\right)}{Y\left(e^{\frac{4\pi i}{5}}\right) + \sqrt{D}\,Z\left(e^{\frac{4\pi i}{5}}\right)}\right|,$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(3\Delta)\log E(3\Delta) = \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\left|\frac{e^{\frac{2h\pi i}{\Delta}} + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{e^{\frac{2h\pi i}{\Delta}} + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}\right|$$

$$= \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \log\left|\frac{\cos\pi\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{1}{6}\right)}{\cos\pi\left(\frac{h}{\Delta} + \frac{1}{6}\right)}\right|.$$

Pour $D_1 = 12$, on a :

$$Y = 2x^2 + 2, \qquad Z = x,$$

et on trouve donc :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(12D)\log E(12D) = \sum_{h=1}^{\left[\frac{1}{2}D\right]} \left(\frac{D}{h}\right) \log\left|\frac{2\cos\frac{2h\pi}{D} + \sqrt{3}}{2\cos\frac{2h\pi}{D} - \sqrt{3}}\right|.$$

9. Je me contente de noter rapidement que la formule générale

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \cot\frac{k\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

qu'on peut écrire sous forme imaginaire

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{k}\right)\frac{1}{1-e^{\frac{2k\pi i}{\Delta}}}=\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

donne naissance à la congruence suivante, où $-\Delta$ est un discriminant fondamental :

$$(37)\quad \prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\cdot\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\equiv\frac{2}{\tau}\,\mathrm{F}(1)\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\,\mathrm{Q}(x)\quad [\mathrm{mod.}\ \mathrm{F}(x)];$$

en effet, pour $x=e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$, les deux membres sont égaux et leur différence doit par conséquent admettre le diviseur irréductible $\mathrm{F}(x)$.

On a une congruence analogue pour les discriminants fondamentaux positifs; posant, pour abréger,

$$\mathrm{G}(x)=\prod_b(1-x^b),\qquad \left(\left(\frac{\mathrm{D}}{b}\right)=-1,\quad 0<b<\mathrm{D}\right),$$

on aura :

$$(38)\qquad \left(\frac{\mathrm{T}+\mathrm{UQ}(x)}{2}\right)^{\mathrm{Cl}(\mathrm{D})}\equiv\frac{\mathrm{G}^2(x)}{\mathrm{F}(1)}\quad [\mathrm{mod.}\ \mathrm{F}(x)].$$

Mais en essayant de changer ces congruences fonctionnelles en congruences numériques en attribuant à x une valeur convenable, on se fatigue par de très grands nombres sur lesquels on devrait opérer.

Je termine ces matières par la remarque suivante. La formule suivante, qui résulte de (5) et (11),

$$(\mathrm{A})\qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{x-e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}}=i\sqrt{\Delta}\,\frac{\mathrm{Z}(x)\,\mathrm{Y}'(x)-\mathrm{Y}(x)\,\mathrm{Z}'(x)}{2\,\mathrm{F}(x)},$$

permet d'établir plusieurs formules dans lesquelles intervient le nombre des classes d'un discriminant négatif fondamental; on les obtient en faisant $x = \pm 1$, $\pm i$, $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; pour ces valeurs, la transformation du premier membre n'offre aucune difficulté, et je me borne donc à signaler les résultats.

En posant $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, le premier membre devient :

$$\frac{i}{2} e^{-\frac{2r\pi i}{s}} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi,$$

et l'équation (A) prend la forme

$$(39) \qquad x\frac{Z(x)\,Y'(x) - Y(x)\,Z'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi,$$

où $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$ et $-\Delta$ signifie un discriminant fondamental négatif.

Pour certaines valeurs particulières, le second membre s'exprime à l'aide du nombre des classes; on y parvient en faisant usage de la série

$$\pi \cot x\pi = \lim_{m=\infty} \sum_{k=-m}^{m} \frac{1}{x+k};$$

parmi les formules qu'on obtient de la sorte, j'ai vérifié les suivantes

$$(B) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(1 - 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \mathrm{Cl}(-\Delta),$$

$$(C) \quad \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{3}\right)\pi = -\left(1 + 3\left(\frac{\Delta}{3}\right)\right) \frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) \quad (r = 1, 2),$$

et celle-ci, dans laquelle Δ est impair,

$$(D) \quad \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) \cot\left(\frac{h}{\Delta} - \frac{r}{4}\right)\pi = \left(2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right) \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} \mathrm{Cl}(-\Delta) \quad (r = 1, 3).$$

J'ai cherché aussi la valeur du premier membre de (B) pour les discriminants généraux; ainsi la formule (B) subsiste pour tous les discriminants impairs, tandis que pour les discriminants pairs, on a les équations :

$$(\mathrm{B}^1) \qquad \sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \pm\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) \qquad \big(\Delta\equiv\pm 4\ (\mathrm{mod.}\ 16)\big),$$

$$(\mathrm{B}^2) \qquad \sum_1^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = (-1)^{\frac{1}{8}\Delta-1}\,\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) \qquad \big(\Delta\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ 8)\big).$$

10. Je veux essayer d'obtenir quelques sommes présentant une certaine analogie avec celles de Gauss en m'appuyant sur des principes purement arithmétiques.

Représentons par $\Psi(n, m)$ le nombre de solutions de la congruence

$$x^2 \equiv n \pmod{m},$$

en supposant que le module m est la valeur absolue d'un discriminant fondamental. Les facteurs premiers impairs de ce nombre doivent être affectés du signe positif ou négatif, choisi de telle sorte que leurs valeurs algébriques soient des discriminants; cela veut dire que, si $q = |p|$ est un facteur premier impair de m, on doit poser :

$$p = (-1)^{\frac{q-1}{2}}\, q.$$

La propriété élémentaire de la fonction $\Psi(n, m)$, qui consiste dans la formule

$$\Psi(n, m')\,\Psi(n, m'') = \Psi(n, m'm''),$$

laquelle a lieu pour deux modules quelconques premiers entre eux, conduit aisément à la détermination générale de la fonction Ψ. Les résultats auxquels on parvient se résument d'une manière assez commode par le théorème suivant :

Représentons par d l'unité et tous les autres diviseurs du nombre m, pris avec un signe convenable pour que d soit un discriminant fondamental; alors on a

$$\text{(A)} \qquad \Psi(n, m) = \sum_d \left(\frac{d}{n}\right),$$

pourvu qu'un des deux nombres m et n au moins soit impair; mais on a

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{2}\Psi(4n, m) = \sum_d \left(\frac{d}{4n}\right), \quad \textit{si m est pair.}$$

Soit $f(z)$ une fonction arbitraire finie et admettant la période 1; nous allons évaluer la somme

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right).$$

On aura, à cause de la périodicité, $f\left(\frac{k^2}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right)$, si $k^2 \equiv n$ (mod. m), $0 \leqq n < m$, et pour n donné, il y a dans notre somme $\Psi(n, m)$ termes égaux à $f\left(\frac{n}{m}\right)$; par conséquent :

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \Psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Supposant m impair, $\Psi(n, m)$ s'exprimera au moyen de (A), et il vient :

$$\text{(C)} \qquad \sum_0^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) f\left(\frac{\nu}{m}\right),$$

où d parcourt les diviseurs de m, pris avec un signe convenable, qui sont ou 1 ou des discriminants fondamentaux; enfin le symbole $\left(\frac{d}{0}\right)$ est l'unité pour $d = 1$ et zéro dans d'autres cas.

Si m est pair, $\pm m$ étant un discriminant fondamental, on aura

$$\Psi(n, m) = \sum_d \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

et

$$\Psi(n, m) = 2 \sum \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \equiv 0 \pmod{4};$$

or tous les n qui sont des résidus quadratiques pour le module m sont ou impairs ou divisibles par 4; on aura donc :

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \sum_d \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right) + \sum_{n'=0}^{\frac{m}{4}-1} \sum_d \left(\frac{d}{4n'}\right) f\left(\frac{4n'}{m}\right),$$

ou, en séparant les n pairs et les n impairs,

$$\text{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_d \sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right) f\left(\frac{\lambda}{m}\right) + 2 \sum_d \sum_{\nu=0}^{\frac{m}{4}-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right) f\left(\frac{4\nu}{m}\right)$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, \cdots m-1).$$

Prenons par exemple pour $f(x)$ la fonction

$$\mathfrak{R}(x) = x - \mathrm{E}(x),$$

appelée le plus petit reste positif de x; elle est évidemment périodique et finie, donc le choix est légitime; soit $\pm\Delta$ un discriminant fondamental *impair*, et prenons $m = \Delta$; la formule (C) devient, dans ce cas

$$\sum_1^{\Delta-1} \mathfrak{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right),$$

ou bien, puisque $\mathfrak{R}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)=\frac{\nu}{\Delta}$,

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\mathfrak{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right)=\sum_{d}\sum_{\nu}^{\Delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}.$$

Si le facteur discriminant d est positif, on a :

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta}=0,$$

et il ne reste que des discriminants facteurs négatifs $d=-\delta$ et puis $d=1$. On sait que

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu=\frac{\Delta}{\delta}\sum_{1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu=-\Delta\cdot\frac{2}{\tau_\delta}\,\mathrm{Cl}(-\delta);$$

les termes provenant de $d=1$ ont la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\frac{\nu}{\Delta}=\frac{\Delta-1}{2};$$

il s'ensuit :

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\mathfrak{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right)=\frac{\Delta-1}{2}-\sum_{\delta}\frac{2}{\tau_\delta}\,\mathrm{Cl}(-\delta) \tag{40}$$

($\pm\Delta$ étant un discriminant fondamental impair dont δ parcourt les diviseurs de la forme $4h+3$)[1].

En remplaçant $\mathrm{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right)$ par sa valeur $\frac{\nu^2}{\Delta}-\mathrm{E}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right)$, on aura

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\mathrm{E}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right)=\frac{(\Delta-1)(\Delta-2)}{3}+\sum_{\delta}\frac{2}{\tau_\delta}\,\mathrm{Cl}(-\delta). \tag{40''}$$

[1] Cette formule est contenue dans une relation plus générale que j'ai obtenue à l'aide des séries infinies.

Si l'on avait fait

$$f(x) = \mathcal{R}\left(\frac{nx}{\Delta}\right),$$

l'entier n étant supposé premier avec Δ, on aurait la formule plus générale

$$(40^*) \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \mathcal{R}\left(\frac{n\nu^2}{\Delta}\right) = \frac{\Delta-1}{2} - \sum_{\delta} \frac{2}{\tau_\delta}\left(\frac{-\delta}{n}\right) \mathrm{Cl}(-\delta).$$

Supposons maintenant Δ pair; on aura :

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{\Delta-1} \mathcal{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = \sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} + 2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\frac{4\nu}{\Delta},$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, \ldots \Delta - 1).$$

Si d est pair, on aura :

$$\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{\Delta} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\frac{\nu}{\Delta} = \sum_{\nu=1}^{|d|-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\frac{\nu}{|d|},$$

ce qui est égal à

$$-\frac{2}{\tau_\delta}\mathrm{Cl}(-\delta) \quad \text{pour} \quad d = -\delta < 0,$$

tandis que cette expression est nulle si $d > 0$.

Pour d impair, $|d| = \delta > 1$, on a :

$$\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\lambda = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\nu - \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{2}\Delta-1}\left(\frac{d}{2\nu}\right)2\nu;$$

et cela est

$$= \frac{\Delta}{\delta}\sum_{1}^{\delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\nu - \left(\frac{2}{\delta}\right)2\cdot\frac{\Delta}{2\delta}\sum_{1}^{\delta-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\nu.$$

Si $d > 0$, cette expression est évidemment o, et elle devient :

$$-\Delta \frac{2}{\tau_\delta}\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \mathrm{Cl}(-\delta) \quad \text{pour} \quad d=-\delta.$$

Pour $d=1$ la somme

$$\sum \left(\frac{d}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{\Delta} \quad \text{sera} \quad \frac{\Delta}{4},$$

et la première partie du deuxième membre de (α) sera :

$$\frac{1}{4}\Delta - \sum_\delta \frac{2}{\tau_\delta}\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \mathrm{Cl}(-\delta);$$

dans la deuxième ne figurent que les d impairs et elle coïncide avec l'expression

$$\frac{1}{4}\Delta - 1 - \sum \frac{4}{\tau_{\delta'}} \mathrm{Cl}(-\delta'),$$

δ' parcourant les diviseurs impairs de Δ; on a donc, pour Δ pair :

$$(41) \quad \sum_1^{\Delta-1} \mathcal{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = \frac{1}{2}\Delta - 1 - \sum_\delta \frac{2}{\tau_\delta}\left[1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\delta) - \sum \frac{4}{\tau_{\delta'}} \mathrm{Cl}(-\delta').$$

On peut réunir les deux sommes au second membre en une seule,

$$\sum \frac{2}{\tau_\delta}\left[1-\left(\frac{2}{\delta}\right)+2\left(\frac{4}{\delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\delta),$$

et on a :

$$(41^*) \quad \sum_1^{\Delta-1} \mathcal{R}\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = \frac{1}{2}\Delta - 1 - \sum_\delta \frac{2}{\tau_\delta}\left[1-\left(\frac{2}{\delta}\right)+2\left(\frac{4}{\delta}\right)\right] \mathrm{Cl}(-\delta),$$

($\pm\Delta$ un discriminant fondamental pair, dont $-\delta$ parcourt les diviseurs qui sont des discriminants négatifs fondamentaux).

Prenons maintenant

$$f(x) = \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*(x),$$

ce qui est bien une fonction à période 1; elle satisfait ensuite à l'équation

$$f(1-x) = -f(x)$$

dont il résulte que les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(\frac{\nu}{\Delta}\right)$$

s'annulent, si d est un discriminant positif contenu dans Δ; car les termes de la suite se détruisent deux à deux en vertu de la circonstance

$$\left(\frac{d}{\Delta-\nu}\right) = \left(\frac{d}{\nu}\right)$$

qui a lieu pour $d > 0$; cela a lieu aussi pour $d = 1$, et il ne reste qu'à considérer le cas où $d < 0$.

Pour calculer la somme

$$\mathrm{S} = \sum_{\nu=1}^{a\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(\frac{\nu}{\Delta}\right), \quad \text{où} \quad a\delta = \Delta,$$

je pose $\nu = \rho + \delta\mu$, ce qui donne :

$$\mathrm{S} = \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{a-1} \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(\frac{\rho}{\Delta} + \frac{\mu}{a}\right).$$

La première sommation s'effectue à l'aide du théorème suivant :

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*\left(x + \frac{\mu}{a}\right) = \operatorname{sgn} \mathrm{R}^*(ax),$$

qui se vérifie immédiatement au moyen de la série trigonométrique (8), chapitre III, et qui devrait s'obtenir aussi comme conséquence d'une formule analogue sur la fonction $E(x)$, laquelle a été donnée par M. Hermite et considérée par M. Stern à maintes reprises; on n'aurait qu'à employer la représentation suivante de la fonction $\operatorname{sgn} R(x)$:

$$4E(x) - 2E(2x) + 1 = \operatorname{sgn} R(x),$$

où il faut prendre $\operatorname{sgn} R(x) = -1$ pour $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$.

Cela étant, la somme S sera donnée par l'expression plus simple

$$S = \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \operatorname{sgn} R^*\left(\frac{\rho}{\delta}\right) = 2 \sum_{\rho=1}^{\left[\frac{1}{2}\delta\right]} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \operatorname{sgn} R^*\left(\frac{\rho}{\delta}\right),$$

ou, dans la dernière somme la fonction $\operatorname{sgn} R^*\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$ étant toujours $= 1$,

$$S = 2 \sum_{1}^{\left[\frac{1}{2}\delta\right]} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) = \frac{4}{\tau_\delta}\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \mathrm{Cl}(-\delta).$$

Si donc Δ est impair, la formule (C) permet de conclure

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \operatorname{sgn} R^*\left(\frac{\nu^2}{\Delta}\right) = 4 \sum_{\delta} \frac{2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)}{\tau_\delta} \mathrm{Cl}(-\delta) \tag{42}$$

($\pm\Delta$ discriminant fondamental impair dont $-\delta$ parcourt les diviseurs discriminants négatifs).

En laissant de côté d'autres exercices, je veux considérer encore le cas

$$f(x) = \cot x\pi,$$

en convenant de prendre $f(x) = 0$ pour x entier où la cotangente devient infinie. La formule (C) donne, en supposant Δ impair, la formule

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1} \cot\frac{k^2\pi}{\Delta} = \sum_{d} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{\Delta}.$$

Pour $d \geqq 1$ la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{\Delta}$$

est nulle, et il ne reste que les valeurs négatives $d = -\delta$; la somme

$$S = \sum_{1}^{a\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{\Delta}, \qquad \text{où} \qquad a\delta = \Delta,$$

devient, après qu'on a posé $\nu = \rho + \mu\delta$,

$$S = \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\rho}{\Delta} + \frac{\mu}{a}\right)\pi,$$

et si l'on fait usage de la relation

$$\sum_{\mu=0}^{a-1} \cot\pi\left(x + \frac{\mu}{a}\right) = a \cot ax\pi,$$

il vient :

$$S = a \sum_{\rho=1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \cot\frac{\rho\pi}{\delta} = a \cdot \frac{4\sqrt{\delta}}{\tau_\delta} \operatorname{Cl}(-\delta),$$

et, par conséquent :

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \cot\frac{\nu^2\pi}{\Delta} = 4\Delta \sum_{\delta} \frac{1}{\tau_\delta\sqrt{\delta}} \operatorname{Cl}(-\delta) \tag{43}$$

($\pm\Delta$ un discriminant fondamental impair dont $-\delta$ parcourt les diviseurs discriminants négatifs). Pour Δ premier, cette formule coïncide avec celle de M. H. Weber[1].

