Lerch, Matyáš: Scholarly works

Matyáš Lerch

Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen Eulerschen Integral zweiter Art

J. Reine Angew. Math. 128 (1905), 211–221

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501570

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Über einige Entwicklungen auf dem Gebiete der unvollständigen *Euler*schen Integrale zweiter Art.

Von Herrn *M. Lerch* in Freiburg (Schweiz).

1. Es werde durch die Potenzentwicklung

$$(1.)\qquad \frac{1}{1-v\log(1+z)}=C_0(v)+C_1(v)z+C_2(v)z^2+C_3(v)z^3+\cdots$$

eine unendliche Reihe von ganzen rationalen Funktionen $C_n(v)$ definiert. Wir wollen zunächst zeigen, daß $C_n(v)$ bei wachsendem n endlich bleibt, wenn v positiv und kleiner als $\frac{1}{\log 2}$ ist. Dies ergibt sich mit Hilfe der Darstellung

$$(2.)\qquad C_n=\frac{1}{2\pi r^n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ni\varphi}\,d\varphi}{1-v\log(1+re^{i\varphi})},$$

in welcher r eine positive, reelle, hinreichend kleine Größe bedeutet. Die Funktion der komplexen Variablen $z=re^{i\varphi}$

$$(3.)\qquad \frac{1}{1-v\log(1+z)}$$

kann innerhalb des Einheitskreises $r\leqq 1$ keine anderen singulären Stellen besitzen, als die außerwesentlichen, welche durch Nullsetzen des Nenners definiert sind. Für solche ist

$$\log(1+z)=\frac{1}{v},\quad z=e^{\frac{1}{v}}-1,$$

und sie sind nicht vorhanden, wenn der absolute Betrag der letzten Größe die Einheit übertrifft. Alsdann bleibt die Größe (3.) auch für $r=1$ endlich, für jeden Wert von φ. Letzterer Umstand tritt eben bei der Bedingung $v<\frac{1}{\log 2}$ ein; nimmt man dieselbe als erfüllt an, so ist in (2.) der Grenzübergang zu $r=1$ gestattet, und man erhält

$$(2^1.)\qquad C_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ni\varphi}\,d\varphi}{1-v\log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}iv\varphi}.$$

Nach bekannten Sätzen über Koeffizienten der *Fourier*schen Reihe folgt hieraus

$$(2^2.)\qquad \lim_{n=\infty} C_n=0,$$

womit das behauptete Verhalten der C_n bewiesen ist. Für die Anwendungen ist es jedoch nützlich zu bemerken, daß für jeden Wert von n

$$(2^3.)\qquad |C_n|<\frac{1}{1-v\log 2}$$

ist; dies folgt aus dem Umstande, daß die Funktion

$$\left[1-v\log\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\right]^2+\frac{1}{4}v^2\varphi^2$$

in den Grenzen $-\pi$ und π nur ein Minimum besitzt, und zwar für $\varphi=0$. Es sei nun x eine positive Veränderliche, und man setze in (1.)

$$z=e^{-x}-1;$$

dadurch ergibt sich die Identität

$$\frac{1}{1+vx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu(e^{-x}-1)^\nu.$$

Ich bezeichne mit u und a komplexe Größen mit positiven reellen Teilen, multipliziere die beiden Seiten der vorstehenden Gleichung mit

$$e^{-ux}x^{a-1}\,dx,$$

und integriere zwischen den Grenzen Null und Unendlich. Indem ich beachte, daß sich unter Anwendung der üblichen Schreibweise

$$\Delta f(u)=f(u+1)-f(u),\quad \Delta^{n+1}f(u)=\Delta^n f(u+1)-\Delta^n f(u),$$

aus der Gleichung

$$\int_0^{\infty}e^{-ux}x^{a-1}\,dx=\frac{\Gamma(a)}{u^a}$$

die Formel

$$(4.)\qquad \int_0^\infty e^{-ux}(e^{-x}-1)^\nu x^{a-1}\,dx = \Gamma(a)\Delta^\nu u^{-a}$$

ergibt, erhalte ich zunächst

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-ux}\frac{x^{a-1}dx}{1+vx} = \sum_{\nu=0}^\infty C_\nu(v)\Delta^\nu u^{-a}.$$

Das Integral links geht nach Substitution $z = vx$ in das folgende

$$\frac{1}{v^a}\int_0^\infty e^{-\omega z}\frac{z^{a-1}dz}{1+z},\quad \left(\omega = \frac{u}{v}\right),$$

