Matyáš Lerch

Bemerkungen über eine Formel aus der Théorie der unvollständigen Gammafunktion und Integrallogarithmus

Arch. der Math. u. Phys. (3), 11 (1906), 42–51

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501572

Bemerkungen über eine Formel aus der Theorie der unvollständigen Gammafunktion und des Integrallogarithmus.

Von M. LERCH in Freiburg (Schweiz).

Vor einigen Jahren versuchte ich die Theorie der Transzendente $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(m+a)u}}{(m+a)^s}$, welche im wesentlichen schon von Malmsten[1]) herrührt, und von Lipschitz[2]) ausführlich untersucht wurde, für die Theorie der unvollständigen Gammafunktion

$$Q(s, \omega) = \int_{\omega}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

in anderer Weise nutzbar zu machen, als dies bereits durch Hermite[3]) geschehen war. Mein Resultat bestand in der halbkonvergenten Entwicklung

$$(1)\quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-w}}{(mu+w)^s} = \frac{1}{u} Q(1-s, w) + \frac{e^{-w}}{2w^s} + \frac{e^{-w}}{w^s} \sum_{\mu}^{} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu u^{2\mu-1}}{(2\mu)!} G(w,s)_\mu,$$
$$(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wobei w, u, s positive reelle Größen bedeuten, ferner

$$G(w, s)_\mu = 1 + \binom{2\mu-1}{1} \frac{s}{w} + \binom{2\mu-1}{2} \frac{s(s+1)}{w^2} + \binom{2\mu-1}{3} \frac{s(s+1)(s+2)}{w^3} + \cdots,$$

und $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, … die positiven Bernoullischen Zahlen sind, und zwar ist der durch die Benutzung der halbkonvergenten Reihe bedingte Fehler vom gleichen Zeichen und vom absolut kleineren Wert wie das erste vernachlässigte Glied der Entwicklung.

Dieses Resultat würde ein ausgezeichnetes Hilfsmittel für die Berechnung von $Q(1-s, w)$ ausmachen, wenn man über eine bequeme

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 38.

2) ibid. Bd. 54 und 105. Daß in seiner ersten Arbeit Lipschitz den funktionentheoretischen Charakter der Reihe noch nicht ganz beherrschte, folgt daraus, daß er von einer Funktion von vier Elementen spricht, indem er das eine Argument komplex annimmt und in seine beiden Bestandteile spaltet. Die erste funktionentheoretische Behandlung des Gegenstandes — nachdem die mustergültigen Arbeiten von Riemann und Hurwitz betreffend zwei Spezialfälle vorlagen — geschah wohl durch die Arbeit des Verfassers (Acta math. Bd. 11).

3) daselbst, Bd. 90.

Berechnungsweise der **Malmstenschen** Reihe links in (1) und zwar für verhältnismäßig kleine u verfügte.

Entwicklungen zur Berechnung der Reihe des **Malmstén-Lipschitzschen** Typus sind zwar vorhanden[1]), und zwar ist z. B. für $0 < v < 1$

$$(2)\quad \sum_{m=0}^{\infty}(m+v)^{s-1}e^{-u(m+v)} = \frac{\Gamma(s)}{u^s} + a_0 - a_1 u + a_2 u^2 - a_3 u^3 + \cdots,$$

wobei der Konvergenzradius gleich 2π ist und die Koeffizienten durch die Funktionen der komplexen Veränderlichen s definiert sind, die als Summen oder analytische Fortsetzungen der Reihen

$$a_p = \frac{2\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(2nv - \frac{s+p}{2}\right)\pi}{n^{s+p}}$$

vollständig definiert sind.