Si Δ est pair, on a, d'après (D) :

$$\sum_{k=1}^{\Delta-1}{}^{*} \cot\frac{k^2\pi}{\Delta} = \sum_d \sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right) \cot\frac{\lambda\pi}{\Delta} + 2\sum_d \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{\Delta}$$

$$(\lambda = 1, 3, 5, \ldots \Delta - 1),$$

l'astérisque au signe de sommation, dans le premier membre, signifiant qu'il faut négliger les termes infinis où $\frac{k^2}{\Delta}$ est entier.

Si d est positif, la somme

$$\sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right) \cot\frac{\lambda\pi}{\Delta}$$

est nulle, ainsi que la somme

$$\sum_\nu \left(\frac{d}{4\nu}\right) \cot\frac{4\nu\pi}{\Delta};$$

il ne reste que les sommes correspondant à $d = -\delta$; si δ est pair, on a :

$$\sum_\lambda \left(\frac{-\delta}{\lambda}\right) \cot\frac{\lambda\pi}{\Delta} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{\Delta} = \frac{4\Delta}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Cl}(-\delta),$$

et pour δ impair on peut écrire :

$$\sum_\lambda \left(\frac{-\delta}{\lambda}\right) \cot\frac{\lambda\pi}{\Delta} = \sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{-4\delta}{\nu}\right) \cot\frac{\nu\pi}{\Delta}$$

$$= \frac{\Delta}{\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Cl}(-4\delta) = \frac{2\Delta}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\delta),$$

[1] *Nachrichten* de Gœttingue, 1893.

et cette forme contient aussi celle du cas précédent. Puis la somme

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}\Delta-1}\left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{\Delta}=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},\qquad\left(m=\frac{\Delta}{4}\right),$$

s'obtient comme précédemment sous la forme

$$\frac{4m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Cl}(-\delta)=\frac{\Delta}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Cl}(-\delta),$$

et on aura :

$$\sum{}^{*}\cot\frac{\nu^2\pi}{\Delta}=\sum_\delta\frac{2\Delta}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\mathrm{Cl}(-\delta)+\sum_\delta\frac{2\Delta}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\left(\frac{4}{\delta}\right)\mathrm{Cl}(-\delta),$$

ou bien :

$$(44)\qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}{}^{*}\cot\frac{\nu^2\pi}{\Delta}=2\Delta\sum_\delta\frac{2-\left(\frac{2}{\delta}\right)+\left(\frac{4}{\delta}\right)}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}\,\mathrm{Cl}(-\delta)$$

($\pm\Delta$ un discriminant fondamental pair, dont $-\delta$ parcourt les diviseurs qui sont des discriminants fondamentaux négatifs; l'astérisque au signe sommatoire signifie qu'il faut supprimer les termes infinis qui correspondent aux valeurs de ν dont le carré est divisible par Δ).

11. Considérons un système de nombres premiers impairs différents $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\nu$ et soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\nu$ des signes définis par l'égalité générale

$$\varepsilon_\nu=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=\left(\frac{-4}{p_\nu}\right);$$

formons l'expression

$$(45)\quad \varpi_s=\left(\frac{\varepsilon_1p_1}{s}\right)\frac{(-1)^{\alpha_1}+\left(\frac{\varepsilon_1p_1}{s}\right)}{2}\cdot\left(\frac{\varepsilon_2p_2}{s}\right)\frac{(-1)^{\alpha_2}+\left(\frac{\varepsilon_2p_2}{s}\right)}{2}\cdots\left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)\frac{(-1)^{\alpha_\nu}+\left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)}{2},$$

en représentant par α_1, α_2, $\ldots \alpha_\nu$ un certain système d'entiers qu'on peut supposer ne contenir que des valeurs zéro ou l'unité; cette expression ϖ_s sera égale à 1, si la valeur s satisfait à ν équations simultanées :

$$\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)=(-1)^{\alpha_1}, \quad \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)=(-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots \quad \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)=(-1)^{\alpha_\nu},$$

et on a $\varpi_s = 0$ dans tous les autres cas. Cela étant, posons, pour abréger,

$$p_1 p_2 \ldots p_\nu = \Delta,$$

et considérons la fonction entière

$$\Theta(x \mid p_1, p_2, \ldots p_\nu;\ a_1, a_2, \ldots a_\nu) = \prod_{s=1}^{\Delta}\left(x - e^{\frac{2s\pi i}{\Delta}}\right)^{\varpi_s}. \tag{46}$$

Le nombre effectif des facteurs linéaires et, par conséquent, le degré de la fonction est :

$$\mathrm{N} = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s = \frac{1}{2^\nu}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right)\cdots\left(\frac{p_\nu^2}{s}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\rho_1\rho_2\ldots}(-1)^{\alpha_{\rho_1}+\alpha_{\rho_2}+\cdots}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}p_{\rho_1}\cdot\varepsilon_{\rho_2}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right),$$

la deuxième sommation portant sur diverses permutations sans répétitions des éléments 1, 2, 3, ... ν qu'on représente par $\rho_1\rho_2\ldots\sigma_1\sigma_2\ldots$, le nombre des éléments ρ étant différent de 0. En posant pour un moment

$$\varepsilon_{\rho_1}p_{\rho_1}\varepsilon_{\rho_2}p_{\rho_2}\ldots = \mathrm{D}', \quad |\mathrm{D}'| = \Delta', \quad \mathrm{Q} = p_{\sigma_1}p_{\sigma_2}\ldots,$$

D' sera un discriminant et on aura $\Delta = \Delta'\mathrm{Q}$. Il s'agit de la somme

$$\mathrm{S} = \sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\varepsilon_{\rho_1}p_{\rho_1}\,\varepsilon_{\rho_2}p_{\rho_2}\cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2\cdots}{s}\right) = \sum_{s=1}^{\Delta'\mathrm{Q}}\left(\frac{\mathrm{D}'}{s}\right)\left(\frac{\mathrm{Q}^2}{s}\right).$$

Posant $s=m+n\Delta'$, on aura :

$$S=\sum_{m=1}^{\Delta'}\left(\frac{D'}{m}\right)\sum_{n=1}^{Q-1}\left(\frac{Q^2}{m+n\Delta'}\right).$$

Comme Q est premier avec Δ', la somme intérieure est égale à φ (Q) et il s'ensuit $S=0$. Toutes les sommes dont se compose la deuxième partie de l'expression N sont donc nulles et il vient :

$$N=\frac{1}{2^\nu}\sum_{1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)=\frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta):$$

le degré N est donc :

$$\frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta)=\frac{p_1-1}{2}\frac{p_2-1}{2}\cdots\frac{p_\nu-1}{2}.$$

En supposant dans (46). $|x|>1$, prenons les logarithmes des deux membres; il vient :

$$(a)\qquad \log\Theta(x)=N\log x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nx^n}\sum_{s=1}^{\Delta}\varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}.$$

On est conduit de la sorte au problème qui consiste à évaluer la somme

$$(47)\qquad G_n=\sum_{s=1}^{\Delta}\varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

qu'on peut regarder comme une généralisation des sommes de Gauss.

Pour y parvenir, posons, pour abréger

$$H_0=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

$$H_1(\alpha_1)=(-1)^{\alpha_1}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)\left(\frac{p_3^2p_4^2\cdots p_\nu^2}{s}\right)e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}.$$

$$H_2(\alpha_1\alpha_2) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2}{s}\right) \left(\frac{p_3^2 p_4^2 \dots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

. . . .

$$H_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \dots \varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}};$$

on aura évidemment :

$$(b) \left\{ \begin{aligned} 2^\nu G_n = H_0 &+ [H_1(\alpha_1) + H_1(\alpha_2) + \dots + H_1(\alpha_\nu)] + [H_2(\alpha_1, \alpha_2) \\ &+ H_2(\alpha_1, \alpha_3) + H_2(\alpha_2, \alpha_3) + \dots + H_2(\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu)] \\ &+ [H_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \dots] + \dots + H_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu). \end{aligned} \right.$$

Au lieu de H_μ il sera plus commode d'étudier la quantité

$$\mathfrak{H}_\mu = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu} H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\mu);$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \dots \varepsilon_\mu p_\mu = D_0, \quad p_{\mu+1} \dots p_\nu = Q,$$

D_0 sera un discriminant fondamental et $\mathfrak{H}_\mu$ s'écrira :

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D_0}{s}\right) \left(\frac{Q^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q}}, \qquad \Delta_0 = |D_0|;$$

on parvient à la valeur de cette quantité, si l'on fait usage de l'identité (5) qui donne :

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{dm}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}}, \qquad \text{où} \qquad Q_d = \frac{Q}{d},$$

d parcourant les diviseurs de Q; on a d'abord :

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}}.$$

Pour transformer la somme

$$\sigma = \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}},$$

j'y pose :

$$m = s + k\Delta_0, \quad (s = 1, 2, \ldots \Delta_0; \quad k = 0, 1, 2, \ldots Q_d - 1);$$

on aura alors :

$$\sigma = \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}} \sum_{k=0}^{Q_d - 1} e^{\frac{2kn\pi i}{Q_d}}.$$

Introduisons l'hypothèse que n soit premier avec Q; alors les sommes

$$\sum_{k=0}^{Q_d-1} e^{\frac{2kn\pi i}{Q_d}}$$

seront toutes nulles pourvu que $Q_d > 1$, et il ne reste que la somme σ où $Q_d = 1$, c'est-à-dire $d = Q$; elle a pour valeur

$$\sum_{m=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0}} = \left(\frac{D_0}{n}\right)\sqrt{D_0},$$

et, par conséquent, nous aurons :

$$\mathfrak{H}_\mu = \mu(Q)\left(\frac{D_0}{Q}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right)\sqrt{D_0};$$

or $\mu(Q) = (-1)^{\nu-\mu}$, et il s'ensuit :

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu) = (-1)^{(\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + \ldots + (\alpha_\mu - 1) + \nu} \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}.$$

Cette expression

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\mu)$$
$$= (-1)^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_\mu-1)} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdots \varepsilon_\mu p_\mu}{n p_{\mu+1} \cdots p_\nu}\right) \sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdots \varepsilon_\mu p_\mu},$$

qui peut s'écrire

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu)$$
$$= (-1)^{(\alpha_1-1)+\ldots+(\alpha_\mu-1)}\left(\frac{n \cdot p_{\mu+1}\cdots p_\nu}{p_1 p_2 \cdots p_\mu}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\mu p_\mu},$$

se simplifie en faisant usage de l'identité

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\mu p_\mu}$$
$$= \left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right) \cdot \;\cdot \left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right) \cdot \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2} \cdots \sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu},$$

et il vient

$$(c) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu) \\ \quad = (-1)^{\alpha_1 - 1}\left(\frac{np_2 p_3 \cdots p_\nu}{p_1}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1} \cdot (-1)^{\alpha_2 - 1}\left(\frac{np_1 p_3 \cdots p_\nu}{p_2}\right)\sqrt{\varepsilon_2 p_2} \\ \qquad \ldots (-1)^{\alpha_\mu - 1}\left(\frac{np_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}. \end{array} \right.$$

La quantité H_0 exige une détermination à part; elle est, d'après (5), évidemment identique avec la somme

$$H_0 = \sum \mu(d) \sum_{m=1}^{\Delta_d} e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_d}}, \qquad \Delta_d = \frac{\Delta}{d}.$$

En supposant *n premier avec* Δ, il ne reste que le terme $d = \Delta$ qui est

$$H_0 = \mu(\Delta) = (-1)^\nu,$$

c'est-à-dire :

$$(c_0) \qquad (-1)^\nu H_0 = 1.$$

En substituant dans l'équation (b) les valeurs obtenues (c) et (c_0), ce qui a lieu pour n premier avec Δ, on aura, évidemment

$$(48)\quad (-1)^{\nu} 2^{\nu} G_n$$
$$=\left[1-(-1)^{\alpha_1}\left(\frac{np_2p_3\cdots p_\nu}{p_1}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1}\right]\cdot\left[1-(-1)^{\alpha_2}\left(\frac{np_1p_3\cdots p_\nu}{p_2}\right)\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\right]$$
$$\cdot\;\cdot\left[1-(-1)^{\alpha_\nu}\left(\frac{np_1p_2\cdots p_{\nu-1}}{p_\nu}\right)\sqrt{\varepsilon_\nu p_\nu}\right]$$

ou bien :

$$(48^*)\quad \sum_{s=1}^{\Delta-1} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}} = (-1)^{\nu} \prod_{\rho=1}^{\nu} \frac{1-(-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{np_1\cdots p_{\rho-1}p_{\rho+1}\cdots p_\nu}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2}$$

($\Delta = p_1, p_2 \ldots p_\nu$; n positif et premier avec Δ).

Le premier membre n'est autre chose que la somme partielle

$$\sum{}^{*} e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

dans laquelle l'indice sommatoire s est assujetti aux conditions :

$$0 < s < \Delta;\quad \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right) = (-1)^{\alpha_1},\quad \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \;\cdots\; \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right) = (-1)^{\alpha_\nu};$$

le nombre des termes est $\frac{\varphi(\Delta)}{2^\nu}$.

Si, en particulier, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 0$, les conditions seront

$$\left(\frac{s}{p_1}\right) = \left(\frac{s}{p_2}\right) = \cdots = \left(\frac{s}{p_\nu}\right) = 1$$

et exprimeront seulement que s est un résidu quadratique pour le module Δ et premier avec Δ. Le premier membre de (48^*) pourra s'écrire, dans ce cas particulier :

$$\frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\Delta-1} e^{\frac{2nk^2\pi i}{\Delta}},$$

en supprimant cependant les termes où k n'est plus premier avec Δ. Notre équation peut s'écrire aussi comme il suit :

$$(48^a)\quad \sum_{k=1}^{\Delta-1}\left(\frac{k^2}{\Delta}\right)e^{\frac{2nk^2\pi i}{\Delta}}=\prod_{\rho=1}^{\nu}\left[\left(\frac{np_1p_2\ldots p_{\rho-1}p_{\rho+1}\ldots p_\nu}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}-1\right]$$

$(\Delta=p_1p_2\ldots p_\nu;\ n$ premier avec $\Delta)$.

Passons maintenant au cas où n possède un diviseur commun avec Δ, et posons :

$$n=m\Delta'',\quad \Delta=\Delta'\Delta'',$$

Δ' étant premier avec m; on aura à étudier la somme

$$S=\sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''}\varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}}.$$

Soient $p_1, p_2\ldots p_\gamma$ les facteurs premiers de Δ', et posons, pour abréger :

$$\prod_{\rho=1}^{\gamma}\left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)\frac{(-1)^{\alpha_\rho}+\left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2}=\varpi'_s,\qquad \prod_{\rho=\gamma+1}^{\nu}\left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)\frac{(-1)^{\alpha_\rho}+\left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2}=\varpi''_s;$$

on aura

$$\varpi_s=\varpi'_s\varpi''_s,\quad \varpi'_{s+\Delta'}=\varpi'_s,\quad \varpi''_{s+\Delta''}=\varpi''_s,$$

et la somme en question devient :

$$S=\sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''}\varpi'_s\varpi''_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}};$$

posons-y $s=r+k\Delta'$, il vient $\varpi'_s=\varpi'_r$, et alors

$$S=\sum_{r=1}^{\Delta'}\varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}}\sum_{k=0}^{\Delta''-1}\varpi''_{r+k\Delta'}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Pour un r donné, l'expression $r+k\Delta'$ parcourt un système complet de restes pour le module Δ'', et on a :

$$\sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'} = \sum_{h=1}^{\Delta''} \varpi''_h = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}};$$

il s'ensuit :

$$S = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}};$$

ou bien, en faisant usage du théorème (48*),

$$(49) \quad \sum_{s=1}^{\Delta-1} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}} = \frac{\varphi(\Delta)}{2^{\nu-\gamma}\varphi(\Delta')}(-1)^\gamma \prod_{\rho=1}^{\gamma} \frac{1-(-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{mp_1\cdots p_{\rho-1}p_{\rho+1}\cdots p_\gamma}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2}$$

($\Delta' = p_1 p_2 \ldots p_\gamma$, $\Delta'\Delta'' = \Delta$; m premier avec Δ').

Cette formule est plus générale que (48*), qui en résulte en prenant $\gamma = \nu$ et alors $\Delta' = \Delta$; elle fait voir que les sommes (47) s'expriment comme multiples des produits de facteurs de la suite

$$\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon_1 p_1}}{2}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon_2 p_2}}{2}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon_\nu p_\nu}}{2};$$

l'équation (a) permet alors de conclure que la fonction $\Theta(x)$ multipliée par 2^ν est l'agrégat d'un certain nombre d'expressions de la forme

$$\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}\sqrt{\varepsilon_\sigma p_\sigma}\,. \quad Y(x\,|\,p_\rho, p_\sigma, \quad),$$

les coefficients de $Y(x\,|\,p_\rho, p_\sigma, \ldots)$ étant des entiers ordinaires, le nombre des termes sera 2^ν. Ainsi, pour $\nu = 2$, on aura :

$$4\Theta(x)\,|\,p, q; \alpha, \beta)$$
$$= Y_0(x) + Y_1(x)\sqrt{\pm p} + Y_2(x)\sqrt{\pm q} + Y_3(x)\sqrt{\pm p}\sqrt{\pm q}.$$

Les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ correspondant aux discriminants impairs se composent de ces fonctions $\Theta(x)$ par multiplication.