über, welches sich in bekannter Weise durch die Funktion

$$(5.)\qquad Q(s,\omega) = \int_\omega^\infty e^{-x}x^{s-1}dx,$$

die von *Euler*, *Legendre*, *Prym*, *Hermite* u. a. untersucht wurde, darstellen läßt. Um dies in einfachster Weise zu zeigen, betrachten wir die Funktion von ω

$$J = \int_0^\infty e^{-\omega(z+1)}\frac{z^{a-1}dz}{1+z};$$

man hat offenbar

$$\frac{dJ}{d\omega} = -\int_0^\infty e^{-\omega(z+1)}z^{a-1}dz = -e^{-\omega}\omega^{-a}\cdot\Gamma(a) = \Gamma(a)\frac{dQ(1-a,\omega)}{d\omega},$$

und hieraus

$$J = \Gamma(a)Q(1-a,\omega),$$

weil beide Größen für $\omega = \infty$ verschwinden. Die eben bewiesene Gleichung

$$(6.)\qquad \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\omega z}\frac{z^{a-1}dz}{1+z} = e^\omega Q(1-a,\omega)$$

gestattet, unser obiges Resultat in die Form

$$(7.)\qquad e^{\frac{u}{v}}Q\left(1-a,\frac{u}{v}\right) = v^a\sum_{\nu=0}^\infty C_\nu(v)\Delta^\nu u^{-a}$$

zu setzen. In dieser Relation wird unter v eine positive reelle Größe, die unter $\frac{1}{\log 2}$ bleibt, verstanden, ferner werden die reellen Teile der komplexen Veränderlichen a und u positiv angenommen.

Für die Anwendungen kämen wohl die Fälle, wo die Veränderlichen reell sind, zunächst in Betracht. Wir wollen uns daher bei der Fehlerabschätzung auf positive reelle a und u beschränken, und nehmen sogar $u > 1$ an.

Es handelt sich um die Abschätzung des Restes

$$R_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} C_\nu \Delta^\nu u^{-a}; \tag{8.}$$

zu dem Behufe benutzen wir die Formel (4.), d. h.

$$\Delta^\nu u^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ux} (e^{-x} - 1)^\nu x^{a-1} dx,$$

aus der sich nebenbei ergibt, daß die Größen

$$(-1)^\nu \Delta^\nu u^{-a}$$

positiv sind. Verstehen wir unter g eine positive Größe, welche durch keine der Größen

$$|C_n|, \ |C_{n+1}|, \ |C_{n+2}|, \ldots$$

übertroffen wird, was z. B. wegen (2^3.) immer für

$$g = \frac{1}{1 - v \log 2}$$

der Fall ist, so ergibt sich aus (8.)

$$|R_n| < g \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^\nu \Delta^\nu u^{-a} = \frac{g}{\Gamma(a)} \sum_{\nu=n}^{\infty} \int_0^\infty e^{-ux} (1 - e^{-x})^\nu x^{a-1} dx,$$

oder, wenn wir die Summation unter dem Integralzeichen ausführen,

$$|R_n| < \frac{g}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-(u-1)x} (1 - e^{-x})^n x^{a-1} dx.$$

Dies läßt sich einfacher wie folgt schreiben

$$|R_n| < g \, |\Delta^n (u-1)^{-a}|, \tag{8^1.}$$

und zeigt, daß man bei Anwendung der Entwicklung (7.), ausgehend von der Reihe

$$\frac{1}{(u-1)^a}, \ \frac{1}{u^a}, \ \frac{1}{(u+1)^a}, \ \frac{1}{(u+2)^a}, \ \frac{1}{(u+3)^a}, \ldots \tag{9.}$$

ihre sukzessiven Differenzenreihen zu bilden hat. Die zweiten Glieder der so gewonnenen Reihen werden zur Bildung der rechten Seite von (7.) gebraucht, während das erste Glied der n-ten Differenzenreihe zur Genauigkeitsabschätzung vermöge der Ungleichung (8^1.) zu benutzen ist.

Handelt es sich um die Bestimmung von $Q(1-a, \omega)$, so kann man für u das größte Ganze $[\omega]$ von ω wählen, und nachher $v = \frac{u}{\omega}$ setzen. So wird immer $0 < v \leqq 1$ sein, sobald $\omega > 1$ ist, und man wird sich auf die Berechnung der Differenzenreihen von

$$(9^0.) \qquad 1, \frac{1}{2^a}, \frac{1}{3^a}, \frac{1}{4^a}, \frac{1}{5^a}, \ldots$$

beschränken können, was insofern von Vorteil ist, als hier nur ein Argument vorkommt.