Um die Formel (2) zur Berechnung der linken Seite von (1) zu verwenden, müßte man $w = u\omega$ setzen, dann ω auf die Form $a + v$ bringen, wobei $0 < v < 1$ und a eine positive ganze Zahl bedeutet; alsdann unterscheidet sich die Reihe $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+v)^{-s}e^{-u(m+v)}$ von der folgenden $\sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+\omega)^{-s}e^{-u(m+\omega)}$ nur um ihre ersten a Glieder, die also zu berechnen blieben, um den Wert der linken Seite von (1) zu erhalten. Man könnte sich sogar mit dem Grenzfall $v = 1$ von (2) begnügen, in welchem

$$a_p = \frac{2\Gamma(s+p)}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\zeta(s+p)\cos\frac{s+p}{2}\pi$$

ist; dieser Fall hätte den Vorteil, daß die Koeffizienten in der Entwicklung

$$(2^0)\quad \sum_{m=1}^{\infty}m^{s-1}e^{-mu} = \frac{\Gamma(s)}{u^s} + \sum_{0}^{\infty}(-1)^p\frac{2\Gamma(s+p)\cos\frac{s+p}{2}\pi}{p!\,(2\pi)^{s+p}}\zeta(s+p)\,u^p$$

bloß von s abhängen und die Berechnung auf eine Tabelle der Funktion $\zeta(s)$ zurückführbar wäre. Alsdann müßte man für ω eine ganze Zahl $a = \frac{w}{u}$ setzen, um die Berechnung von (1) vermöge der Entwicklung (2^0) zu bewerkstelligen.

---

1) Abgeleitet in meinem Aufsatz Nr. 28 des III. Jahrgangs der Rozpravy (II. Klasse) der Prager Akademie, p. 2 und 3 des Sonderabdrucks (1894).

Die Behandlung der Entwicklung (1) vereinfacht sich wesentlich, wenn man darin $s = 1$ nimmt; alsdann geht $Q(1 - s, w)$ in das Integral

$$Q(0, w) = \int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = -li(e^{-w})$$

über, und die Formel (1) kann wie folgt geschrieben werden:

$$(3) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-(m+\omega)u}}{m+\omega} = Q(0, \omega u) + \frac{e^{-\omega u}}{2\omega} + e^{-\omega u} \sum_{\mu} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{2\mu\,\omega^{2\mu}} \sum_{\alpha=0}^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!},$$
$$(w = \omega u;\ \mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

Setzt man hier für ω eine positive ganze Zahl a ein, so berechnet sich die linke Seite vermöge der logarithmischen Reihe durch den Ausdruck

$$-\log(1 - e^{-u}) - \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{e^{-\nu u}}{\nu}.$$

Die sich so darbietende halbkonvergente Bestimmung des Integrallogarithmus

$$(4) \int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \log \frac{1}{1 - e^{-u}} - \sum_{\nu=1}^{a-1} \frac{e^{-\nu u}}{\nu} - \frac{e^{-w}}{2a} + e^{-w} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}} \sum_{\alpha=0}^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$$
$$\left(u = \frac{w}{a};\ \mu = 1, 2, 3, \ldots\right)$$

habe ich 1901 im VIII. Bandes des Intermédiaire des mathématiciens (Question 2155) ohne Beweis mitgeteilt, während die Begründung der allgemeineren Formel (1) den Schluß einer demnächst im 130. Bande des Crelleschen Journals erscheinenden Abhandlung bildet. Der Umstand, daß die Divergenz der Entwicklung (4) eigentlich auf Konstanten beruht, hat mir nicht entgehen können, denn für größere μ ist $\sum_0^{2\mu-1} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$ beinahe gleich e^w, so zwar daß der Unterschied $\sum_{\alpha=2\mu}^{\infty} \frac{w^\alpha}{\alpha!}$ nach Multiplikation mit $\frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}}$ das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe bildet, sobald $\frac{w}{a} = u$ kleiner als 2π bleibt. Allein da mir der Gebrauch der Formel lediglich für $a > 4$ vorschwebte, so hatte die Trennung des konstanten halbkonvergenten Teiles von dem konvergenten veränderlichen Teile für mich kein unmittelbares Interesse. Als ich nun durch die Güte des Herrn Krause in Kenntnis der Resultate seiner Abhandlung (s. oben S. 36) gesetzt wurde, unternahm ich es, meine ursprüngliche Untersuchung für den Spezialfall des Integrallogarithmus hier auseinanderzusetzen und sie durch die eben angedeutete Trennung zu ergänzen, wobei namentlich der Umstand hervorgehoben werden mag, daß sie auch bei allgemeinen nicht ganzen a gelingt und die Ausdehnung des Resultats auf den viel wichtigeren Fall der Funktion $li(e^{+w})$ ermöglicht.