En appelant type de fonction $\Theta(x \mid p_1, \ldots p_\nu;\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu)$ le système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ il y aura 2^ν types différents; la fonction $A(x)$ et la fonction $B(x)$ correspondant au discriminant $\pm p_1 p_2 \ldots p_\nu$ sont chacune le produit de $2^{\nu-1}$ fonctions $\Theta(x)$; en particulier $A(x)$ se compose des fonctions $\Theta(x)$ qui correspondent aux types satisfaisant à la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \equiv 0 \pmod{2}.$$

Peut-être une étude de ces fonctions $\Theta(x)$ pourrait contribuer à augmenter nos connaissances sur les fonctions $Y(x)$ et $Z(x)$ de Gauss et Dirichlet.

12. Les applications suivantes, qui s'occupent des cas les plus simples, sont les premiers essais qui se présentent sur la voie indiquée. Nous ne considérons que le cas où tous les nombres α sont nuls; dans le cas de $\nu = 2$, les deux nombres premiers seront désignés par p et q, et la formule (48*) devient :

$$(a)\quad \begin{cases} 4 \sum_s^* e^{\frac{2ns\pi i}{pq}} = 1 - \left(\frac{nq}{p}\right)\sqrt{\varepsilon p} - \left(\frac{np}{q}\right)\sqrt{\varepsilon' q} + \left(\frac{nq}{p}\right)\left(\frac{np}{q}\right)\sqrt{\varepsilon p}\sqrt{\varepsilon' q}, \\ \varepsilon = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \varepsilon' = (-1)^{\frac{q-1}{2}}; \end{cases}$$

l'entier positif n est supposé premier avec pq, et la somme s'étend sur les entiers s de la suite $1, 2, 3, \ldots pq$ qui satisfont à la double condition

$$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s}{q}\right) = 1.$$

Si n est remplacé par np, n étant premier avec q, on a, d'après (49)

$$(b)\qquad 4 \sum_s^* e^{\frac{2ns\pi i}{q}} = -(p-1)\left(1 - \left(\frac{n}{q}\right)\sqrt{\varepsilon' q}\right),$$

et puis, d'une manière analogue :

$$(b') \qquad 4\sum_s{}^{*} e^{\frac{2ns\pi i}{p}} = -(q-1)\left(1-\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{\varepsilon p}\right);$$

notons aussi

$$4\sum{}^{*} 1 = (p-1)(q-1).$$

Si maintenant $p \equiv q \equiv -1 \pmod{4}$, de sorte que $\varepsilon = \varepsilon' = -1$, les formules précédentes donnent, en ne retenant que les parties réelles :

$$4\sum_s{}^{*} \cos\frac{2ns\pi}{pq} = 1 + \left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq},$$

$$4\sum_s{}^{*} \cos\frac{2ns\pi}{q} = -(p-1), \qquad 4\sum_s{}^{*} \cos\frac{2ns\pi}{p} = -(q-1).$$

Cela étant, reprenons l'identité

$$-\log|2\sin x\pi| = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{2nx\pi}{n};$$

décomposons son deuxième membre en groupes dont le premier ne contient que des termes où n est premier avec pq, le second est composé de termes où n est multiple de p, et ainsi de suite; on aura :

$$-\log|2\sin x\pi| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{pq}{n}\right)^2 \frac{\cos 2nx\pi}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q}{n}\right)^2 \frac{\cos 2npx\pi}{np}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p}{n}\right)^2 \frac{\cos 2nqx\pi}{nq} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2npqx\pi}{npq};$$

les valeurs singulières de x pour lesquelles les séries dont se compose cette expression ne convergent plus, étant plus nombreuses, je préfère employer la forme suivante, qui est identique avec la série simple dont on est parti :

$$-\log|2\sin x\pi| = \lim_{m=\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^2\frac{\cos 2nx\pi}{n} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{\cos 2npx\pi}{np}\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{\cos 2nqx\pi}{nq} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{\cos 2npqx\pi}{npq}\right\}.$$

Cela étant, posons $x = \frac{s}{pq}$ et ajoutons les résultats pour les valeurs de s qui entrent dans la somme Σ^*, c'est-à-dire qui satisfont à la double condition

$$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s}{q}\right) = 1, \qquad 0 < s < pq.$$

Les formules que nous venons de rappeler s'appliquent immédiatement et on aura :

$$-4\sum_s^* \log\left(2\sin\frac{s\pi}{pq}\right)$$
$$= \lim_{m=\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^2\left[1 + \left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq}\right]\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{1-p}{np}\right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{1-q}{nq} + \frac{(p-1)(q-1)}{pq}\sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{n}\right\};$$

la partie de cette expression provenant de la première somme :

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^2\left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq}\cdot\frac{1}{n}$$

donne naissance à la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{pq}{n}\right)\frac{\sqrt{pq}}{n} = \mathrm{Cl}(pq)\log \mathrm{E}(pq).$$

et il reste

$$-4\sum_s{}^{*}\log\left(2\sin\frac{s\pi}{pq}\right)$$

$$=\mathrm{Cl}(pq)\log \mathrm{E}(pq)+\lim_{m=\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^2\frac{1}{n}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{1}{n}\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{n}\right\}.$$

Pour évaluer la limite qui figure au second membre, je considère la somme

$$\mathrm{A}_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n},$$

qu'on décompose de la même manière que plus haut; on obtient :

$$\mathrm{A}_m=\sum_{1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{1}{np}+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{1}{nq}+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{npq};$$

la limite cherchée pourra s'écrire alors :

$$\lim_{m=\infty}\left[\mathrm{A}_m-\sum_{1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{1}{n}-\sum_{1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{n}\right].$$

Si l'on fait usage de l'identité

$$\sum_{1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{1}{n}=\sum_{1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\frac{1}{n}-\sum_{1}^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{qn}$$

et de l'autre analogue, ladite limite devient :

$$\lim_{m=\infty}\left[A_m-\sum_1^{\left[\frac{m}{p}\right]}\frac{1}{n}-\sum_1^{\left[\frac{m}{q}\right]}\frac{1}{n}+\sum_1^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{1}{n}\right];$$

on s'assure aisément qu'elle est nulle, si l'on fait usage de la définition habituelle de la constante d'Euler

$$\lim_m\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\log m\right)=C.$$

On a, par conséquent, l'équation

$$(50)\qquad -4\sum_s{}^{*}\log 2\sin\frac{s\pi}{pq}=\mathrm{Cl}(pq)\log E(pq)$$

(p, q étant deux nombres premiers de la forme $4k+3$ et s parcourant les résidus quadratiques du module pq premiers avec ce module).

Si les entiers premiers p, q étaient de la forme $4k+1$, on aurait $\varepsilon=\varepsilon'=1$, et les relations ($a$) et ($b$) deviendraient :

$$4\sum_s{}^{*}\cos\frac{2ns\pi}{pq}=1-\left(\frac{p}{q}\right)\left[\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}+\left(\frac{n}{q}\right)\sqrt{q}\right]+\left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq},$$

$$4\sum_s{}^{*}\cos\frac{2ns\pi}{p}=-(q-1)+(q-1)\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}.$$

En appliquant le même procédé que précédemment, le second membre augmenterait de l'expression

$$\lim_{m=\infty}\left\{-\left(\frac{p}{q}\right)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{pq}{n}\right)^{2}\frac{\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}+\left(\frac{n}{q}\right)\sqrt{q}}{n}+\sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{n}{q}\right)\frac{\sqrt{q}}{n}\right.$$
$$\left.+\sum_{1}^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(\frac{n}{p}\right)\frac{\sqrt{p}}{n}\right\},$$

dont la valeur est

$$-\left(\frac{p}{q}\right)\left(\sum_1^\infty\left(\frac{pq^2}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n}+\sum_1^\infty\left(\frac{p^2q}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n}\right)+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{q}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n}$$

$$+\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n};$$

en faisant usage de la relation

$$\sum_1^\infty\left(\frac{pq^2}{n}\right)\frac{1}{n}=\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\frac{1}{q}\right]\sum_1^\infty\left(\frac{p}{n}\right)\frac{1}{n},$$

la dernière quantité prend la forme

$$\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\left(\sum_1^\infty\left(\frac{p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n}+\sum_1^\infty\left(\frac{q}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n}\right)$$

$$=\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\Big(\mathrm{Cl}(p)\log \mathrm{E}(p)+\mathrm{Cl}(q)\log \mathrm{E}(q)\Big),$$

et on a la relation suivante :

$$-4\sum_s{}^*\log\left(2\sin\frac{s\pi}{pq}\right)$$

$$=\mathrm{Cl}(pq)\log \mathrm{E}(pq)+\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\cdot\left[\mathrm{Cl}(p)\log \mathrm{E}(p)+\mathrm{Cl}(q)\log \mathrm{E}(q)\right]$$

(p et q étant deux nombres premiers de la forme $4k+1$ et s parcourant les résidus quadratiques du module pq premiers avec ce module).

Je reprends maintenant l'hypothèse

$$p\equiv q\equiv -1 \pmod{4},$$

mais, dans les formules $(a)-(b')$, je ne retiendrai que les parties imaginaires; nous aurons :

$$(d)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\sum_s{}^{*}\sin\frac{2ns\pi}{pq}=-\left(\frac{nq}{p}\right)\sqrt{p}-\left(\frac{np}{q}\right)\sqrt{q},\\ &4\sum_s{}^{*}\sin\frac{2ns\pi}{p}=(q-1)\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}.\end{aligned}\right.$$

Cela étant, transformons le second membre de la formule

$$\frac{1}{2}-x=\lim_{m=\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin 2nx\pi}{n\pi}$$

de la même manière que précédemment,

$$\lim_{m=\infty}\left\{\sum_1^m\left(\frac{pq}{n}\right)^2\frac{\sin 2nx\pi}{n\pi}+\sum_1^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{q}{n}\right)^2\frac{\sin 2npx\pi}{np\pi}\right.$$

$$\left.+\sum_1^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{p}{n}\right)^2\frac{\sin 2nqx\pi}{nq\pi}+\sum_1^{\left[\frac{m}{pq}\right]}\frac{\sin 2npqx\pi}{npq\pi}\right\},$$

puis posons $x=\frac{s}{pq}$ et ajoutons, en faisant parcourir à s les résidus quadratiques du module pq. Il vient, en faisant usage des formules (d) :

$$\frac{1}{2}\varphi(pq)-\frac{4}{pq}\sum_s{}^{*}s=\lim_{m=\infty}\left[-\sum_1^m\left(\frac{pq}{n}\right)^2\frac{\left(\frac{nq}{p}\right)\sqrt{p}+\left(\frac{np}{q}\right)\sqrt{q}}{n\pi}\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_1^{\left[\frac{m}{p}\right]}\left(\frac{n}{q}\right)\frac{\sqrt{q}}{n\pi}+\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_1^{\left[\frac{m}{q}\right]}\left(\frac{n}{p}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi}\right];$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

le deuxième membre est identique avec les quatre séries suivantes :

$$-\left(\frac{q}{p}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{-pq^2}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi}-\left(\frac{p}{q}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{-qp^2}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n\pi}$$

$$+\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{-q}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n\pi}+\left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_1^\infty\left(\frac{-p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi},$$

et en faisant usage du théorème

$$\sum_1^\infty\left(\frac{-pq^2}{n}\right)\frac{1}{n}=\sum_1^\infty\left(\frac{-p}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\left(1-\left(\frac{-p}{q}\right)\frac{1}{q}\right),$$

il se réduira comme il suit :

$$\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)\right]\sum_1^\infty\left(\frac{-p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi}+\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\sum_1^\infty\left(\frac{-q}{n}\right)\frac{\sqrt{q}}{n\pi};$$

cette quantité ayant la valeur

$$\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)\right]\frac{2}{\tau_p}\mathrm{Cl}(-p)+\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]\frac{2}{\tau_q}\mathrm{Cl}(-q),$$

on parvient ainsi à la conclusion :

$$\text{(52)}\qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2}-\frac{4}{pq}\sum_s{}^* s=\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}\mathrm{Cl}(-p)$$
$$+\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\frac{2}{\tau_q}\mathrm{Cl}(-q)$$

(p, q étant deux nombres premiers de la forme $4k+3$ et s parcourant les résidus quadratiques du module pq premiers avec ce module).

A cause de la réciprocité

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=-1,$$

l'un des deux termes du deuxième membre est toujours nul.

Supposons maintenant $p \equiv -1$, $q \equiv 1 \pmod{4}$, et comparons les parties imaginaires dans les formules $(a)-(b')$; on obtient :

$$4 \sum_s{}^{*} \sin \frac{2ns\pi}{pq} = -\left(\frac{nq}{p}\right)\sqrt{p} + \left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq},$$

$$4 \sum_s{}^{*} \sin \frac{2ns\pi}{p} = (q-1)\cdot\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p},$$

$$4 \sum{}^{*} \sin \frac{2ns\pi}{q} = 0;$$

en opérant sur l'équation

$$\frac{1}{2} - x = \sum_1^{\infty} \frac{\sin 2nx\pi}{n\pi}$$

comme précédemment, nous aurons :

$$\frac{1}{2}\varphi(pq) - \frac{4}{pq}\sum_s{}^{*} s = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{pq}{n}\right)^2 \frac{\left(\frac{n}{pq}\right)\sqrt{pq} - \left(\frac{nq}{p}\right)\sqrt{p}}{n\pi} + \left(1-\frac{1}{q}\right) \sum_{n=1}^{\left[\frac{m}{q}\right]} \frac{\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}}{n\pi} \right\};$$

le deuxième membre est évidemment la somme des séries suivantes :

$$\sum_1^{\infty}\left(\frac{-pq}{n}\right)\frac{\sqrt{pq}}{n\pi} - \left(\frac{q}{p}\right)\sum_1^{\infty}\left(\frac{-pq^2}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi} + \left(1-\frac{1}{q}\right)\sum_1^{\infty}\left(\frac{-p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi},$$

qui, en remplaçant la seconde par sa valeur

$$\left(1-\left(\frac{-p}{q}\right)\frac{1}{q}\right)\sum_1^{\infty}\left(\frac{-p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi},$$

s'écrira :

$$\sum_1^\infty \left(\frac{-pq}{n}\right)\frac{\sqrt{pq}}{n\pi} + \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\sum_1^\infty \left(\frac{-p}{n}\right)\frac{\sqrt{p}}{n\pi}$$

$$= \mathrm{Cl}(-pq) + \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}\mathrm{Cl}(-p);$$

on a donc ce résultat final

$$(53) \qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum{}^{*} s = \mathrm{Cl}(-pq) + \frac{2}{\tau_p}\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-p)$$

(les nombres premiers p et q satisfaisant à la condition $q \equiv -p \equiv 1$ (mod. 4) et s parcourant les résidus quadratiques du module pq premiers avec ce module).

Le premier membre de cette équation est évidemment divisible par 4; on en tire, en remarquant que $\mathrm{Cl}(-p)$ est impair, le théorème de *M. Hurwitz* :

$$(54) \qquad \mathrm{Cl}(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{p}{q}\right) \pmod{4};$$

il s'ensuit que $\mathrm{Cl}(-pq)$ est divisible par 4, si p est un résidu quadratique du module q.

13. Les équations (52) et (53) peuvent s'établir directement et aussi on peut les généraliser considérablement au moyen des considérations élémentaires. Dans ce but, je vais introduire la fonction numérique suivante :

$$(55) \qquad (\mathrm{D}, \mathrm{Q}) = \prod_q \left(1 - \left(\frac{\mathrm{D}}{q}\right)\right),$$

dans laquelle D signifie un discriminant et q parcourt les facteurs premiers différents de Q.

Cela étant, soient

$$\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \cdot\ \cdot \mathrm{D}_m\ (\mathrm{D} = \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 \cdot \cdot \cdot \mathrm{D}_m)$$

des discriminants fondamentaux premiers entre eux, dont soient

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots \Delta_m \, (\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_m)$$

les valeurs absolues, et considérons l'expression

$$S = \sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{\nu}\right) \left(1 + \left(\frac{D_1}{\nu}\right)\right) \left(1 + \left(\frac{D_2}{\nu}\right)\right) \cdots \left(1 + \left(\frac{D_m}{\nu}\right)\right) \frac{\nu}{\Delta}.$$

Elle se compose du terme

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = S_0,$$

et puis des termes de la forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta} \left(\frac{D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a} D^2_{\rho_{a+1}} \cdots D^2_{\rho_m}}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = S(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_a),$$

où il faut prendre pour $\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_a$ toutes les combinaisons du degré a des éléments $1, 2, \cdots m$, et pour a les valeurs $1, 2, 3 \cdots m$.

La quantité S_0 est égale à $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$, et pour évaluer la somme (α), posons pour un moment

$$D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a} = D', \qquad \Delta_{\rho_{a+1}} \Delta_{\rho_{a+2}} \cdots \Delta_{\rho_m} = Q, \qquad |D'| = \Delta',$$

et la somme en question s'écrira :

$$(\alpha') \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta' Q} \left(\frac{D' Q^2}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta' Q}.$$

Elle se ramène à la série considérée dans le n° 10 du chapitre II, à savoir :

$$(\alpha'') \qquad \sum_{\nu=1}^{\Delta' Q^2} \left(\frac{D' Q^2}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta' Q^2};$$

car en faisant dans la dernière $\nu = \rho + \Delta' Q \mu$, elle devient :

$$\sum_{1}^{\Delta' Q} \left(\frac{D'Q^2}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{Q-1} \frac{\rho + \Delta' Q \mu}{\Delta' Q^2} = \sum_{1}^{\Delta' Q} \left(\frac{D'Q^2}{\rho}\right) \frac{\rho}{\Delta' Q},$$

ce qui est bien la somme (α'); or, d'après la formule (74) du chapitre II, la somme (α'') a pour valeur

$$-(D', Q) \cdot \frac{2}{\tau'} \operatorname{Cl}(D'),$$

si D' est négatif, tandis qu'elle est nulle pour D' positif.