Daß sich bei dieser Einrichtung der Rechnung wieder eine Komplikation bei den Koeffizienten C_ν einstellt, insofern sich die darin vorkommende Größe v mit ω ändert, ist weniger lästig, da diese Funktionen der Rechnung in ziemlich bequemer Weise zugänglich sind.

Es ist nämlich $C_0 = 1$, und die übrigen C_ν sind ganze rationale Funktionen von v, welche sich wegen (1.) mit Hilfe der Rekursionsformel

$$(10.) \qquad C_n = v\left(C_{n-1} - \frac{1}{2} C_{n-2} + \frac{1}{3} C_{n-3} - \frac{1}{4} C_{n-4} + \cdots\right)$$

bestimmen lassen; speziell ist

$$C_1 = v,\ C_2 = v^2 - \frac{1}{2} v,\ C_3 = v^3 - v^2 + \frac{1}{3} v,\ C_4 = v^4 - \frac{3}{2} v^3 + \frac{11}{12} v^2 - \frac{1}{4} v,$$
$$C_5 = v^5 - 2v^4 + \frac{7}{4} v^3 - \frac{5}{6} v^2 + \frac{1}{5} v.$$

Von der beschränkenden Voraussetzung, daß der reelle Teil von a positiv ist, läßt sich die Relation (7.) befreien. Ist nämlich a irgend eine komplexe Größe, so werden für hinreichend große ν die Ausdrücke

$$\Delta^\nu u^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-ux} (e^{-x} - 1)^\nu x^{a-1}\, dx$$

sämtlich existieren, und es läßt sich analog wie oben zeigen, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} C_\nu \Delta^\nu u^{-a}$$

in jedem endlichen Bereiche der a-Ebene gleichmäßig konvergiert. Daraus erschließt man nach wohlbekannten Sätzen der Funktionentheorie die Gültigkeit der Gleichung (7.) in der ganzen a-Ebene. Ist speziell a eine negative ganze Zahl $-m$, so wird sich die rechte Seite von (7.) auf ein Polynom reduzieren, und zwar

$$(7^0.) \qquad e^{\frac{u}{v}} Q\left(m+1, \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^m} \sum_{\nu=0}^{m} C_\nu(v) \Delta^\nu u^m.$$

Ferner ergibt sich aus der letzten Betrachtung, daß man in der Identität

$$v^\xi e^{\frac{u}{v}} Q\left(1+\xi, \frac{u}{v}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(v) \Delta^\nu u^\xi$$

die Differentiation nach ξ gliedweise ausführen darf; tun wir dies für $\xi = 0$, so folgt, da

$$Q(1, \omega) = e^{-\omega}, \quad Q'_{\xi=0}(1+\xi, \omega) = \int_\omega^\infty e^{-x} \log x\, dx = e^{-\omega} \log \omega + \int_\omega^\infty e^{-x} \frac{dx}{x},$$

die Entwicklung

$$\log v + \log \frac{u}{v} + e^{\frac{u}{v}} \int_{\frac{u}{v}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(v) \Delta^\nu \log u;$$

das erste Glied ($\nu = 0$) der rechten Seite lautet $\log u$, und hebt sich gegen den Ausdruck der linken Seite $\log v + \log \frac{u}{v}$ auf; es bleibt so eine Entwicklung des Integrallogarithmus

$$(10.) \qquad e^{\frac{u}{v}} \int_{\frac{u}{v}}^\infty e^{-x} \frac{dx}{x} = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu(v) \Delta^\nu \log u, \qquad \left(0 < v < \frac{1}{\log 2}\right)$$

von deren Gebrauchsweise die obigen Bemerkungen — nur mit der Modifikation, daß die Reihe (9.) durch

$$\log(u-1), \log u, \log(u+1), \log(u+2), \ldots$$

ersetzt wird, — Aufschluß geben.