Es seien a, u zwei beliebige reelle positive Größen, und es werde mit $F(a, u)$ die durch die offenbar konvergierende unendliche Reihe

$$F(a, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(a+n)u}}{a+n} \tag{5}$$

definierte Funktion der beiden Veränderlichen a und u bezeichnet.

Diese Reihe verwandle man in ein bestimmtes Integral vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{a+n} = \int_0^\infty e^{-(a+n)z}\, dz;$$

es kommt

$$F(a, u) = \int_0^\infty \frac{e^{-a(u+z)}\, dz}{1 - e^{-(u+z)}}. \tag{6}$$

Hier machen wir von der Formel

$$\frac{1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} x^{2\mu-1} + (-1)^n \Theta_n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+1}$$

Gebrauch, wobei $0 < \Theta_n < 1$. Es entsteht so aus (6) die Gleichung

$$F(a, u) = \int_0^\infty e^{-a(u+z)} \frac{dz}{u+z} + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty e^{-a(u+z)}\, dz$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{(2\mu)!} \int_0^\infty e^{-a(u+z)} (u+z)^{2\mu-1}\, dz + R_n,$$

wobei

$$(-1)^n R_n = \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} \Theta \int_0^\infty e^{-a(u+z)} (u+z)^{2n+1}\, dz, \qquad (0 < \Theta < 1).$$

Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-a(u+z)} \frac{dz}{u+z} = \int_{au}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x}, \qquad \int_0^\infty e^{-a(u+z)} (u+z)^k\, dz = \frac{1}{a^{k+1}} \int_{au}^\infty e^{-x} x^k\, dx,$$

also bekommen wir die Gleichung

$$(7)\quad F(a,u)=\int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2a}e^{-au}+\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\mu-1}dx+R_n,$$

wobei noch bemerkt werden möge, daß

$$(-1)^n R_n=\frac{B_{n+1}\,\Theta}{(2n+2)!\,a^{2n+2}}\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2n+1}dx.$$

Diese Formel (7) zeigt, wie man die Berechnung der unendlichen Reihe (5) auf die des Integrallogarithmus zurückführen kann, sobald der Rest R_n vernachlässigt werden darf; denn die auf der rechten Seite von (7) auftretenden Integrale drücken sich in geschlossener Gestalt aus, und zwar ist

$$\int_{w}^{\infty} e^{-x}x^m\,dx=m!\,e^{-w}\left[1+\frac{w}{1!}+\frac{w^2}{2!}+\cdots+\frac{w^m}{m!}\right].$$

Ich bemerke nun, daß die Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}dx$$

konvergiert, falls $0<u<2\pi$ ist. Benützt man die Zerlegung

$$\int_{au}^{\infty} e^{-x}x^{2\mu-1}dx=(2\mu-1)!-\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}dx,$$

so ergibt sich aus (7)

$$F(a,u)=\int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}+\frac{1}{2a}e^{-au}-\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}dx$$
$$+\sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu\,a^{2\mu}}+R_n.$$

Die aus den Integralen zusammengesetzte Reihe wird unter der Annahme $0<u<2\pi$ konvergent für $n=\infty$, und derjenige Bestandteil der rechten Seite, der den Charakter der halben Konvergenz verursacht, ist von u unabhängig; es liegt die Vermutung nahe, daß nach Ersetzen des „konvergenten" Teiles durch die unendliche Reihe der Rest R_n sich zu einer von u unabhängigen Größe kompensiert, d. h. die Größe

$$(\text{a})\qquad R_n'=\sum_{\mu=n+1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!\,a^{2\mu}}\int_{0}^{au} e^{-x}x^{2\mu-1}dx+R_n$$

von u nicht abhängt. Um dies zu ergründen, beachten wir, daß nach der Definition (5)