Ainsi les sommes (α) qui ne sont pas nulles correspondent aux combinaisons $\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_a$ pour lesquelles

$$D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a} < 0,$$

et on a :

$$\begin{aligned} &S(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_a) \\ &= -\frac{2}{\tau'_a} (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a}, \Delta_{\rho_{a+1}} \Delta_{\rho_{a+2}} \cdots \Delta_{\rho_m}) \operatorname{Cl}(D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a}), \end{aligned}$$

où $\tau'_a = 2$ si $a > 1$ ou si $a = 1$, $D'_{\rho_1} < -4$; puis $\tau'_1 = 6$ pour $D_{\rho_1} = -3$ et $\tau'_1 = 4$ pour $D'_{\rho_1} = -4$.

On fera bien en convenant d'écrire d'une manière générale

$$\frac{2}{\tau} \operatorname{Cl}(-\Delta) = \overline{\operatorname{Cl}(-\Delta)},$$

car alors on aura :

$$\begin{aligned} &S(\rho_1, \rho_2, \cdots \rho_a) \\ &= -(D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a}, \Delta_{\rho_{a+1}} \Delta_{\rho_{a+2}} \cdots \Delta_{\rho_m}) \cdot \overline{\operatorname{Cl}(D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a})}. \end{aligned}$$

Notre somme S, dont nous sommes partis, aura donc pour valeur l'expression

$$S = \frac{1}{2} \varphi(\Delta) - \sum_{(\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_a)} (D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a}, \Delta_{\rho_{a+1}} \Delta_{\rho_{a+2}} \cdots \Delta_{\rho_m}) \overline{\operatorname{Cl}(D_{\rho_1} D_{\rho_2} \cdots D_{\rho_a})},$$

la sommation s'étendant sur toutes les combinaisons $\rho_1\rho_2\cdots\rho_a$ des différents ordres $a=1, 2,\cdots m$ des éléments $1, 2,\cdots m$, et où $\rho_{a+1}\cdots\rho_m$ signifie la combinaison des éléments restants.

Or l'expression

$$\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1+\left(\frac{D_1}{\nu}\right)}{2}\cdot\frac{1+\left(\frac{D_2}{\nu}\right)}{2}\cdots\frac{1+\left(\frac{D_m}{\nu}\right)}{2}$$

est égale à l'unité, si l'on a simultanément

$$\left(\frac{D_1}{\nu}\right)=\left(\frac{D_2}{\nu}\right)=\cdots=\left(\frac{D_m}{\nu}\right)=1,$$

et s'annule dans tous les autres cas; on peut donc écrire

$$S=2^m\sum_s{}^{*}\frac{s}{\Delta}, \qquad \left(\begin{array}{c}\left(\frac{D_1}{s}\right)=\left(\frac{D_2}{s}\right)=\cdots=\left(\frac{D_m}{s}\right)=1\\ 0<s<\Delta\end{array}\right),$$

et notre résultat prend cette forme définitive :

$$(56)\quad \tfrac{1}{2}\varphi(\Delta)-\frac{2^m}{\Delta}\sum_s{}^{*}s$$
$$=\sum_a\sum_{(r_1,r_2,\ldots r_a)}(D_{r_1}D_{r_2}\cdots D_{r_a},\Delta_{r_{a+1}}\Delta_{r_{a+2}}\cdots\Delta_{r_m})\,\overline{\mathrm{Cl}(D_{r_1}D_{r_2}\cdots D_{r_a})}$$

($D_1, D_2,\cdots D_m$ représentent des discriminants fondamentaux, premiers entre eux, $\Delta_1, \Delta_2,\cdots\Delta_m$ leurs valeurs absolues respectives, $\Delta=\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_m$, la sommation au premier membre porte sur les valeurs s de la suite $1, 2,\cdots\Delta-1$ qui satisfont aux conditions

$$\left(\frac{D_1}{s}\right)=\left(\frac{D_2}{s}\right)=\cdots=\left(\frac{D_m}{s}\right)=1;$$

dans le second membre, il faut prendre successivement $a=1, 2, 3,\cdots m$ et former toutes les combinaisons $r_1r_2\cdots r_a$ d'ordre a des éléments $1, 2, 3, \cdots m$; les éléments restants, en supprimant ceux qui forment ladite combinaison, sont $r_{a+1}, r_{a+2}, \cdots r_m$; le symbole

$$(D_{r_1} D_{r_2} \cdots D_{r_a}, \Delta_{r_a+1} \cdots \Delta_{r_m})$$

est défini par l'équation (55) et doit être remplacé par l'unité si les éléments $\Delta_{r_a+1}, \cdots$ n'existent plus, c'est-à-dire pour $a = m$.

Le symbole

$$\overline{\mathrm{Cl}(D')}$$

représente zéro, si $D' > 0$, puis $\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta')$ si $D = -\Delta'$).

On a, par exemple, si l'on fait $m = 2$, $D_1 = -\Delta_1$, $D_2 = -\Delta_2$,

$$(52^*) \qquad \frac{1}{2}\varphi(\Delta_1 \Delta_2) - \frac{4}{\Delta_1 \Delta_2}\sum{}^* s = (-\Delta_1, \Delta_2)\frac{2}{\tau_1}\mathrm{Cl}(-\Delta_1) + (-\Delta_2, \Delta_1)\frac{2}{\tau_2}\mathrm{Cl}(-\Delta_2)$$

(les nombres τ_1 et τ_2 étant les valeurs du nombre τ pour $\Delta = \Delta_1$, resp. $\Delta = \Delta_2$; la sommation s'étend sur les valeurs de s telles que $0 < s < \Delta_1 \Delta_2$; $\left(\frac{-\Delta_1}{s}\right) = \left(\frac{-\Delta_2}{s}\right) = 1$).

En prenant $\Delta_1 = p$, $\Delta_2 = q$, on a la formule (52).

Posons ensuite, en restant au cas de $m = 2$,

$$D_1 = D > 0, \qquad D_2 = -\Delta < 0;$$

nous aurons :

$$(53^*) \quad \frac{1}{2}\varphi(D\Delta) - \frac{4}{D\Delta}\sum{}^* s = (-\Delta, D)\frac{2}{\tau}\mathrm{Cl}(-\Delta) + \mathrm{Cl}(-\Delta D),$$

équation qui généralise la formule (53); les lettres D et $-\Delta$ signifient deux discriminants fondamentaux premiers entre eux et la sommation au premier membre est déterminée par les conditions

$$0 < s < \Delta, \qquad \left(\frac{D}{s}\right) = \left(\frac{-\Delta}{s}\right) = 1.$$

Prenons maintenant $m = 3$ et supposons $D_1 = -\Delta_1$, $D_2 = -\Delta_2$, $D_3 = -\Delta_3$; on aura à prendre $a = 1$ et $a = 3$ puisque l'hypothèse de $a = 2$ ne fournit que des discriminants positifs; on aura donc :

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\varphi(\Delta_1\Delta_2\Delta_3) - \frac{8}{\Delta_1\Delta_2\Delta_3}\sum{}^{*}s \\ &\quad = \mathrm{Cl}(-\Delta_1\Delta_2\Delta_3) + (-\Delta_1, \Delta_2\Delta_3)\frac{2}{\tau_1}\mathrm{Cl}(-\Delta_1) \\ &\qquad + (-\Delta_2, \Delta_1\Delta_3)\frac{2}{\tau_2}\mathrm{Cl}(-\Delta_2) \\ &\qquad + (-\Delta_3, \Delta_1\Delta_2)\frac{2}{\tau_3}\mathrm{Cl}(-\Delta_3). \end{aligned}\right.$$

Si donc Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont premiers, il faut naturellement qu'ils satisfassent à la condition

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -1 \pmod{4};$$

on aura alors :

$$\begin{aligned} &\frac{(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)}{2} - \frac{8}{p_1p_2p_3}\sum{}^{*}s \\ &= \mathrm{Cl}(-p_1p_2p_3) + \left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_1}\right)\right)\frac{2}{\tau p_1}\mathrm{Cl}(-p_1) \\ &\qquad + \left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\frac{2}{\tau p_2}\mathrm{Cl}(-p_2) \\ &\qquad + \left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)\frac{2}{\tau p_3}\mathrm{Cl}(-p_3). \end{aligned}$$

On en déduit la congruence en admettant que les nombres p diffèrent de 3,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}(-p_1p_2p_3) \equiv &\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_1}\right)\right) + \left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right) \\ &+ \left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right) - 4 \pmod{8}, \end{aligned}$$

ou, en développant et observant que $\left(\frac{p_1}{p_2}\right)+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)=0$, et ainsi de suite,

$$(58)\quad \mathrm{Cl}(-p_1p_2p_3)\equiv -1+\left(\frac{p_2p_3}{p_1}\right)+\left(\frac{p_1p_3}{p_2}\right)+\left(\frac{p_1p_2}{p_3}\right) \pmod{8}.$$

Puisque le produit des trois signes de Legendre qui figurent au second membre est, d'après la loi de réciprocité, égal à -1, il n'y a que deux possibilités : ou bien les trois signes sont -1 et le nombre des classes sera congru à $-4\equiv+4 \pmod{8}$, ou deux sont égaux à $+1$ et, dans ce cas, le deuxième membre de (58) est nul; on obtient le même résultat en supposant $p_1=3$.

Je prends maintenant $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3=-\Delta<0$; l'équation (56) donnera

$$(59)\quad \tfrac{1}{2}\varphi(D_1D_2\Delta)-\frac{8}{D_1D_2\Delta}\sum{}^{*}s$$
$$=\mathrm{Cl}(-\Delta D_1D_2)+(-\Delta D_1, D_2)\,\mathrm{Cl}(-\Delta D_1)$$
$$+(-\Delta D_2, D_1)\,\mathrm{Cl}(-\Delta D_2)+(-\Delta, D_1D_2)\tfrac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

où je crois inutile de répéter toutes les conditions.

En supposant $D_1=p_1$, $D_2=p_2$, $\Delta=q$ premiers, de sorte que

$$p_1\equiv p_2\equiv -q\equiv 1 \pmod{4},$$

on aura d'abord

$$\tfrac{1}{2}\varphi(p_1p_2q)\equiv 0 \pmod{8}.$$

puis $(-p_1q, p_2)$ étant pair, on a, d'après (54) :

$$(-p_1q, p_2)\,\mathrm{Cl}(-p_1q)\equiv\left(1-\left(\frac{p_1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1q}\right)\right) \pmod{8};$$

on tire donc de (59) la congruence suivante, pour le module 8

$$\mathrm{Cl}(-p_1p_2q) \equiv \left(1-\left(\frac{p_1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1q}\right)\right)-\left(1-\left(\frac{p_2}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2q}\right)\right)$$
$$+\left(1-\left(\frac{p_1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{q}\right)\right),$$

ce qu'on pourra écrire, en réduisant,

$$(60)\quad \mathrm{Cl}(-p_1p_2q) \equiv \left(1-\left(\frac{p_1}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{q}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(\left(\frac{p_1}{q}\right)-\left(\frac{p_2}{q}\right)\right) \pmod{8},$$

pourvu que l'on ait

$$p_1 \equiv p_2 \equiv -q \equiv 1 \pmod{4}.$$

On parviendrait à des conclusions importantes si l'on pouvait, dans la formule (52) et dans celles qui la suivent, déterminer la parité de la somme $\sum^* s$ par des fonctions élémentaires.

La formule (56) fait partie d'une catégorie très étendue des relations arithmétiques; pour en signaler d'autres analogues, remarquons l'exemple suivant :

$$\mathrm{S}^*(x;\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\ldots\mathrm{D}_m) = \sum_{\nu=1}^{[\Delta x]}\left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right)\frac{1+\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\nu}\right)}{2}\,\frac{1+\left(\frac{\mathrm{D}_2}{\nu}\right)}{2}\cdots\frac{1+\left(\frac{\mathrm{D}_m}{\nu}\right)}{2},$$

les lettres D et Δ ayant la même signification que plus haut; cette fonction est le nombre des valeurs s telles que

$$0 < s \leqq \Delta x;\qquad \left(\frac{\mathrm{D}_1}{s}\right) = \left(\frac{\mathrm{D}_2}{s}\right) = \cdots = \left(\frac{\mathrm{D}_m}{s}\right) = 1.$$

La recherche des valeurs s est commode, puisqu'on opère sur des discriminants considérablement moindres et on trouve donc rapidement les différentes séries arithmétiques qui les fournissent. En choisissant convenablement la valeur de x, les formules explicites établies dans le chapitre II sur les valeurs de $S(x, D)$ permettent de parvenir rapidement au but.

Mais la recherche étant facile, je me contente d'avoir signalé cette méthode, en me réservant d'y revenir, si je parvenais à des résultats qui ne se présentent pas immédiatement. Un exemple peut montrer le parti qu'on peut tirer des différentes relations pour abréger les calculs. Cherchons le nombre des classes du discriminant $D = -11395 = -5.43.53.$

J'emploie d'abord la formule (52), chapitre II

$$\sum_{\frac{1}{6}\Delta}^{\frac{1}{5}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(-5\Delta) + \frac{3-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)+2\left(\frac{-3}{\Delta}\right)-\left(\frac{5}{\Delta}\right)-2\left(\frac{-6}{\Delta}\right)}{4}\,\mathrm{Cl}(-\Delta);$$

on a ici, en posant $\Delta = 43.53$,

$$\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 1, \qquad \left(\frac{-3}{\Delta}\right) = -1, \qquad \left(\frac{5}{\Delta}\right) = 1, \qquad \left(\frac{-6}{\Delta}\right) = -1;$$

le numérateur de la fraction dans le second terme à droite est donc

$$3-2-2-1+2=0,$$

et on a, par conséquent,

$$\mathrm{Cl}(-5\Delta) = -4A,$$

en posant

$$A = \sum_{\frac{1}{6}\Delta}^{\frac{1}{5}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \sum_{\frac{1}{6}\Delta}^{\frac{1}{5}\Delta}\left(\frac{\nu}{\Delta}\right).$$

Pour obtenir cette somme, composée environ de 75 termes, je pose, pour abréger, $p=53\equiv 1 \pmod{4}$, $q=43\equiv -1 \pmod{4}$ et j'envisage la somme

$$S=\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{pq}\right)\left(1+\left(\frac{s}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{s}{q}\right)\right)$$

$$=A+\sum\left(\frac{s}{p^2q}\right)+\sum\left(\frac{s}{pq^2}\right)+\sum\left(\frac{s}{p^2q^2}\right).$$

En faisant usage de la formule (5), chapitre I, on a :

$$\sum\left(\frac{s}{p^2q}\right)=\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{q}\right)-\sum_{\frac{1}{6}q}^{\frac{1}{5}q}\left(\frac{ps}{q}\right),\qquad \sum\left(\frac{s}{pq^2}\right)=\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{p}\right)-\sum_{\frac{1}{6}p}^{\frac{1}{5}p}\left(\frac{sq}{p}\right);$$

les seconds termes de ces deux différences se calculent aisément, mais les sommes faisant les premiers termes sont trop compliquées; on les simplifie en observant que

$$\frac{1}{6}pq=8q+\frac{5}{6}q=7p+\frac{1}{6}p,\qquad \frac{1}{5}pq=10q+\frac{3}{5}q=8p+\frac{3}{5}p,$$

de sorte qu'il vient :

$$\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{q}\right)=\sum_{8q+\frac{5}{6}q}^{\frac{3}{5}q+10q}\left(\frac{s}{q}\right)=\sum_{\frac{5}{6}q}^{q}\left(\frac{s}{q}\right)+\sum_{1}^{\frac{3}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right)=\sum_{\frac{5}{6}q}^{q}\left(\frac{s}{q}\right)-\sum_{\frac{3}{5}q}^{q}\left(\frac{s}{q}\right)=-\sum_{\frac{3}{5}q}^{\frac{5}{6}q}\left(\frac{s}{q}\right)$$

ou, en changeant s en $q-s$,

$$\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{q}\right)=\sum_{\frac{1}{6}q}^{\frac{2}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right).$$

Ensuite

$$\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{p}\right)=\sum_{7p+\frac{1}{6}p}^{8p+\frac{3}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right)=\sum_{\frac{1}{6}p}^{p}\left(\frac{s}{p}\right)+\sum_{1}^{\frac{3}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right)=-\sum_{1}^{\frac{1}{6}p}\left(\frac{s}{p}\right)-\sum_{\frac{3}{5}p}^{p}\left(\frac{s}{p}\right),$$

ou, en ajoutant $\sum_{\frac{1}{2}p}^{p}\left(\frac{s}{p}\right)=0$,

$$=-\sum_{1}^{\frac{1}{6}p}\left(\frac{s}{p}\right)+\sum_{\frac{1}{2}p}^{\frac{3}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right)=-\sum_{1}^{\frac{1}{6}p}\left(\frac{s}{p}\right)+\sum_{\frac{2}{5}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\frac{s}{p}\right);$$

la formule (42) du chapitre II fait voir que

$$\sum_{1}^{\frac{1}{6}p}\left(\frac{s}{p}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\,\mathrm{Cl}(-3p)=0,$$

et il reste

$$\sum_{\frac{1}{6}pq}^{\frac{1}{5}pq}\left(\frac{s}{p}\right)=\sum_{\frac{2}{5}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\frac{s}{p}\right).$$