Ich setze ferner in (7.) $a = 1$ und beachte, daß

$$\Delta^\nu \frac{1}{u} = \frac{(-1)^\nu \nu!}{u(u+1)(u+2)\ldots(u+\nu)};$$

so kommt

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{u}{v}\, e^{\frac{u}{v}} \int\limits_{\frac{u}{v}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \\ \quad = 1 - \frac{1\cdot C_1(v)}{u+1} + \frac{1\cdot 2\cdot C_2(v)}{(u+1)(u+2)} - \frac{1\cdot 2\cdot 3\, C_3(v)}{(u+1)(u+2)(u+3)} + \cdots. \end{cases}$$

Nimmt man hier $v=1$ und setzt $\nu!\, C_\nu(1) = a_\nu$, so ergibt sich die Formel

$$(11^0.)\quad \begin{cases} \omega\, e^{\omega} \int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \\ \quad = 1 - \frac{a_1}{\omega+1} + \frac{a_2}{(\omega+1)(\omega+2)} - \frac{a_3}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} + \cdots. \end{cases}$$

Die Koeffizienten a_ν werden durch die Entwicklung

$$\frac{1}{1-\log(1+z)} = 1 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{1\cdot 2} z^2 + \frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3} z^3 + \cdots$$

bestimmt und haben die Werte

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 4,\ a_5 = 14,\ a_6 = 38,\ a_7 = 216,\ a_8 = 600,\ a_9 = 6240, \ldots .$$

Die Formel (11^0.) wurde von *Schloemilch* aufgestellt, und zwar als spezieller Fall einer Entwicklung von $Q(1-a, \omega)$, auf die wir demnächst zurückkommen werden.

Die Formeln (7.), (10.), (11.) lassen sich in symbolischer Form wie folgt schreiben, wobei wir zu gleicher Zeit die übliche Schreibweise

$$-\int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = li\left(e^{-\omega}\right)$$

benutzen:

$$(7^*.)\quad v^a e^{\frac{u}{v}}\, Q\left(a+1,\ \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 - v\log(1+\Delta)}\, u^a; \qquad (\Delta u = 1)$$

$$(10^*.)\quad -e^{\frac{u}{v}}\, li\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = \frac{v\log(1+\Delta)}{1 - v\log(1+\Delta)}\, \log u; \qquad (\Delta u = 1)$$

$$(11^*.)\quad -e^{\frac{u}{v}}\, li\left(e^{-\frac{u}{v}}\right) = \frac{v}{1 - v\log(1+\Delta)} \cdot \frac{1}{u}. \qquad (\Delta u = 1)$$

2. Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich verallgemeinern, wenn wir die Entwicklungskoeffizienten $\Phi_\nu(c, v)$ durch die Gleichung

$$(12.)\qquad \frac{1}{(1-v\log(1+z))^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)z^\nu,\quad \Phi_0=1,$$

einführen. Nimmt man wieder $0<v<\frac{1}{\log 2}$ an, so werden die Φ_ν wieder in festen Grenzen liegen, wie oben die C_ν, und die Substitution $z=e^{-x}-1$ ergibt

$$\frac{1}{(1+vx)^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)(e^{-x}-1)^\nu.$$

Multipliziert man auf beiden Seiten mit $e^{-ux}x^{a-1}dx$ und integriert zwischen den Grenzen Null und Unendlich, so kommt

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{e^{-ux}x^{a-1}dx}{(1+vx)^c}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)\Delta^\nu u^{-a},\qquad (\Delta u=1)$$

oder wenn wir $\frac{x}{v}$ anstelle von x setzen:

$$(13.)\qquad \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-\omega x}\frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^c}=v^a\sum_{\nu=0}^{\infty}\Phi_\nu(c,v)\Delta^\nu u^{-a}.\qquad \left(\Delta u=1,\ \omega=\frac{u}{v}\right)$$

Wird hier $a=1$ genommen, so geht die linke Seite in

$$\int_0^\infty e^{-\omega x}\frac{dx}{(1+x)^c}=e^\omega\int_1^\infty e^{-\omega x}\frac{dx}{x^c}=\omega^{c-1}e^\omega Q(1-c,\omega)$$

über. Man bekommt also die Beziehung

$$(14.)\qquad \begin{cases}\omega^c e^\omega Q(1-c,\omega)=1-\dfrac{1\cdot\Phi_1(c,v)}{u+1}+\dfrac{1\cdot 2\cdot\Phi_2 c(,v)}{(u+1)(u+2)}\\[2ex] \qquad\qquad -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\Phi_3(c,v)}{(u+1)(u+2)(u+3)}+\cdots,\qquad \left(\omega=\frac{u}{v}\right)\end{cases}$$

welche ebenso wie (13.) für komplexe Größen u mit positivem reellen Teile und für $0<v<\frac{1}{\log 2}$ stattfindet. Die bei der Beweisführung benutzte Beschränkung, daß der reelle Teil von a in (13.) positiv sei, läßt sich ähnlich wie oben beseitigen.