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -\sum_0^\infty e^{-(a+n)u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}}$$

und demnach aus (7) durch Differentiation nach u

$$\frac{\partial R_n}{\partial u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} + \frac{1}{u}e^{-au} + \tfrac{1}{2}e^{-au} + \sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!}u^{2\mu-1}e^{-au}$$

folgt; mit Hilfe dieser Darstellung von $\frac{\partial R_n}{\partial u}$ läßt sich die Größe (a) nach u differenzieren, und wir bekommen so

$$\frac{\partial R_n'}{\partial u} = -\frac{e^{-au}}{1-e^{-u}} + \frac{1}{u}e^{-au} + \tfrac{1}{2}e^{-au} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!}u^{2\mu-1}e^{-au},$$

was wegen der Identität

$$\frac{1}{1-e^{-u}} = \frac{1}{u} + \tfrac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{(2\mu)!}u^{2\mu-1} \qquad (|u| < 2\pi)$$

identisch verschwindet.

Wir haben somit anstelle von (7), wenn $au = w$ geschrieben wird,

$$(7^0)\quad \begin{cases} F(a,u) = \varphi(a) + \int_w^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} + \frac{1}{2a}e^{-w} \\ -\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu e^{-w}}{2\mu a^{2\mu}}\left(e^w - 1 - \frac{w}{1!} - \frac{w^2}{2!} - \cdots - \frac{w^{2\mu-1}}{(2\mu-1)!}\right), \end{cases}$$

wobei für die Funktion $\varphi(a)$ die halbkonvergente Entwicklung

$$\text{(b)}\qquad \varphi(a) = \sum_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu-1}\frac{B_\mu}{2\mu a^{2\mu}} + R_n'$$

vorliegt. Multipliziert man (7⁰) auf beiden Seiten mit e^{au} und differenziert nach a das Resultat, so entsteht

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-nu}}{(a+n)^2} &= e^{au}\varphi'(a) - ue^{au}\varphi(a) + ue^{au}\int_{au}^\infty e^{-x}\frac{dx}{x} - \frac{1}{a} - \frac{1}{2a^2} \\ &-\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m u}{2ma^{2m}}\left(e^{au} - \sum_{\nu=0}^{2m-2}\frac{a^\nu u^\nu}{\nu!}\right) \\ &+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{B_m}{a^{2m+1}}\left(e^{au} - \sum_{\nu=0}^{2m-1}\frac{a^\nu u^\nu}{\nu!}\right); \end{aligned}$$

hier läßt sich nun der Grenzübergang zu $u = 0$ ausführen, und wir erhalten unter der Bezeichnung

$$\psi(a) = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} \quad \text{wegen} \quad \psi'(a) = \sum_0^\infty \frac{1}{(a+n)^2}$$

das Resultat

$$\varphi'(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} - \psi'(a),$$

und hieraus durch Integration

$$\varphi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a) + \text{const}.$$

Für große a ist nach (b) $\varphi(a)$ beliebig klein; und somit ist die Konstante gleich Null, d. h.

$$\varphi(a) = \log a - \frac{1}{2a} - \psi(a).$$

Wir haben somit die merkwürdige Entwicklung der Größe (5):

$$(7^*) \quad \begin{cases} F(a, u) = \log a - \dfrac{1}{2a} - \psi(a) + \displaystyle\int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} + \frac{1}{2a} e^{-w} \\ \qquad - \displaystyle\sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1} \frac{B_m e^{-w}}{2m\, a^{2m}} \left(e^w - \sum_{\nu=0}^{2m-1} \frac{w^\nu}{\nu!} \right), \end{cases}$$

in welcher $w = au$, $a > 0$, $0 < u < 2\pi$ vorausgesetzt wird, und wie üblich $\psi(a) = \dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$.

Nun ist bekanntlich

$$-\int_w^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = C + \log w + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m w^m}{m!\,m},$$

und es folgt aus (7*) die Identität

$$C + \log u + \sum_{m=1}^\infty (-1)^m \frac{w^m}{m!\,m} + \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{-(a+n)u}}{a+n}$$
$$= -\frac{1}{2a} - \psi(a) + \frac{1}{2a} e^{-w} - \sum_{m=1}^\infty (-1)^{m-1} \frac{B_m e^{-w}}{2m\, a^{2m}} \left(e^w - \sum_0^{2m-1} \frac{w^\nu}{\nu!} \right).$$