On a enfin

$$\sum\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\left[\frac{pq}{5}\right]-\left[\frac{pq}{6}\right]-\left(\left[\frac{p}{5}\right]-\left[\frac{p}{6}\right]+\left[\frac{q}{5}\right]-\left[\frac{q}{6}\right]\right);$$

en substituant, on aura, si l'on fait usage de la circonstance

$$\left(\frac{p}{q}\right)=1,$$

$$S=A+\left[\sum_{\frac{1}{6}q}^{\frac{2}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right)-\sum_{\frac{1}{6}q}^{\frac{1}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right)\right]+\left[\sum_{\frac{2}{5}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\frac{s}{p}\right)-\sum_{\frac{1}{6}p}^{\frac{1}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right)\right]$$

$$+\left[\frac{pq}{5}\right]-\left[\frac{pq}{6}\right]-(2+1),$$

ou bien

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) = -\mathrm{S} + \sum_{\frac{1}{5}q}^{\frac{2}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right) + \sum_{\frac{2}{5}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\frac{s}{p}\right) - \sum_{\frac{1}{6}p}^{\frac{1}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right) + \left[\frac{pq}{5}\right] - \left[\frac{pq}{6}\right] - 3.$$

Comme

$$\left[\frac{pq}{5}\right] - \left[\frac{pq}{6}\right] = \left[10q + \frac{3}{5}q\right] - \left[8q + \frac{5}{6}q\right] = 76,$$

on a donc :

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) = -\mathrm{S} + \sum_{\frac{1}{5}q}^{\frac{2}{5}q}\left(\frac{s}{q}\right) + \sum_{\frac{2}{5}p}^{\frac{1}{2}p}\left(\frac{s}{p}\right) - \sum_{\frac{1}{6}p}^{\frac{1}{5}p}\left(\frac{s}{p}\right) + 73.$$

On a maintenant $\mathrm{S} = 4\mathrm{N}$ si N signifie le nombre de solutions du problème,

$$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{s}{q}\right) = 1, \qquad \frac{1}{6}pq < s < \frac{1}{5}pq.$$

En représentant les résidus quadratiques de p plus petits que $\frac{p}{2}$ par a, on a d'abord

$$s = \pm a + kp,$$

et il faut déterminer k par la double condition

$$\left(\frac{\pm a + kp}{q}\right) = 1, \qquad \frac{1}{6}q < k \pm \frac{a}{p} < \frac{1}{5}q.$$

Les valeurs de a sont $(p = 53)$:

1, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17 24, 25,

et on aura à considérer les équations :

$$\left(\frac{a + kp}{q}\right) = 1 \quad \text{pour} \quad k = \begin{cases} 8, \text{ si } a < 9, \\ 7 \text{ et } 8, \text{ si } a \geqq 9, \end{cases}$$

puis

$$\left(\frac{-a+kp}{q}\right)=1 \qquad \text{pour} \qquad k=\begin{cases} 8, \text{ si } a<24, \\ 8 \text{ et } 9, \text{ si } a=24 \text{ ou } 25; \end{cases}$$

en réunissant, on a les équations :

$$\begin{cases} \left(\frac{8p\pm a}{q}\right)=1 & \text{pour tous les } a, \\ \left(\frac{7p+a}{q}\right)=1 & \text{pour} \quad a\geqq 9, \\ \left(\frac{9p-a}{q}\right)=1 & \text{pour} \quad a=24 \text{ et } a=25. \end{cases}$$

Ces équations se simplifient comme il suit, en négligeant la dernière qui a une seule solution :

$$\left(\frac{-6\pm a}{43}\right)=1 \quad \text{pour tous les } a, \qquad \left(\frac{-16+a}{43}\right)=1 \quad \text{pour} \quad a\geqq 9.$$

En écrivant tous ces symboles pour les différentes valeurs de a, on en trouve 17 qui sont $+1$, et on a, par conséquent, $N=18$, $S=4.18=72$, et notre résultat s'écrira :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cl}(\mathrm{D}) &= 1+\sum_{9}^{17}\left(\frac{s}{43}\right)+\sum_{22}^{26}\left(\frac{s}{53}\right)-\sum_{9}^{10}\left(\frac{s}{53}\right) \\ &= 1+7-1-2=5, \\ \mathrm{Cl}&(-11395)=20, \end{aligned}$$

ce qui est en accord avec la congruence (60).

M. Hurwitz [1] avait déterminé les restes des nombres $\mathrm{Cl}(-8pq)$ pour le module 8. Pour y parvenir, je considère la somme

$$S=\sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta}\left(\frac{\mathrm{D}}{\nu}\right)\left(1+\left(\frac{\mathrm{D}_1}{\nu}\right)\right)\left(1+\left(\frac{\mathrm{D}_2}{\nu}\right)\right)\left(1+\left(\frac{\mathrm{D}_3}{\nu}\right)\right),$$
$$\mathrm{D}=\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\mathrm{D}_3, \qquad \Delta=|\mathrm{D}|,$$

(1) *Acta mathematica*, t. XIX.

en supposant les trois discriminants fondamentaux D_1, D_2, D_3 premiers entre eux. J'y suppose que $D_1 \equiv 0 \pmod{8}$, de sorte que D_2 et D_3 sont impairs; on a :

$$S = \sum \left(\frac{D}{\nu}\right) + \sum_{\alpha} \sum_{\nu} \left(\frac{D_\beta D_\gamma \Delta_\alpha^2}{\nu}\right) + \sum_{\alpha} \sum_{\nu} \left(\frac{D_\alpha \Delta_\beta^2 \Delta_\gamma^2}{\nu}\right) + \tfrac{1}{4}\varphi(\Delta);$$

les sommations relatives à ν portent sur les valeurs

$$\nu = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{4}\Delta,$$

et α parcourt les valeurs 1, 2, 3, β et γ désignant chaque fois les deux nombres restants.

Pour simplifier le second membre, considérons la somme

$$A = \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta' Q} \left(\frac{D' Q^2}{\nu}\right),$$

Q étant supposé divisible par 8; on a évidemment :

$$A = \sum_{d} \mu(d) \left(\frac{D'}{d}\right) \sum_{1}^{\Delta' \frac{Q}{4d}} \left(\frac{D'}{\nu}\right),$$

d parcourant les diviseurs de Q; pour ceux qui donnent $\mu(d)$ différent de zéro, le quotient $\frac{Q}{4d}$ est toujours entier, et il vient :

$$A = 0;$$

cela prouve que les sommes

$$\sum \left(\frac{D_2 D_3 D_1^2}{\nu}\right), \qquad \sum \left(\frac{D_\alpha D_1^2 D_\beta^2}{\nu}\right)$$

sont nulles, et pour obtenir les autres, je vais évaluer la somme

$$B(D', Q) = \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta' Q} \left(\frac{D' Q^2}{\nu}\right)$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

pour D' pair, Q impair; les sommes relatives à ν dans l'équation

$$\mathrm{B} = \sum \mu(d) \left(\frac{\mathrm{D}'}{d}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta'\mathrm{Q}'} \left(\frac{\mathrm{D}'}{\nu}\right), \qquad \text{où} \qquad \mathrm{Q}' = \frac{\mathrm{Q}}{d},$$

ne s'annulent plus en général, puisque l'indice $\frac{1}{4}\Delta'\mathrm{Q}'$ n'est plus un multiple de Δ'; or on a :

$$\frac{1}{4}\Delta'\mathrm{Q}' = \Delta'\frac{\mathrm{Q}'-k}{4} + \frac{k}{4}\Delta',$$

en représentant par k le reste de la division de Q' par 4, de sorte que

$$\mathrm{Q}' \equiv k \,(\mathrm{mod.}\ 4), \qquad \left(\frac{-4}{k}\right) = \left(\frac{-4}{d}\right)\left(\frac{-4}{\mathrm{Q}}\right).$$

On aura :

$$(\alpha) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta'\mathrm{Q}'} \left(\frac{\mathrm{D}'}{\nu}\right) = \sum_{1}^{\frac{k}{4}\Delta'} \left(\frac{\mathrm{D}'}{\nu}\right);$$

si $\mathrm{D}' > 0$, cette quantité sera égale à

$$\left(\frac{-4}{k}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta'} \left(\frac{\mathrm{D}'}{\nu}\right) = \left(\frac{-4}{k}\right) \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-4\mathrm{D}')$$

ou bien

$$\left(\frac{-4}{d}\right)\left(\frac{-4}{\mathrm{Q}}\right) \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-4\mathrm{D}'),$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{B} = \sum \mu(d) \left(\frac{-4\mathrm{D}'}{d}\right) \cdot \left(\frac{-4}{\mathrm{Q}}\right) \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-4\mathrm{D}'),$$

ou, en faisant usage de l'écriture (55),

$$\mathrm{B} = \left(\frac{-4}{\mathrm{Q}}\right)(-4\mathrm{D}', \mathrm{Q}) \cdot \frac{1}{2} \mathrm{Cl}(-4\mathrm{D}'), \qquad \mathrm{D}' > 0.$$

Mais si D′ est négatif et différent de -4, la relation

$$S\left(\tfrac{3}{4}, -\Delta'\right) = S\left(\tfrac{1}{4}, -\Delta'\right)$$

fait voir que la somme (α) sera égale à

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu}\right) = \frac{2}{\tau'}\,\mathrm{Cl}(D'),$$

puisque D′ est pair, et il s'ensuit :

$$B = (D', Q)\cdot\frac{2}{\tau'}\,\mathrm{Cl}(D'), \qquad D' < 0.$$

On trouverait aisément que ce résultat subsiste aussi pour $D' = -4$, et c'est le seul cas où le facteur $\frac{2}{\tau'}$ diffère de l'unité.

Je poserai, pour abréger :

$$(a) \qquad \begin{cases} \overline{(D, Q)} = \left(\frac{-4}{Q}\right)(-4D, Q) & \text{pour} \quad D > 0, \\ \overline{(D, Q)} = (D, Q) & \text{pour} \quad D < 0; \end{cases}$$

et puis :

$$(b) \qquad \begin{cases} K(D) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(-4D) & \text{pour} \quad D > 0, \\ K(D) = \frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(D) & \text{pour} \quad D < 0; \end{cases}$$

et j'aurai alors cette formule :

$$(c) \qquad B(D', Q) = \overline{(D', Q)}\,K(D') \text{ pour Q impair, D′ pair.}$$

La valeur de S sera dans cette écriture :

$$(d) \qquad \begin{cases} S = K(D_1D_2D_3) + \sum\limits_{\alpha=2,3} \overline{(D_1D_\beta,\ \Delta_\alpha)}\,K(D_1D_\beta) \\ \qquad + \overline{(D_1,\ \Delta_2\Delta_3)}\,K(D_1) + \frac{1}{4}\varphi(\Delta_1\Delta_2\Delta_3) \quad \big(D_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 8)\big). \end{cases}$$

Cela étant, je pose $D_1 = -8$, $D_2 = p$, $D_3 = p'$; p et p' étant deux nombres premiers de la forme $4k+1$; il vient :

$$S = \mathrm{Cl}(-8pp') + \left(1 - \left(\frac{-8p}{p'}\right)\right)\mathrm{Cl}(-8p) + \left(1 - \left(\frac{-8p'}{p}\right)\right)\mathrm{Cl}(-8p')$$
$$+ \left(1 - \left(\frac{-8}{p}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{-8}{p'}\right)\right) + \varphi(pp').$$

Or, en se rappelant la propriété établie plus haut,

$$\mathrm{Cl}(-8p) \equiv 1 - \left(\frac{2}{p}\right) \pmod{4},$$

et en observant que S est divisible par 8, on en déduit :

$$\mathrm{Cl}(-8pp') \equiv \left(1 - \left(\frac{2p}{p'}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) - \left(1 - \left(\frac{2p'}{p}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{p'}\right)\right)$$
$$+ \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{p'}\right)\right) \pmod{8},$$

ou, en simplifiant :

$$(61)\quad \mathrm{Cl}(-8pp') \equiv \left(1 - \left(\frac{p}{p'}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{pp'}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{2}{p'}\right)\right) \pmod{8}$$

$p \equiv p' \equiv 1 \pmod{4}$ étant des nombres premiers).

En restant dans l'hypothèse de $D_1 = -8$, je pose $D_2 = -q$, $D_3 = -q'$, en supposant que les deux nombres premiers q et q' soient de la forme $4k+3$; on aura d'abord :

$$S = \mathrm{Cl}(-8qq') - (-8q, q')\tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}(-32q)$$
$$-(-8q', q)\tfrac{1}{2}\mathrm{Cl}(-32q') + (-8, qq') + \varphi(qq');$$

or on a :

$$\mathrm{Cl}(-32q)=2\,\mathrm{Cl}(-8q),$$

et puis :

$$\mathrm{Cl}(-8q)\equiv 1-\left(\frac{2}{q}\right) \quad (\mathrm{mod.}\ 4);$$

en observant que dans le cas actuet $\varphi(qq')\equiv 4 \pmod{8}$, on en tire la congruence

$$\mathrm{Cl}(-8qq')\equiv\left(1+\left(\frac{2q}{q'}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{q}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{q}{q'}\right)\left(\frac{2}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{q'}\right)\right)$$
$$+\left(1+\left(\frac{2}{q}\right)\right)\left(1+\left(\frac{2}{q'}\right)\right)-4,$$

ou, en simplifiant :

$$\mathrm{Cl}(-8qq')\equiv\left(\frac{2q}{q'}\right)+\left(\frac{2q'}{q}\right)+\left(\frac{2}{qq'}\right)-1 \quad (\mathrm{mod.}\ 8) \tag{62}$$

($q\equiv q'\equiv -1 \pmod{4}$ étant des nombres premiers).

Prenons maintenant

$$D_1=8, \qquad D_2=p, \qquad D_3=-q \quad (p\equiv -q\equiv 1 \pmod{4});$$

nous aurons :

$$S=\mathrm{Cl}(-8pq)-\left(1+\left(\frac{2p}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-8p)+\left(1-\left(\frac{2q}{p}\right)\right)\mathrm{Cl}(-8q)$$
$$-\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{2}{q}\right)\right)+\varphi(pq),$$

d'où il suit :

$$\mathrm{Cl}(-8pq)\equiv\left(1+\left(\frac{2p}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{2q}{p}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{q}\right)\right)$$
$$-\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1+\left(\frac{2}{q}\right)\right),$$

ou, après une légère modification,

$$(63) \quad \mathrm{Cl}(-8pq) \equiv \left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{2}{q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2q}{p}\right)\right) \pmod{8}$$

(les nombres premiers p et q satisfaisant aux conditions $p \equiv 1$, $q \equiv -1 \pmod{4}$).

Je vais maintenant transformer la somme S dans l'hypothèse de $D_1 = -4$. Les sommes A qu'on devra considérer seront alors :

$$A = \sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta' Q} \left(\frac{D'Q^2}{\nu}\right), \quad D' \text{ impair, Q divisible par 4 et non par 8.}$$

Dans l'expression

$$A = \sum \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right) \sum_{\nu=1}^{\Delta' \frac{Q}{4d}} \left(\frac{D'}{\nu}\right)$$

les sommes qui correspondent à des d impairs seront nulles, puisque $\frac{Q}{4d}$ est alors entier; mais pour les d pairs (impairement pairs), que j'écrirai $2d$, on a $\frac{Q}{4d} = Q'$ impair, et

$$\frac{1}{2}\Delta' Q' = \Delta' \frac{Q'-1}{2} + \frac{1}{2}\Delta',$$

de sorte qu'il vient :

$$A = -\sum \mu(d)\left(\frac{D'}{2d}\right) \sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu}\right),$$

d parcourant les diviseurs de $\frac{Q}{4}$.

On a donc

$$A = -\left(\frac{2}{D'}\right)\left(D', \frac{Q}{4}\right) \cdot \sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta'} \left(\frac{D'}{\nu}\right).$$

Les sommes B étant de la même forme que précédemment, nous aurons à ajouter à l'expression de S obtenue plus haut les termes suivants :

$$-\left(\frac{2}{D_2D_3}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta_2\Delta_3}\left(\frac{D_2D_3}{\nu}\right)-\left(\frac{2}{D_2}\right)(D_2, \Delta_3)\sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta_2}\left(\frac{D_2}{\nu}\right)$$

$$-\left(\frac{2}{D_3}\right)(D_3, \Delta_2)\sum_{1}^{\frac{1}{2}\Delta_3}\left(\frac{D_3}{\nu}\right)=S_0.$$

Dans le cas de $D_2=-q$, $D_3=-q'$ $(q\equiv q'\equiv -1 \text{ mod. } 4)$, q et q' étant premiers, on aura :

$$S_0=-\left(\frac{2}{q}\right)\left(1+\left(\frac{q}{q'}\right)\right)\frac{2}{\tau_q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q)$$

$$-\left(\frac{2}{q'}\right)\left(1+\left(\frac{q'}{q}\right)\right)\frac{2}{\tau_{q'}}\left(2-\left(\frac{2}{q'}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q');$$

l'ancienne expression S aurait donné :

$$\mathrm{Cl}(-4qq')-\left(1+\left(\frac{q}{q'}\right)\right)\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-4^2q)-\left(1+\left(\frac{q'}{q}\right)\right)\frac{1}{2}\mathrm{Cl}(-4^2q')$$

$$+\frac{1}{2}\varphi(qq')+2;$$

en l'ajoutant avec la quantité S_0 et en faisant usage de la relation

$$\mathrm{Cl}(-4^2q)=2\cdot\frac{2}{\tau_q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q),$$

il vient :

$$S=\mathrm{Cl}(-4qq')-\frac{2}{\tau_q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q)\left(1+\left(\frac{2}{q}\right)\right)\left(1+\left(\frac{q}{q'}\right)\right)$$

$$-\frac{2}{\tau_{q'}}\left(2-\left(\frac{2}{q'}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q')\left(1+\left(\frac{2}{q'}\right)\right)\left(1+\left(\frac{q'}{q}\right)\right)+\frac{(q-1)(q'-1)}{2}+2.$$

Cela posé, observons que les nombres $\frac{2}{\tau_q}\left(2-\left(\frac{2}{q}\right)\right)\mathrm{Cl}(-q)$ sont impairs et puis, comme cela se vérifie aisément,

$$\frac{(q-1)(q'-1)}{2}+2\equiv 2\left[\left(\frac{2}{q}\right)+\left(\frac{2}{q'}\right)\right];$$

nous aurons :

$$(64)\qquad \mathrm{Cl}(-4qq')\equiv 2-\left(\frac{2}{q}\right)\left(1+\left(\frac{q'}{q}\right)\right)-\left(\frac{2}{q'}\right)\left(1+\left(\frac{q}{q'}\right)\right)\pmod{8}$$

(les nombres premiers q, q' étant de la forme $4k+3$).

