Matyáš Lerch

Bemerkung über Funktionen des elliptischen Zylinders

Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 15 (1906), 403–404

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501573

ständige Teile sie sind, einen Sinn hat. Dann kommt das Euklidische Parallelenaxiom überhaupt nicht vor, und von ihm ist also auch nichts bewiesen worden. Im andern Falle kommen eigentliche Axiome vor; aber die Unabhängigkeitsbeweise passen dann nicht, weil es nicht möglich ist, andere Begriffswörter für „Punkt", „Gerade" usw. einzusetzen, und auf dieser Möglichkeit beruht denn doch ein solcher Beweis.

Diese Kehrseite der Sache scheint auch Herr Korselt zu übersehen, wenn er die Verschiedenheit der Axiome in der modernen Mathematik von denen der Euklidischen betont. Diese Verschiedenheit darf im Endergebnisse nicht verleugnet werden, nachdem man anfangs ihre Vorteile ausgenutzt hat.

Das die Hilbertsche Darstellung beherrschende Zwielicht muß erst einer einheitlichen Beleuchtung gewichen sein, ehe Klarheit in die Sache kommen kann. Dann wird ja auch wohl die Vermischung von Axiom und Definition ein Ende nehmen.

(Schluß folgt.)

Bemerkung über Funktionen des elliptischen Zylinders.

Von M. LERCH in Freiburg (Schweiz).

Die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (2m\cos 2x + n)\psi = 0$$

wurde von Heine auf Berechnung der Näherungselemente gewisser Kettenbrüche zurückgeführt, und es ist seinen Überlegungen auch ein Verfahren zur Bestimmung des Parameters n, der die Existenz einer periodischen Lösung $\psi_1(x)$ sichert, zu entnehmen. Ich habe diese Methode namentlich für den Fall, daß n gewisse Grenzen überschreitet, ausgebildet; durch Anwendung dieses Verfahrens, verbunden mit anderen Überlegungen, gelangte ich zur Aufstellung einer Anzahl von Koeffizienten der trigonometrischen Entwicklung von $\psi_1(x)$ für den Fall $m = -1$ und n nahe bei 100; der genaue Wert ist $n = 100{,}005050676018$ und die Entwicklung hat die Gestalt

$$\begin{aligned}\psi_1(x) = \cos 10x - c_1\cos 12x + c_2\cos 14x - c_3\cos 16x + \cdots\\ - c_{-1}\cos 8x + c_{-2}\cos 6x - c_{-3}\cos 4x + c_{-4}\cos 2x\\ - \tfrac{1}{2}c_{-5},\end{aligned}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0{,}022\,735\,26 \\
c_2 &= 0{,}000\,236\,853\,9 \\
c_3 &= 0{,}000\,001\,518\,388 \\
c_4 &= \frac{6{,}9367}{10^9}, \quad c_5 = \frac{2{,}3123}{10^{11}}, \ldots \\
c_{-1} &= -0{,}027\,785\,94 \\
c_{-2} &= 0{,}000\,434\,20 \\
c_{-3} &= -0{,}000\,005\,169\,4 \\
c_{-4} &= 0{,}000\,000\,053\,85 \\
c_{-5} &= -0{,}000\,000\,000\,538.
\end{aligned}
$$

Solange es sich um die Berechnung von $\psi_1(x)$ für reelle x und für kleine komplexe Werte von x handelt, ist diese trigonometrische Entwicklung sehr bequem; anders wird es, wenn es sich darum handelt, $\psi_1(x)$ für größere komplexe Werte zu bestimmen, oder sogar die *rein imaginären* Wurzeln von $\psi_1(x) = 0$ zu berechnen, eine Aufgabe, die z. B. für die Untersuchung einer elliptischen Membran unumgänglich ist.

Dieser Umstand kann nicht überraschen, denn fast jede analytische Entwicklung, selbst wenn sie in der ganzen Ebene konvergiert, kann nur in einem verhältnismäßig beschränkten Gebiet wirklich verwendet werden; z. B. wird es kaum jemand einfallen, die Exponentialfunktion e^x durch die Maclaurinsche Entwicklung zu berechnen, sobald x ungefähr gleich 10 ist.

Hier könnte also eine halbkonvergente Entwicklung von $\psi_1(x)$ von großem Nutzen sein; ob solche durch die divergenten Reihen, welche vor mehreren Jahren von Herrn Häntzschel aufgestellt und unlängst im Jahresbericht wieder in Erinnerung gebracht wurden, tatsächlich geleistet ist, mag vorläufig dahingestellt bleiben. Das Beweisverfahren des Herrn Häntzschel läßt mich darüber vollkommen im Dunkeln, und die kritischen Bemerkungen, welche Herr Häntzschel aus seinen Formeln gegen die richtigen und genau bewiesenen Sätze des Herrn Bruns geschöpft hat, verstärken nur mein Mißtrauen in dieser Hinsicht.

Durch die Mängel des Beweises braucht jedoch ein mathematisches Resultat nicht unbedingt als unrichtig erklärt zu werden; ich bin weit davon, mich gegen die Formeln des Herrn Häntzschel als solche auszusprechen, bevor dieselben genau geprüft werden. Vielmehr geht meine Absicht dahin, diese genaue Prüfung anzuregen; da solche in analytischer Allgemeinheit Schwierigkeiten bereiten dürfte, würde ich schon mit Freude begrüßen, wenn jemand das obige Zahlenbeispiel mit Hilfe der Häntzschelschen Formeln in Angriff nehmen möchte, namentlich um die kleinste positive Wurzel von $\psi_1(i\beta) = 0$ zu ermitteln.