In derselben sind bei positivem u des Intervalls $(0 \ldots 2\pi)$ beide Seiten eindeutige analytische Funktionen der komplexen Veränderlichen a; wir bekommen daher eine richtige Gleichung, wenn wir darin a in $-a$ verwandeln und nunmehr $a > 0$ voraussetzen. Da ferner

$$\psi(a) - \psi(-a) = -\frac{1}{a} - \pi \cot a\pi,$$

also

$$\frac{1}{2a} - \psi(-a) = -\frac{1}{2a} - \pi \cot a\pi - \psi(a),$$

und

$$li(e^w) = C + \log w + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w^m}{m!\,m},$$

so erhalten wir die Gleichung

$$(8) \quad \begin{cases} li(e^w) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-(n-a)u}}{n-a} = \log a - \dfrac{1}{2a} - \pi \cot a\pi - \psi(a) + \dfrac{1}{2a} e^w \\ \qquad - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \dfrac{B_m e^w}{2m\,a^{2m}} \left(e^{-w} - \sum\limits_{\nu=0}^{2m-1} \dfrac{(-w)^\nu}{\nu!} \right) \end{cases}$$

$$(w = au;\quad 0 < u < 2\pi;\quad a > 0).$$

Dabei ist in üblicher Weise

$$li(e^w) = \mathrm{val.}\, p \cdot \int_{-\infty}^{w} e^x \frac{dx}{x}$$

gesetzt worden. Die Gleichung (8) setzt in merkwürdiger Weise die Funktionen $li(e^w)$, $F(-a, u)$ und $\psi(a)$ in Zusammenhang, und sie liefert, wenn man darin $a = s + \xi$ nimmt, wobei s eine positive ganze Zahl ist und ξ unendlich klein vorausgesetzt wird, eine merkwürdige Formel zur Berechnung von $li(e^w)$.[1] Wir haben zunächst

$$\pi \cot a\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(n-a)u}}{n-a} = \pi \cot \xi\pi - \frac{e^{u\xi}}{\xi} - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{e^{(s-n)u}}{s-n} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{m} + (\xi),$$

wobei (ξ) eine unendlich kleine Größe bedeutet. Die rechte Seite wird nach dem Grenzübergang

$$-u - \sum_{m=1}^{s-1} \frac{e^{mu}}{m} - \log(1 - e^{-u}),$$

und wir erhalten daher aus (8)

$$(9) \quad \begin{cases} li(e^w) = u + \sum\limits_{m=1}^{s-1} \dfrac{e^{mu}}{m} + \log(1 - e^{-u}) - \psi(s) - \dfrac{1}{2s} + \log s \\ \qquad + \dfrac{e^w}{2s} - \sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \dfrac{B_m e^w}{2m\, s^{2m}} \left(e^{-w} - \sum\limits_{\nu=0}^{2m-1} \dfrac{(-w)^\nu}{\nu!} \right), \end{cases}$$

$$\left(u = \frac{w}{s} < 2\pi,\ s \text{ positive ganze Zahl}\right).$$

---

1) Rozpravy (Prag), V. B., Nr. 14 (II. Klasse).

Bei Anwendung dieser Formel muß die Zahl s wesentlich größer als w genommen werden, da sonst viele Glieder in der Reihe wegen des Faktors e^w zu groß wären. Ist z. B. w in der Nähe von 5, so daß e^w ungefähr 150 beträgt, so wird die Wahl $s = 10$ ziemlich zweckmäßig, und man wird sich mit 3 Gliedern der Reihe begnügen können, um 8 Stellen genau zu erhalten.

Eine ähnliche Formel zur Berechnung von $li(e^{-w})$ liefert Gleichung (7*), wenn man für a eine ganze Zahl setzt; denn es ist alsdann

$$F(a, u) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mu}}{m} - \sum_{m=1}^{a-1} \frac{e^{-mu}}{m} = -\log(1 - e^{-u}) - \sum_{m=1}^{a-1} \frac{e^{-mu}}{m}.$$

Auf diese Weise entsteht die Entwicklung des Herrn Krause, während aus (7) das von mir im Jahre 1901 im Intermédiaire des mathématiciens mitgeteilte Resultat (4) hervorgeht; es war dort die unendliche Reihe mit der halbkonvergenten Reihe für $\psi(a)$ zusammengeschmolzen. Immerhin sind die Fälle nicht selten, wo man die halbkonvergente Entwicklung wird vorziehen müssen.