Si au contraire on fait $D_2=p$, $D_3=p'$ ($p\equiv p'\equiv 1 \pmod{4}$), la quantité S_0 deviendra $S_0=0$, et nous aurons :

$$S=\mathrm{Cl}(-4pp')+\left(1-\left(\frac{p}{p'}\right)\right)\left[\mathrm{Cl}(-4p)+\mathrm{Cl}(-4p')\right]+\frac{1}{2}\varphi(pp'),$$

d'où cette congruence :

$$\mathrm{Cl}(-4pp')\equiv\left(1-\left(\frac{p}{p'}\right)\right)\left(\left(\frac{2}{p}\right)-\left(\frac{2}{p'}\right)\right),$$

ou bien

$$(65)\qquad \mathrm{Cl}(-4pp')\equiv\left(1-\left(\frac{p}{p'}\right)\right)\left(1-\left(\frac{2}{pp'}\right)\right)\pmod{8}.$$

(p, p' deux nombres premiers de la forme $4k+1$).

Ces résultats sont dus à M. Hurwitz.

CHAPITRE IV.

SUITE DES RECHERCHES ANALYTIQUES.

1. Soient v, w deux quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel, puis soient ξ, η, ξ_0, η_0 des quantités réelles que je suppose ne pas être des entiers; cela étant, la série à double entrée

$$(a)\qquad \sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\eta+n)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots)$$

sera certainement convergente, si l'on suppose la sommation effectuée d'abord par rapport à l'une des deux lettres m, n. La même chose a lieu pour la série

$$\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\xi+m)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]};$$

en supposant, dans les deux séries, le même ordre de sommation, multiplions la première par v, l'autre par w et ajoutons; alors la quantité $(\xi+m)v+(\eta+n)w$ apparaîtra au numérateur, et en réduisant, il vient :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & v\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\eta+n)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]} + w\sum_{m,n} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0-(\xi+m)\eta_0]}}{(\xi+m)[(\xi+m)v+(\eta+n)w]} \\ & = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\eta+n)\xi_0}}{\eta+n} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(\xi+m)\eta_0}}{\xi+m}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on admet que la série (a) ne change pas sa valeur en intervertissant l'ordre de sommation, ce que l'on pourrait d'ailleurs montrer directement, mais avec peu d'élégance, si l'on s'appuyait sur la méthode de sommation partielle d'Abel, on pourra simplifier le premier membre de cette dernière équation; on a en effet

$$(2) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\sigma\pi i}}{u-k} = 2\pi i \cdot \frac{e^{2\sigma u\pi i}}{e^{2u\pi i}-1} \qquad (0<\sigma<1),$$

ce qu'on peut écrire, en changeant u en $-u$:

$$(2^{bis}) \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma\pi i(u+k)}}{u+k} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2u\pi i}}.$$

On obtient ainsi, en introduisant les hypothèses $0<\xi_0<1$, $0<\eta_0<1$, la relation :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\xi_0 v+\eta_0 w)(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n)+2\xi\pi i}-1} \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \cdot \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{w}(v-\xi_0 v-\eta_0 w)(\xi+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1} \\ &= \frac{2\pi i\, e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\eta\pi i}-1)(e^{2\xi\pi i}-1)} \qquad (0<\xi_0<1,\ 0<\eta_0<1). \end{aligned} \right.$$

Cette relation a été remarquée par M. Lerch dans ses études sur les recherches que Kronecker a publiées les dernières années de sa vie; il résulte desdites études comme bien probable que Kronecker avait en vue la formation de certains invariants de formes quadratiques; en tous cas, on parvient dans cette voie à différentes propriétés de la transcendante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+u} \frac{e^{2ns\pi i}}{1-e^{2\pi i(n\omega+x)}}$$

(les parties imaginaires de ω et s ayant le même signe et celle de s étant plus petite)..

Elle admet par exemple une transformation linéaire remarquable dont la formule (3) n'est que le cas le plus simple. Cette dernière formule appartient d'un autre côté à une région plus transcendante où intervient par exemple la série à double entrée

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m\xi+n\eta)}}{(u+mv+nw)^s};$$

mais je ne ferai pas usage, dans ce qui suit, de ces études limitrophes aux deux régions étrangères, celle des transcendantes elliptiques et les fonctions gamma, et c'est uniquement de la relation (3) que je vais tirer quelques conséquences pouvant intéresser les géomètres qui s'occupent de la détermination analytique du nombre des classes.

Pour établir notre relation (3) d'une manière en même temps simple dans la forme et rigoureuse, je vais reproduire un passage d'un mémoire qui a paru dans les écrits de l'Académie de Prague (1893, n° 23).

Soient v, w deux quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel, ξ, η deux fractions propres, puis a, x, y des variables complexes, et considérons la fonction suivante de la variable complexe z :

$$\frac{e^{2z\pi i(\xi v+\eta w)}}{\left(e^{2\pi i(vz-x)}-1\right)\left(e^{2\pi i(wz-y)}-1\right)}\cdot\frac{1}{z+a}=f(z).$$

Elle n'admet à distance finie d'autres singularités que les pôles

$$z=-a,\qquad \text{puis } z=\frac{n+x}{v},\qquad z=\frac{n+y}{w}\ (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots),$$

qui seront simples, si l'on exclut certaines valeurs particulières des lettres a, x, y, ce que nous supposons rempli. Ces derniers pôles en nombre infini sont distribués sur deux droites différentes et y font deux suites de points équidistants; on peut donc choisir une constante positive ρ, de telle sorte que les cercles décrits du rayon ρ

autour des différents pôles comme centres ne se coupent pas, au moins ceux qui correspondent à des pôles suffisamment éloignés; en supprimant du plan les régions en nombre infini limitées par ces cercles (ρ), il reste une région connexe, et c'est dans cette région que je suppose tracé un contour C fermé et très étendu dans tous les sens; grâce aux hypothèses $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, la fonction $f(z)$ sera infiniment petite comme une exponentielle le long de la courbe C; il s'ensuit alors que l'intégrale $\int f(z)\,dz$ prise le long du contour C tend vers zéro, si l'on fait grandir indéfiniment les dimensions du contour C. D'un autre côté, cette intégrale s'exprime à l'aide des résidus de $f(z)$ aux pôles compris à l'intérieur de la courbe C d'une manière connue par le grand théorème de Cauchy; on parvient de la sorte immédiatement à la relation, où l'on a posé $v\xi+w\eta=s$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+av+n}\,\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(x+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v}(wx-vy+nw)}-1}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{y+aw+n}\,\frac{e^{\frac{2s\pi i}{w}(y+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{w}(vy-wx+nv)}-1}$$

$$+\frac{2\pi i\,e^{-2sa\pi i}}{\left(e^{-2\pi i(x+av)}-1\right)\left(e^{-2\pi i(y+aw)}-1\right)}=0.$$

Faisant

$$x+av=\eta,\qquad y+aw=\xi,$$

et changeant ξ, η en ξ_0 et η_0, il vient

$$(3^*)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\eta+n}\,\frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n)-2\xi\pi i}-1}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi+n}\,\frac{e^{\frac{2s\pi i}{w}(\xi+n)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+n)-2\eta\pi i}-1}\\&+\frac{2\pi i}{\left(e^{-2\xi\pi i}-1\right)\left(e^{-2\eta\pi i}-1\right)}=0\qquad\left(\begin{matrix}s=\xi_0v+\eta_0w\\0<\xi_0<1,\quad 0<\eta_0<1\end{matrix}\right)\end{aligned}\right.$$

Cette relation prend la forme (3) en changeant ξ en $-\xi$ et en écrivant dans la seconde série $-n$ au lieu de n; elle est d'ailleurs plus symétrique.

Je pose maintenant $\frac{w}{v} = \omega$, $\xi_0 + \eta_0\omega = u$, en supposant que la partie imaginaire de ω soit positive; l'équation (3) prend alors une forme plus simple :

$$(3^a)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i}-1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+2\pi i\frac{1-u}{\omega}(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1}$$
$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{\eta\pi i}}{\sin\eta\pi} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}.$$

En supposant que l'on ait $0 < \xi < 1$, la valeur absolue de la quantité

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)}$$

sera plus grande que 1 pour $m \geqq 0$ et plus petite que 1 pour $m < 0$; en supposant η réel, on aura donc :

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(1-u)+2\eta\pi i}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)+2\eta\pi i}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(n+u)(m+\xi)}$$

pour $m \geqq 0$, et

$$\frac{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(1-u)+2\eta\pi i}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)+2\eta\pi i}-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(n-u)(m+\xi)}$$

pour $m < 0$; en faisant usage de ces développements et en écrivant $-m$ au lieu de m si ce nombre est négatif, la formule (3^a) deviendra :

$$(3^b)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+\eta} \frac{e^{2u\pi i(n+\eta)}}{e^{2\omega\pi i(n+\eta)+2\xi\pi i}-1} + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(n+u)(m+\xi)} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(n-u)(m-\xi)} = -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{\eta\pi i}}{\sin\eta\pi} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}. \end{aligned} \right.$$

Cela étant, posons $\eta = \frac{h}{\Delta}$, où Δ est la valeur absolue d'un discriminant fondamental négatif; multiplions les deux membres par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, 3 \cdots \Delta - 1$; on aura au second membre la quantité

$$-\frac{\pi i}{2}\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta} = -\frac{2\pi i}{\tau}\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi},$$

et au premier membre la première somme se simplifie en posant $n\Delta + h = m$, ce qui donne :

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{sgn} m;$$

dans la deuxième somme du premier membre, la sommation par rapport à h s'effectuera immédiatement au moyen de la formule

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)e^{\pm\frac{2nh\pi i}{\Delta}} = \pm\left(\frac{-\Delta}{n}\right)i\sqrt{\Delta},$$

et il vient la formule

$$(4)\left\{\begin{aligned}
-\frac{2\pi i}{\tau}\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi} &= \Delta\sum_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{\operatorname{sgn} m}{m}\,\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}\\
&\quad - i\sqrt{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+\xi}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}\\
&\quad + i\sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m-\xi}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}\\
&(u = \xi_0 + \eta_0\omega, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \xi_0 < 1, \quad 0 < \eta_0 < 1),
\end{aligned}\right.$$

dont nous allons tirer quelques conséquences.

Elle fournirait une représentation du nombre des classes, si l'on faisait $\xi = \frac{1}{2}$, car alors la sommation par rapport à m, dans les deux dernières séries, s'effectue à l'aide des logarithmes; mais le résultat n'est pas aussi simple que ceux que nous avons établis dans le chapitre II. Mais j'ai en vue d'obtenir des relations qui ne présentent pas des complications inutiles et je passe donc à une autre considération. La première série dans le second membre de (4) peut évidemment s'écrire :

$$-\Delta \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}}+\Delta \sum_1^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2m\pi i}{\Delta}(\omega-u)-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}},$$

ou bien, en développant les termes en séries géométriques,

$$-\Delta \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m} e^{\frac{2m\pi i}{\Delta}(n\omega+u)+2n\xi\pi i}$$

$$+\Delta \sum_{m=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m} e^{\frac{2m\pi i}{\Delta}(n\omega-u)-2n\xi\pi i}$$

Cela étant, soit $-\Delta'$ un nouveau discriminant fondamental, et posons dans la formule (4) $\xi=\frac{h}{\Delta'}$; multiplions par $\left(\frac{-\Delta'}{h}\right)$ et ajoutons pour $h=1, 2, 3\cdots\Delta'-1$.

Il vient

$$-\frac{2\pi i}{\tau}\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\sum_{h=1}^{\Delta'-1}\left(\frac{-\Delta'}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta'}$$

$$=-i\Delta\sqrt{\Delta'}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\frac{-\Delta'}{n}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2m\pi i}{\Delta}(n\omega+u)}$$

$$-i\Delta\sqrt{\Delta'}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\frac{-\Delta'}{n}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2m\pi i}{\Delta}(n\omega-u)}$$

$$-i\Delta'\sqrt{\Delta}\sum_{\mu=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\left(\frac{-\Delta'}{\mu}\right)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{2\mu\pi i}{\Delta'\omega}(n+u)}$$

$$-i\Delta'\sqrt{\Delta}\sum_{\mu=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\left(\frac{-\Delta'}{\mu}\right)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{2\mu\pi i}{\Delta'\omega}(n-u)};$$

en remplaçant la somme

$$\sum \left(\frac{-\Delta'}{h}\right) \cot \frac{hx}{\Delta'} \quad \text{par sa valeur} \quad \frac{4\sqrt{\Delta'}}{\tau'} \mathrm{Cl}(-\Delta'),$$

nous aurons :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{8\pi}{\tau\tau'} \mathrm{Cl}(-\Delta)\,\mathrm{Cl}(-\Delta') \\ & = \sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\frac{-\Delta'}{n}\right) \frac{1}{m} e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta}} \left(e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta}}\right) \\ & + \sqrt{\Delta'} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\frac{-\Delta'}{n}\right) \frac{1}{n} e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta'\omega}} \left(e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta'\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta'\omega}}\right). \end{aligned} \right.$$

Cette formule se simplifie si l'on choisit $\Delta' = \Delta$ et si l'on y fait $u = 0$; elle devient :

$$\frac{4\pi}{\tau^2} \mathrm{Cl}^2(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum_1^{\infty} \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{mn}\right) \frac{1}{m} \left(e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta}} + e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta\omega}}\right);$$

en faisant $mn = a$, on aura :

$$\sum \frac{1}{m} = \frac{1}{a} \sum n = \frac{\Theta_1(a)}{a},$$

où $\Theta_1(a)$ *signifie la somme de tous les diviseurs du nombre a;* on a donc cette représentation du carré du nombre des classes,

$$(6) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\Theta_1(n)}{n} \left(e^{-\frac{2nx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{2n\pi}{\Delta x}}\right),$$

où nous avons posé $\omega = ix$, de sorte que x ou est positif ou a sa partie réelle positive; prenant par exemple $x = 1$, cette formule devient :

$$(6^0) \qquad \mathrm{Cl}(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\Theta_1(n)}{n} e^{-\frac{2n\pi}{\Delta}}.$$

Malgré son intérêt, cette formule a peu d'importance pour la pratique, puisque la série ne converge que lentement si Δ est un peu grand.

On parvient à des formules plus utiles, si l'on conserve pour Δ' une valeur petite et si l'on emploie les formules établies dans le chapitre III :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta'}{n}\right)z^n = \frac{Q(z, -\Delta')}{1-z^{\Delta'}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta'}{n}\right)\frac{1}{n}z^n = \frac{1}{i\sqrt{\Delta'}}\left(-\log c + \log\frac{A(z, -\Delta')}{B(z, -\Delta')}\right),$$

où c est une constante choisie de telle sorte que la dernière expression s'annule avec z. On a :

$$\log\frac{A(z)}{B(z)} = \log\frac{Y(z) - i\sqrt{\Delta'}\,Z(z)}{Y(z) + i\sqrt{\Delta'}\,Z(z)} = -\,2i \operatorname{arc\,tg}\frac{Z(z)\sqrt{\Delta'}}{Y(z)},$$

et, par conséquent :

$$\sqrt{\Delta'}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta'}{n}\right)\frac{1}{n}z^n = \gamma - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\Delta}\,Z(z, -\Delta')}{Y(z, -\Delta')}, \qquad \gamma = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\Delta'}Z(0)}{Y(0)},$$

les polynômes Y et Z étant connus du chapitre III. En faisant, dans la formule (5), $u=0$ et posant pour plus de simplicité $\omega = ix$, $x>0$, les sommations relatives à n s'effectueront à l'aide des formules que nous venons de rappeler et nous aurons :

$$(7)\quad \frac{4\pi}{\tau\tau'}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\,\mathrm{Cl}(-\Delta') = \sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{Q\left(e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}}, -\Delta'\right)}{1-e^{-\frac{2m\Delta' x\pi}{\Delta}}}$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\gamma - 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\Delta'}\,Z\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta' x}}, -\Delta'\right)}{Y\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta' x}}, -\Delta'\right)}\right).$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Je pose, pour abréger :

$$x = u\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta'}},\qquad e^{-\frac{2\pi u}{\sqrt{\Delta\Delta'}}} = \xi,\qquad e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{\Delta\Delta'}}} = \eta,$$

et j'aurai donc cette forme un peu plus simple

$$(7^*)\left\{\begin{aligned}\frac{4\pi}{\tau\tau'}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)\,\mathrm{Cl}(-\Delta') = \sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{Q(\xi^m, -\Delta')}{1-\xi^{m\Delta'}}&\\ +\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\left(\gamma - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{\Delta'}\,Z(\eta^m, -\Delta')}{Y(\eta^m, -\Delta')}\right)&,\end{aligned}\right.$$

les quantités réelles et positives ξ, η satisfaisant à la relation

$$\log\xi\cdot\log\eta = \frac{4\pi^2}{\Delta\Delta'},\qquad \xi < 1,\qquad \eta < 1.$$

Prenons par exemple $\Delta' = 4$; on a :

$$Q(z) = z - z^3,\qquad Y(z) = 2z,\qquad Z(z) = 1;$$

donc

$$\frac{Q(z)}{1 - z^{\Delta'}} = \frac{z}{1+z^2},\qquad \gamma - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\sqrt{\Delta'}\,Z}{Y} = \pi - 2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{z} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,z,$$

et, par conséquent,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\pi}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{e^{-\frac{mu\pi}{\sqrt{\Delta}}}}{1+e^{-\frac{2mu\pi}{\sqrt{\Delta}}}}&\\ +2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\mathrm{arc\,tg}\,e^{-\frac{m\pi}{u\sqrt{\Delta}}}&.\end{aligned}\right.$$

Si $\Delta' = 3$, on a :

$$Q(z) = z - z^2,\qquad Y(z) = 2z + 1,\qquad Z(z) = 1,\qquad \gamma = \frac{2\pi}{3},$$

et il vient :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{3\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{\xi^{m}-\xi^{2m}}{1-\xi^{3m}}+2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta^{m}\sqrt{3}}{2+\eta^{m}},\\
&\qquad\qquad \xi=e^{-\frac{2u\pi}{\sqrt{3\Delta}}},\qquad \eta=e^{-\frac{2\pi}{u\sqrt{3\Delta}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

L'hypothèse de $\Delta'=8$ fournit :

$$
Q=z+z^3-z^5-z^7,\qquad Y=2z^2-2,\qquad Z=z,\qquad \gamma=0,
$$

et puisque

$$
\frac{Q}{1-z^8}=\frac{z+z^3}{1+z^4},
$$

on a :

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)=\sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{\xi^{m}+\xi^{3m}}{1+\xi^{4m}}+2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta^{m}\sqrt{2}}{1-\eta^{2m}},\\
&\qquad\qquad \xi=e^{-\frac{u\pi}{\sqrt{2\Delta}}},\qquad \eta=e^{-\frac{\pi}{u\sqrt{2\Delta}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Soit D un discriminant fondamental positif, et posons, dans l'équation (3^b), $\eta=\frac{h}{D}$, puis multiplions par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons pour $h=1, 2, 3\ldots D-1$; on aura :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{D}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1}&+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(n+u)(m+\xi)}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m-\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(n-u)(m-\xi)}=0.
\end{aligned}
$$

Dans la première série, séparons les termes du m positif des termes du m négatif, et transformons les premiers au moyen de l'identité

$$
\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1}=-e^{\frac{2mu\pi i}{D}}-\frac{e^{\frac{2m\mu\pi i}{D}}}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}-1};
$$

la relation précédente deviendra alors :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2mu\pi i}{D}} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m-\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} \\ &\quad - \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\left[\frac{e^{\frac{2mu\pi}{D}}}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}-1}+\frac{e^{-\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1}\right], \end{aligned}\right.$$

où la lettre u signifie une quantité complexe de la forme

$$\xi_0+\eta_0\omega, \qquad 0<\xi_0<1, \qquad 0<\eta_0<1.$$

En passant à la limite pour $u=0$, on a d'abord

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(D)\log E(D) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m+\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\pi i}{\omega}(m+\xi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m-\xi}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\pi i}{\omega}(m-\xi)} \\ &\quad - \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\left(\frac{1}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}-1}+\frac{1}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}-1}\right) \end{aligned}\right.$$

Dans les deux premières séries, on pourra effectuer la sommation par rapport à m, si l'on fait $\xi=\frac{1}{2}$; il vient ainsi

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{\lambda,n}\frac{4}{\lambda}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{\lambda n\pi i}{\omega}} + 2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}}+1}$$

$$(\lambda=1, 3, 5, \ldots).$$

et puisque

$$2\sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{\lambda n\pi i}{\omega}} = \log \frac{1+e^{-\frac{n\pi i}{\omega}}}{1-e^{-\frac{n\pi i}{\omega}}},$$

on retrouve la formule (80) du chapitre II.

En isolant, dans le second membre de la formule (12), les termes où $m=0$ et en remplaçant leur somme

$$\frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right) e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}}$$

par sa valeur

$$(a) \qquad \frac{1}{\xi}\cdot\frac{Q\left(e^{-\frac{2\xi\pi i}{\omega}}, D\right)}{1-e^{-\frac{2D\xi\pi i}{\omega}}},$$

on pourra passer à la limite pour $\xi=0$; en remarquant qu'on a, comme on sait, pour D positif,

$$Q(1)=0, \qquad Q'(1)=0, \qquad Q''(1)=\sum_{\nu=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu^2,$$

on voit que la limite de l'expression (a) sera

$$\frac{\pi i}{D\omega}\sum_{\nu=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu^2,$$

et il vient, par conséquent :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \frac{\pi i}{2D\omega}\sum_{\nu=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\nu^2 + \sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mn\pi i}{\omega}}$$
$$-\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{1}{e^{-\frac{2m\omega\pi i}{D}}-1}.$$

Si dans la première série on effectue la sommation par rapport à m, on retombe sur la formule (84) du chapitre II.

3. À ces recherches qui ont conduit à des développements convergents, j'ajouterai quelques résultats qui concernent certains développements demi-convergents dans lesquels intervient le nombre des classes. Il serait trop long d'établir tous les raisonnements qui m'ont fourni les formules fondamentales pour ces développements; une exposition méthodique des résultats en question trouvera sa place dans un mémoire sur les intégrales définies, et ici je me borne à vérifier les formules de départ.

La formule suivante, qui est bien élémentaire et qui se vérifie immédiatement,

$$\frac{e^v \sin 2\sigma ax + \sin 2(1-\sigma)ax}{e^v + e^{-v} - 2\cos 2ax} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nv} \sin 2(n+\sigma)ax,$$

a lieu si la partie réelle de v est positive et si ax est une quantité réelle; multiplions de part et d'autre par la différentielle

$$e^{-x^2} x\, dx$$

et intégrons de zéro à l'infini; les intégrales qui apparaissent de la sorte au second membre se calculent à l'aide de la formule

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x \sin 2ux\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, u\, e^{-u^2},$$

et il vient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-x^2} \frac{e^v \sin 2\sigma ax + \sin 2(1-\sigma)ax}{e^v + e^{-v} - 2\cos 2ax}\, x\, dx \\ &\qquad = \frac{a\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+\sigma)\, e^{-a^2(n+\sigma)^2 - nv}, \end{aligned}\right.$$

équation qui subsiste naturellement pour toutes les valeurs de σ;

réelles ou complexes; on établit de la même manière la formule suivante, dont la précédente résulte par différentiation [1]

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{e^v\cos 2\sigma a x-\cos 2(1-\sigma)ax}{e^v+e^{-v}-2\cos 2ax}\,dx\\ &=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}e^{-a^2(\sigma+m)^2-mv}.\end{aligned}\right.$$

Je suppose v réel et positif ainsi que a, et je vais passer à la limite pour $v=0$; une substitution directe n'étant pas possible, il faut d'abord transformer les premiers membres; en m'occupant de la dernière formule, je pose, pour abréger :

$$f(z)=e^{-z^2}\frac{e^v\cos 2\sigma az-\cos 2(1-\sigma)az}{e^v+e^{-v}-2\cos 2az}.$$

Soit φ un angle contenu entre zéro et $\frac{\pi}{4}$, les limites étant exclues, et appelons L la demi-droite indéfinie remplie des points

$$z=l.e^{i\varphi}\quad (l\geqq 0).$$

Dans les points infiniment éloignés et placés entre l'axe réel positif et la ligne L, la fonction $f(z)$ est infiniment petite d'un degré très élevé, et on pourra appliquer le théorème de Cauchy qui donne l'équation :

$$\int_0^\infty f(x)\,dx-\int_{\mathrm{L}} f(z)\,dz=2\pi i\sum_k \mathrm{R}_k,$$

en désignant par R_k les résidus aux différents pôles de la fonction $f(z)$ placés dans le domaine limité par l'axe réel positif et par la droite L; ces pôles étant

$$z_k=\frac{2k\pi+vi}{2a},$$

[1] Voir le mémoire de Kummer De integralibus definitis et seriebus infinitis [*Journal de Crelle*, t. XVII, formule (46)].

où l'on doit prendre $k = 1, 2, 3, \ldots$, si $v < 2\pi \operatorname{tg} \varphi$, ce que nous supposons rempli, le résidu R_k aura la valeur

$$R_k = e^{-\left(\frac{2k\pi + iv}{2a}\right)^2} \frac{e^v \cos \sigma(2k\pi + iv) - \cos(1-\sigma)(2k\pi + iv)}{2ai(e^v - e^{-v})}.$$

On aura donc la relation

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-a^2(\sigma+m)^2 - mv} \\ & - \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{2k\pi + iv}{2a}\right)^2} \frac{e^v \cos \sigma(2k\pi + iv) - \cos(1-\sigma)(2k\pi + iv)}{e^v - e^{-v}} \\ & = \int_L f(z)\, dz. \end{aligned} \right.$$

Le passage à la limite pour $v = 0$ dans le premier membre n'offre aucune difficulté, et il faudra seulement chercher la limite de l'intégrale. Partageons dans ce but le chemin de l'intégration L en deux parties $(0 \ldots \zeta)$ et $(\zeta \ldots \infty')$, ∞' signifiant le point à l'infini de la ligne L; on aura :

$$\int_L f(z)\, dz = \int_0^{\zeta} f(z)\, dz + \int_{\zeta}^{\infty'} f(z)\, dz.$$

Quant à la deuxième intégrale, la fonction restant finie pour v infiniment petit, on a immédiatement :

$$\lim_{v=0} \int_{\zeta}^{\infty'} f(z)\, dz = \int_{\zeta}^{\infty'} e^{-z^2} \frac{\cos 2\sigma a z - \cos 2(1-\sigma) a z}{4 \sin^2 a z}\, dz,$$

ou bien :

$$(\beta) \qquad \lim_{v=0} \int_{\zeta}^{\infty'} f(z)\, dz = \frac{1}{2} \int_{\zeta}^{\infty'} e^{-z^2} \frac{\sin(1-2\sigma) a z}{\sin a z}\, dz.$$

Pour les valeurs suffisamment petites de z on peut poser $\sin az = t$ et on obtient, en résolvant, z exprimé en fonction de t par une série de puissance ordinaire; on aura donc, comme il est aisé de voir

$$f(z)\,dz = \frac{1}{a}\left[e^v - 1 + t^2 P(t^2)\right] \frac{dt}{\left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2},$$

$P(t^2)$ désignant une série entière. Si donc ζ était choisi assez petit, on aurait :

$$\int_0^\zeta f(z)\,dz = \frac{1}{a}(e^v - 1)\int_0^\tau \frac{dt}{\left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2} + \frac{1}{a}\int_0^\tau \frac{t^2 P(t^2)\,dt}{\left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2},$$

où l'on a posé $\tau = \sin a\zeta$.

D'après l'hypothèse faite au sujet de l'angle φ, la quantité t^2 aura sa partie réelle positive, celle de la somme

$$\left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2$$

sera encore plus grande, et le quotient

$$\frac{t^2}{\left(e^{\frac{v}{2}} + e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2}$$

sera en valeur absolue plus petit que $\frac{1}{4}$. La dernière intégrale sera donc aussi petite qu'on le voudra, si l'on choisit convenablement le point ζ. Il s'agit donc seulement de la première intégrale, à savoir :

$$\frac{1}{a}(e^v - 1)\int_0^\tau \frac{dt}{\left(e^{\frac{v}{2}} + e^{-\frac{v}{2}}\right)^2 + 4t^2}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Elle a pour valeur l'expression

$$\frac{1}{a}(e^v - 1)\cdot\frac{1}{2\left(e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}\right)}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\tau}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}},$$

laquelle, pour v infiniment petit, se réduit à $\frac{\pi}{4a}$.

Il s'ensuit que la limite

$$\lim_{v=0}\int_L f(z)dz$$

sera autant moins différente de l'expression

$$\frac{\pi}{4a}+\frac{1}{2}\int_\zeta^{\infty'} e^{-z^2}\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az}dz$$

que ζ sera choisi plus petit; par conséquent

$$\lim_{v=0}\int_L f(z)\,dz = \frac{\pi}{4a}+\frac{1}{2}\int_L e^{-z^2}\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az}dz.$$

En substituant cette valeur dans la formule (α), nous aurons

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}
&2\sum_{m=0}^{\infty}e^{-a^2(\sigma+m)^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}}\cos 2k\sigma\pi\right)\\
&\qquad\qquad+\frac{2i\sqrt{\pi}}{a}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}}\sin 2k\sigma\pi\\
&\qquad\qquad=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_L e^{-z^2}\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az}dz.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on fait usage de la relation bien connue

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}}\cos 2k\sigma\pi\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-a^2(\sigma+m)^2},$$

l'équation (15) prend la forme suivante

$$(15^*)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} e^{-a^2(m+\sigma)^2} - \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a^2(m-\sigma)^2} + \frac{2i\sqrt{\pi}}{a}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}} \sin 2k\sigma\pi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathrm{L}} e^{-z^2}\,\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az}\,dz; \end{aligned}\right.$$

en supposant a et σ réels, on en déduit, par séparation des parties réelles et des parties imaginaires, différentes relations que je crois inutile d'écrire. Cette formule nous servira à établir un développement demi-convergent de la partie réelle du premier membre.

Je supposerai désormais

$$0 < \sigma < 1,$$

de sorte que l'équation suivante aura lieu :

$$\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - a^2z^2}\sin 2n\sigma\pi.$$

En faisant usage de l'identité

$$\frac{n\pi}{n^2\pi^2 - a^2z^2} = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{a^{2\nu}z^{2\nu}}{(n\pi)^{2\nu+1}} + \frac{a^{2m}z^{2m}}{(n\pi)^{2m-1}(n^2\pi^2 - a^2z^2)},$$

on aura

$$\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az} = 2\sum_{\nu=0}^{m-1} a^{2\nu}z^{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu+1}} + 2a^{2m}z^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2m-1}(n^2\pi^2 - a^2z^2)}.$$

C'est de cette identité que nous nous servirons pour transformer le second membre de (15*); nous multiplierons de gauche et de droite par $e^{-z^2}dz$ et intégrerons le long de la ligne L; en observant que l'on a, en vertu du théorème de Cauchy :

$$\int_{\mathrm{L}} e^{-z^2}z^{2\nu}dz = \int_0^{\infty} e^{-x^2}x^{2\nu}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right),$$

il vient :

$$(16)\quad \int_{L} e^{-z^2}\frac{\sin(1-2\sigma)az}{\sin az}\,dz=\sum_{\nu=0}^{m-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{2\nu}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu+1}}+R_m,$$

où

$$(16^a)\qquad R_m=2a^{2m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2m-1}}\int_{L}\frac{e^{-z^2}z^{2m}\,dz}{n^2\pi^2-a^2z^2}.$$

Cela étant, je représente par $\overline{R}_m$ la partie réelle de la quantité $\frac{2}{\sqrt{\pi}}R_m$, et j'aurai comme conséquence immédiate des équations (15*) et (16) le développement suivant

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}e^{-a^2(n+\sigma)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-a^2(n-\sigma)^2}\\ &\qquad=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)a^{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu+1}}+\overline{R}_m,\end{aligned}\right.$$

où il faut encore donner une limitation du reste $\overline{R}_m$; on a, évidemment :

$$|\overline{R}_m|<\frac{2}{\sqrt{\pi}}|R_m|,$$

et nous nous occuperons donc de R_m. Le point a^2z^2 étant situé sur la droite faisant avec l'axe réel positif un angle égal à 2φ, on a

$$|n^2\pi^2-a^2z^2|\geqq n^2\pi^2\sin 2\varphi;$$

on aura donc :

$$|R_m|<\frac{2a^{2m}}{\sin 2\varphi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2m+1}}\int_0^{\infty}e^{-x^2\cos 2\varphi}x^{2m}\,dx,$$

où nous avons remplacé la valeur absolue de la quantité

$$e^{-z^2}z^{2m}\quad\text{par son expression}\quad e^{-x^2\cos 2\varphi}x^{2m},$$

qui s'obtient en faisant $z=e^{i\varphi}x$.

En employant la notation de Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s),$$

nous aurons, par conséquent :

$$|R_m| < \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m+1)}{\sin 2\varphi \cos^{m+\frac{1}{2}} 2\varphi \cdot \pi^{2m+1}} a^{2m},$$

et, *a fortiori*,

$$(17^a) \qquad |\overline{R}_m| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1} \sin 2\varphi \cos^{m+\frac{1}{2}} 2\varphi} a^{2m}.$$

La quantité variable avec φ

$$\sin 2\varphi \cos^{m+\frac{1}{2}} 2\varphi$$

devient maximum pour

$$2\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}},$$

et on aura :

$$\sin 2\varphi \cdot \cos^{m+\frac{1}{2}} 2\varphi = \sqrt{\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}}.$$

Cette valeur fournira une expression de l'erreur plus exactement que toute autre valeur de φ, et nous aurons

$$(17^b) \qquad |\overline{R}_m| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}} \sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}} \cdot a^{2m}.$$

Cette expression du reste du développement (17) est celle dont on peut se servir dans la pratique; étant donnée la valeur de a suffisamment petite, on déterminera m de telle sorte que l'expression (17^b) devienne négligeable.