Für die Funktion $F(a, u)$ habe ich im Jahre 1896 eine andere Entwicklung abgeleitet, in welcher zwar $\psi(a)$, nicht aber der Integrallogarithmus vorkommt. Die Formel lautete

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{m+x}}{m+x} = z^{x-1} \sum_{0} \psi(m+1) \binom{x-1}{m} \left(\frac{1}{z} - 1\right)^m - \log(1-z) - \psi(x).$$

Setzt man hier $z = e^{-u}$ und integriert nach x von a bis $a+1$, so kommt

$$\int_{a}^{\infty} e^{-ux} \frac{dx}{x} = e^u \sum_{0}^{\infty} \psi(m+1)(e^u - 1)^m \int_{a}^{a+1} \binom{x-1}{m} e^{-ux} dx - \log(1 - e^{-u}) - \log a.$$

Weil bei unbestimmtem z

$$\sum_{0}^{\infty} z^m \int_{a}^{a+1} \binom{x-1}{m} e^{-ux} dx = \int_{a}^{a+1} (1+z)^{x-1} e^{-ux} dx$$

den Wert

$$e^{-au}(1+z)^{a-1} \frac{1 - e^{-u}(1+z)}{u - \log(1+z)}$$

hat, so wird die Entwicklung

(10) $$(1+z)^{a-1} \frac{e^u - (1+z)}{u - \log(1+z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu$$

uns die Größen C_ν liefern, für welche die Gleichung besteht

$$(10^1)\quad \int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = -\log a - \log(1-e^{-u}) + e^{-au}\sum_{m=0}^{\infty}\psi(m+1)C_m(e^u-1)^m.$$

Die Funktion (10) bleibt synektisch im ganzen Einheitskreise ($|z|<1$), und die Reihe nimmt für $z = e^u - 1$ den Wert e^{au} an; d. h.

$$e^{-au}\sum_{m=0}^{\infty} C_m(e^u-1)^m = 1\,.$$

Davon kann man Gebrauch machen, um aus den Koeffizienten

$$\psi(m+1) = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} + \psi(1)$$

den Teil $\psi(1)$ zu entfernen, so daß man schließlich hat, weil $\psi(1)$ die mit Minuszeichen genommene Eulersche Konstante C ist:

$$(10^2)\quad \int_{au}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = -C - \log a - \log(1-e^{-u})$$
$$+ e^{-au}[C_1(e^u-1) + (1+\tfrac{1}{2})C_2(e^u-1)^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})C_3(e^u-1)^3 + \cdots].$$

Man kann auch schreiben

$$C_m = \int_0^1 \binom{a+x-1}{m} e^{(1-x)u}\,dx = \int_0^1 \binom{a-\xi}{m} e^{u\xi}\,d\xi,$$

und dies ist nach dem Mittelwertsatze

$$(10^3)\quad C_m = \frac{e^u-1}{u}\binom{a-\xi}{m}. \qquad (0<\xi<1)$$

Bezeichnet man mit $\overline{C}_m$ die Größen C_m, in welchen u durch $-u$ ersetzt ist, so erschließt man aus (10^2) leicht

$$(10^4)\quad \begin{cases} li(e^{au}) = C + \log au + \log\dfrac{e^u-1}{u} + \\ e^{au}[\overline{C}_1(1-e^{-u}) - (1+\tfrac{1}{2})\overline{C}_2(1-e^{-u})^2 + (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})\overline{C}_3(1-e^{-u})^3 - \cdots], \\ \sum_0^{\infty}\overline{C}_m z^m = \dfrac{1+z-e^{-u}}{u+\log(1+z)}(1+z)^{a-1}. \end{cases}$$

Diese Entwicklungen (10) konvergieren nur für recht kleine u, also für kleine Werte $w = au$, für welche die ursprünglichen nach Potenzen von w fortschreitenden Reihen gut brauchbar sind. Sie bieten demnach kaum einige Vorteile, weshalb wir bei ihnen nicht verweilen.

Freiburg (Schweiz), den 28. April 1905.