Soit A_m le second membre de l'inégalité (17^b), après la suppression du facteur $\zeta(2m+1)$ qui est près de l'unité; on a :

$$(\gamma) \qquad \frac{A_m}{A_{m+1}} = \sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{2m+3}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{5}{2}}\left(m+\frac{5}{2}\right)^{m+\frac{5}{2}}}} \cdot \frac{\pi^2}{a^2};$$

la fonction

$$(\gamma') \qquad \frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{2m+3}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{5}{2}}\left(m+\frac{5}{2}\right)^{m+\frac{5}{2}}}$$

est décroissante et tend vers o, d'où il suit que A_m tend vers l'infini; si a est assez petit, la valeur de m pour laquelle l'expression (γ) devient égale à 1, sera considérable; désignons-la par m_0; pour $m < m_0$ on aura $A_{m+1} < A_m$, tandis que pour $m > m_0$ on a $A_{m+1} > A_m$. C'est donc pour $m \leqq m_0$ que A_m est le plus petit possible; l'expression (γ') ayant la valeur asymptotique $\frac{1}{m^2}$, on a, sensiblement :

$$m_0 = \frac{\pi^2}{a^2}.$$

Si l'on fait donc $m = m_0$, on trouve aisément

$$\left|\overline{R}_m\right| < \frac{2}{\pi}\zeta\left(\frac{2\pi^2}{a^2}+1\right)\frac{\sqrt{2e}}{a}e^{-\frac{\pi^2}{a^2}};$$

l'erreur est donc « proportionnelle » à la quantité $\frac{1}{a}e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}$, de sorte que notre développement demi-convergent donne une exactitude analogue à celle de la série de Stirling. Mais dans les calculs effectifs on ne va jamais jusqu'à cette valeur de m, et c'est pourquoi l'inégalité (17^b) est la plus importante.

Dans la formule (17), les séries trigonométriques

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu+1}}$$

sont des fonctions entières de σ, à un facteur constant près; ce sont les polynômes de Bernoulli; en appelant $S_{2\nu}(x)$ la fonction entière qui, pour x entier et positif, coïncide avec la somme

$$1^{2\nu} + 2^{2\nu} + 3^{2\nu} + \cdot \quad + (x-1)^{2\nu},$$

le second membre de (17) s'écrira

$$(17^c) \qquad 1 - 2\sigma + 2 \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^{\nu-1} S_{2\nu}(\sigma) \frac{a^{2\nu}}{\nu!} + \overline{R}_m.$$

Cette nature du développement (17) donne occasion à une observation qui me paraît intéressante. Les séries dont se compose le premier membre de l'équation (17)

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2(n\pm\sigma)^2}$$

ont une grande analogie formelle avec les transcendantes elliptiques, tandis que leur nature est beaucoup plus compliquée. Elles font partie d'un groupe de transcendantes très étendu que j'appelle *semi-elliptiques* ou les analogies elliptiques de la fonction Γ. Prenons l'équation employée plus haut

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-a^2(\sigma+m)^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} + \frac{2\sqrt{\pi}}{a} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}} \cos 2k\sigma\pi.$$

Pour a très petit, le premier membre est très grand; on pourrait désirer d'en chercher un développement demi-convergent, analogue à celui de (17) et à la série de Stirling; ce développement se compose ici d'un terme unique $\frac{\sqrt{\pi}}{a}$, car l'autre partie du second membre

$$R = \frac{2\sqrt{\pi}}{a}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}} \cos 2k\sigma\pi$$

a le caractère du *reste;* très souvent, les développements des fonctions elliptiques $f(u, \omega)$ suivant les puissances du paramètre ω sont demi-convergents et ces développements ont cette particularité que le nombre de leurs termes est constant.

Au contraire, le nombre des termes dans le développement demi-convergent de notre fonction semi-elliptique

$$\sum_{0}^{\infty} e^{-a^2(n+\sigma)^2} - \sum_{1}^{\infty} e^{-a^2(n-\sigma)^2}$$

a son nombre de termes *variable* avec la valeur de a, également comme la série de Stirling.

Cette circonstance pourrait rendre grand service dans certaines parties de la théorie des fonctions elliptiques; en particulier on pourra s'en servir pour prouver l'impossibilité de certaines relations, qui, elle, ne peut pas s'établir par un calcul direct.

Revenons sur l'équation (17) et écrivons $\overline{R}_m(\sigma)$ au lieu de $\overline{R}_m$. Soit $-\Delta$ un discriminant fondamental négatif, posons dans (17) $\sigma = \frac{h}{\Delta}$, multiplions de gauche et de droite par $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et ajoutons; en posant $n\Delta + h = k$, resp. $n\Delta - h = k$, on aura, à la gauche,

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{k}\right) e^{-\frac{a^2k^2}{\Delta^2}},$$

tandis que, à la droite, les sommations s'effectuent directement à l'aide de la formule

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\sin\frac{2hn\pi}{\Delta} = \left(\frac{-\Delta}{n}\right)\sqrt{\Delta};$$

on aura ainsi :

$$(18)\quad 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)e^{-\frac{n^2a^2}{\Delta^2}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{\nu=0}^{m-1}\Gamma\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)a^{2\nu}\cdot\sqrt{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2\nu+1}}+\overline{\mathrm{R}}_m^*,$$

où l'on pose :

$$\overline{\mathrm{R}}_m^*=\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\overline{\mathrm{R}}_m\left(\frac{h}{\Delta}\right).$$

Les coefficients

$$\sqrt{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2\nu+1}}$$

sont des nombres rationnels; en particulier, le premier est égal à

$$\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta),$$

de sorte que l'on aura un développement demi-convergent

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)e^{-\frac{n^2a^2}{\Delta^2}}=\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta)+\mathrm{A}_1a^2+\mathrm{A}_2a^4+\cdots.$$

Le reste $\overline{\mathrm{R}}_m^*$ est la partie réelle de la quantité

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{R}_m^*=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\mathrm{R}_m\left(\frac{h}{\Delta}\right);$$

la quantité R_m^* s'obtient à l'aide de (16^a) sous la forme

$$\mathrm{R}_m^*=2a^{2m}\sqrt{\Delta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2m-1}}\int_{\mathrm{L}}\frac{e^{-z^2}z^{2m}dz}{n^2\pi^2-a^2z^2};$$

on aura donc, comme à (17^b) :

$$(18^a)\qquad \left|\overline{\mathrm{R}}_m^*\right|<2\sqrt{\frac{\Delta}{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m+1)}{\pi^{2m+1}}\sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}}\,a^{2m}.$$

IMPRIMERIE NATIONALE.

Puisque le reste $\overline{\mathrm{R}}_m^*$ ne devient négligeable que pour a suffisamment petit, la formule (18) ne contribue en rien à la pratique du calcul du nombre des classes; elle donne cependant une propriété intéressante de la transcendante semi-elliptique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) q^{n^2}$$

dont on rencontre des cas particuliers dans la théorie des fonctions elliptiques de troisième espèce.

Revenons sur l'équation (15*); en la différentiant par rapport à σ, nous aurons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} (m+\sigma)\, e^{-a^2(m+\sigma)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (m-\sigma)\, e^{-a^2(m-\sigma)^2} \\ &\quad - \frac{2i\pi\sqrt{\pi}}{a^3} \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\frac{k^2\pi^2}{a^2}} \cos 2k\sigma\pi \\ &\quad = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \int_{\mathrm{L}} e^{-z^2} \frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az}\, z dz. \end{aligned}\right.$$

En faisant usage de l'équation

$$\frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2\nu\sigma\pi}{\nu\pi + az}$$

ou bien

$$\frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az} = \frac{1}{az} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2az \cos 2n\sigma\pi}{n^2\pi^2 - a^2z^2},$$

on aura d'abord :

$$\frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az} = \frac{1}{az} - 2\sum_{\nu=0}^{m-1} (az)^{2\nu+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n^2\pi^2)^{\nu+1}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(az)^{2m+1} \cos 2n\sigma\pi}{(n^2\pi^2)^m (n^2\pi^2 - a^2z^2)},$$

d'où, par l'intégration :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a}\int_{\mathrm{L}} e^{-z^2} \frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az}\, zdz \\ &\quad = \frac{1}{a^2}\int_{\mathrm{L}} e^{-z^2} dz - 2\sum_{\nu=0}^{m-1} a^{2\nu} \int_{\mathrm{L}} e^{-z^2} z^{2\nu+2} dz \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu+2}} + \mathrm{R}_{m+1},\end{aligned}$$

où l'on pose

$$R_{m+1} = -2a^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2m}} \int_L \frac{e^{-z^2} z^{2m+2}}{n^2\pi^2 - a^2 z^2} dz.$$

On trouve, comme plus haut :

$$|R_{m+1}| < a^{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^{2m+2}} \cdot \frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\sin 2\varphi \cos^{m+\frac{3}{2}} 2\varphi}.$$

Si l'on remplace les intégrales par leurs valeurs et si l'on change m en $m-1$, on aura :

$$\frac{1}{a}\int_L e^{-z^2} \frac{\cos(1-2\sigma)az}{\sin az} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{a^2} - \sum_{\nu=1}^{m-1} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) a^{2\nu-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu}} + R_m,$$

avec l'inégalité

$$|R_m| < a^{2m-2} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m)}{\pi^{2m}\cdot \sin 2\varphi \cos^{m+\frac{1}{2}} 2\varphi},$$

dont on tire, comme plus haut :

$$(20'') \qquad |R_m| < a^{2m-2} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m)}{\pi^{2m}} \sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}}.$$

En retenant de (19) seulement les parties réelles, il vient :

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty} (m+\sigma) e^{-a^2(m+\sigma)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} (m-\sigma) e^{-a^2(m-\sigma)^2} \\ &= \frac{1}{a^2} - \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) a^{2\nu-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu}} + \overline{R}_m, \end{aligned} \right.$$

où $\overline{R}_m$ désigne la partie réelle de $\frac{2}{\sqrt{\pi}} R_m$, et, par conséquent :

$$|\overline{R}_m| < \frac{2}{\sqrt{\pi}} |R_m|.$$

Il est bon de remarquer que le reste R_m est donné par l'expression précise

$$(20^b) \qquad R_m = -2a^{2m-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2m-2}} \int_L \frac{e^{-z^2} z^{2m} dz}{n^2\pi^2 - a^2 z^2}.$$

Multiplions maintenant de part et d'autre l'équation (20) par $2ada$ et intégrons; il vient, en représentant par A une constante :

$$A - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+\sigma} e^{-a^2(m+\sigma)^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m-\sigma} e^{-a^2(m-\sigma)^2}$$
$$= 2\log a - \sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{a^{2\nu}}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu}} + \int_0 \overline{R}_m(a)\, 2ada.$$

Le reste

$$\int_0 \overline{R}_m(a)\, 2a\, da$$

est évidemment la partie réelle de la quantité

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0 R_m(a)\, 2a\, da;$$

il s'agit seulement d'évaluer la constante A; elle est égale à la limite

$$A = \lim_{a=0} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-a^2(m-\sigma)^2}}{m-\sigma} + 2\log a \right).$$

Pour la trouver, je vais considérer d'abord la quantité

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma}$$

pour a infiniment petit; soit u une quantité positive auxiliaire, je décompose la série S en deux parties, dont l'une contient les termes où $(m+\sigma)a \leqq u$, l'autre les termes restants pour lesquels on a donc $(m+\sigma)a > u$:

$$S_1 = \sum_{(m+\sigma)a \leqq u} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{(m+\sigma)}, \qquad S_2 = \sum_{(m+\sigma)a > u} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{(m+\sigma)}.$$

La dernière série pouvant s'écrire

$$S_2 = \sum \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{a(m+\sigma)}\, a, \qquad a(m+\sigma) > u,$$

il est clair qu'elle a pour limite l'intégrale

$$\lim_{a=0} S_2 = \int_u^\infty e^{-x^2}\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_{u^2}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Il nous reste donc encore la somme S_1. L'inégalité

$$0 < 1 - e^{-a^2(m+\sigma)^2} < a^2(m+\sigma)^2$$

donne

$$0 < \sum_{m=0}^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} \frac{1-e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma} < a^2 \sum_0^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} (m+\sigma) < \frac{1}{2}(u+a)^2,$$

d'où il suit, en désignant par δ une quantité positive plus petite que $\frac{1}{2}$,

$$\sum_0^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma} = \sum_0^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} \frac{1}{m+\sigma} - \delta(u+a)^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$\log a + \sum_0^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} \frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma}$$
$$= \left(\sum_0^{\left[\frac{u}{a}-\sigma\right]} \frac{1}{m+\sigma} - \log\frac{u}{a}\right) + \log u - \delta(u+a)^2$$

Choisissons pour u une constante suffisamment petite, et faisons tendre a vers o; on aura, par conséquent

$$\lim_{a=0}(\log a + S_1) = -\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + \log u - \delta' u^2, \qquad 0 \leqq \delta' \leqq \tfrac{1}{2};$$

ou, en ajoutant la limite de S_2 trouvée plus haut :

$$\lim_{a=0}(\log a + S) = -\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + \log u + \frac{1}{2}\int_{u^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} - \delta' u^2.$$

Si l'on emploie l'intégration par parties,

$$\int_{u^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = -2e^{-u^2}\log u + \int_{u^2}^{\infty} e^{-x}\log x\,dx,$$

le second membre prend la forme

$$-\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + [(1 - e^{-u^2})\log u - \delta' u^2] + \frac{1}{2}\int_{u^2}^{\infty} e^{-x}\log x\,dx.$$

La quantité entre parenthèses peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant convenablement la quantité auxiliaire u, et il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{a=0}(\log a + S) = -\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\log x\,dx,$$

ou bien

$$\lim_{a=0}\left(\log a + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-a^2(n+\sigma)^2}}{n+\sigma}\right) = \frac{1}{2}\Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Il s'ensuit que la constante cherchée A aura pour valeur l'expression

$$A = \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)} - \frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)},$$

et, en désignant par C la constante d'Euler $-\Gamma'(1)$, nous aurons la formule cherchée :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-a^2(m+\sigma)^2}}{m+\sigma}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-a^2(m-\sigma)^2}}{m-\sigma}\\ &\quad=-C-\frac{\Gamma'(\sigma)}{\Gamma(\sigma)}-\frac{\Gamma'(1-\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)}-\log a^2+\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{a^{2\nu}}{\nu}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2n\sigma\pi}{(n\pi)^{2\nu}}\\ &\quad-\int_0 \overline{R}_m(a)\,2a\,da.\end{aligned}\right.$$

Le reste qui figure ici sous la forme

$$-\int_0 \overline{R}_m(a)\,2a\,da$$

sera, en valeur absolue, plus petit que l'intégrale de l'expression (20^a), multipliée par $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot 2a\,da$, à savoir

$$(21^a)\qquad \left|\int_0 \overline{R}_m(a)\,2a\,da\right|<\frac{2\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m)}{m\pi^{2m+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}}\,a^{2m}.$$

Cela étant, représentons par D un discriminant fondamental positif, et posons, dans le développement (21), $\sigma=\frac{h}{D}$; multiplions les deux membres par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour

$$h=1,2,3,\quad .\,D-1.$$

Il vient :

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} &2D\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}e^{-\frac{a^2n^2}{D^2}}\\ &\quad=-2\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{h}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{h}{D}\right)}+\sqrt{D}\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{a^{2\nu}}{\nu}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{2\nu}\pi^{2\nu}}\\ &\quad-\int_0 2a\,da\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)\overline{R}_m\left(a,\frac{h}{D}\right);\end{aligned}\right.$$

en désignant le terme complémentaire par $2R_m^*$, il est clair que R_m^* sera la partie réelle de l'expression

$$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0 ada\sum_h\left(\frac{D}{h}\right)R_m\left(a,\frac{h}{D}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0 2ada\,F(a),$$

où $R_m(a,\sigma)$ est donné par la formule (20^b), qui donne, pour $F(a)$, l'expression

$$F(a)=-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{D}{h}\right)R_m\left(a,\frac{h}{D}\right)=a^{2m-2}\cdot\sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2m-2}}\int_L\frac{e^{-z^2}z^{2m}dz}{n^2\pi^2-a^2z^2}.$$

Celle-ci étant en valeur absolue moindre que la somme

$$a^{2m-2}\cdot\sqrt{D}\sum_1^\infty\frac{1}{(n\pi)^{2m}\cdot\sin 2\varphi}\int_0^\infty e^{-x^2\cos 2\varphi}x^{2m}dx,$$

on aura :

$$|R_m^*|<\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{a^{2m}}{m}\sqrt{D}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(n\pi)^{2m}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\sin 2\varphi\cos^{m+\frac{1}{2}}\varphi},$$

ou bien, en choisissant φ comme plus haut :

$$|R_m^*|<\sqrt{D}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m)}{m\pi^{2m+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}}a^{2m}.$$

En faisant usage des formules (7^a) et (8) du chapitre premier,

$$P(D)=-\frac{1}{D}\sum_{\nu=1}^{D-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{\Gamma'\left(\frac{\nu}{D}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{D}\right)};\qquad P(D)\sqrt{D}=Cl(D)\log E(D),$$

la formule (δ) prend la forme suivante :

$$(22)\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{\sqrt{D}}{n}e^{-\frac{n^2a^2}{D^2}}\\&=\mathrm{Cl}(D)\log E(D)+\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\nu}a^{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2\nu}}+R,\end{aligned}\right.$$

où l'on a :

$$|R|<\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\zeta(2m)}{m\pi^{2m+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\left(m+\frac{3}{2}\right)^{m+\frac{3}{2}}}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}}}\,a^{2m}.$$

On pourrait aisément exprimer les quantités

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{(n\pi)^{2\nu}}$$

sous forme finie, au moyen des nombres de Bernoulli, ce que je crois inutile d'effectuer, la chose étant bien connue.

IMPRIMERIE NATIONALE.

TABLE DES MATIÈRES.