Für den Fall $v=1$ erhält man aus (14.) die Entwicklung von *Schloemilch**)

---

*) Zeitschrift f. Math. u. Physik, 4. Jahrg., S. 390; Vorlesungen über einzelne Teile der höh. Analysis usw., Braunschweig, 1866, S. 266.

$$(14^0.)\quad \begin{cases} \omega^c e^\omega Q(1-c,\omega) = 1 - \dfrac{A_1}{\omega+1} + \dfrac{A_2}{(\omega+1)(\omega+2)} \\ \qquad\qquad - \dfrac{A_3}{(\omega+1)(\omega+2)(\omega+3)} + \cdots, \end{cases}$$

wo wir der Kürze wegen

$$A_\nu = \nu!\, \Phi_\nu(c, 1)$$

gesetzt haben. Dabei möge bemerkt werden, daß der an der zweiterwähnten Stelle mitgeteilte Konvergenzbeweis *Schloemilchs* ein Versehen enthält, das ihn vollständig hinfällig macht.

Die Konvergenz aller dieser Entwicklungen ist übrigens ziemlich langsam, wenn nicht etwa $u \geqq 8$ ist. Handelt es sich aber z. B. in der Gleichung (14.) oder $(14^0.)$ nicht um die Bestimmung der linken Seite, sondern um $Q(1-c, \omega)$ allein, so ist die zu bestimmende Größe das Produkt der sehr kleinen Größe $\omega^{-c} e^{-\omega}$ mit der unendlichen Reihe rechts, für welche man nur eine geringe Anzahl von Stellen braucht, um für das Produkt eine verhältnismäßig große Stellenzahl zu erhalten.

Das an der erwähnten Stelle angeführte Beispiel *Schloemilchs*

$$\int_3^\infty e^{-t^2} dt = 0{,}00001958$$

ist dieser Art, und zwar entspricht es dem Falle $\omega = 9$, $c = \frac{1}{2}$.

Was nun die Darstellung der Ausdrücke $\Phi_n(c, v)$ angeht, so folgt zunächst aus der Identität (12.)

$$(12^0.)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(c, v)\, z^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu \log^\nu(1+z).$$

Vergleicht man dies mit der Entwicklung, welche aus (1.) folgt,

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(v)\, z^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} v^\nu \log^\nu(1+z),$$

so sieht man leicht, daß

$\Phi_n(c, v)$ erhalten wird, wenn in dem nach Potenzen von v geordneten Polynom $C_n(v)$ jedes v^ν durch $\binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu$ ersetzt wird.

Auf diese Art wird erhalten

$$\Phi_1 = cv,\quad \Phi_2 = \frac{c(c+1)}{2} v^2 - \frac{1}{2} cv,\quad \Phi_3 = \frac{c(c+1)(c+2)}{6} v^3 - \frac{c(c+1)}{2} v^2 + \frac{1}{3} cv,$$

$$\Phi_4 = \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)}{24}v^4 - \frac{c(c+1)(c+2)}{4}v^3 + 11\frac{c(c+1)}{24}v^2 - \frac{1}{4}cv,$$

$$\Phi_5 = \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)(c+4)}{120}v^5 - \frac{c(c+1)(c+2)(c+3)}{12}v^4 + 7\frac{c(c+1)(c+2)}{24}v^3$$
$$-5\frac{c(c+1)}{12}v^2 + \frac{1}{5}cv.$$

Wird ferner

$$(12^1.) \qquad \log^\nu(1+z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \gamma_\mu^{(\nu)} z^{\mu+\nu}$$

gesetzt, so ergibt sich aus ($12^0.$)

$$(12^2.) \qquad \Phi_n(c, v) = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_{n-\nu}^{(\nu)} \binom{c+\nu-1}{\nu} v^\nu.$$

Beachtet man schließlich, daß

$$\frac{1}{[1-v\log(1+z)]^c} = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^\infty e^{-x[1-v\log(1+z)]}x^{c-1}dx,$$

sobald nur der reelle Teil von c positiv ist und v oder z hinreichend klein sind, so genügt es zu bemerken, daß der unter dem Integralzeichen stehende Exponentialausdruck gleich

$$e^{-x}(1+z)^{vx} = e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{vx}{\nu}z^\nu$$

ist, um hieraus nach (12.) die Darstellung

$$(12^3.) \qquad \Phi_n(c, v) = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^\infty \binom{vx}{n} e^{-x}x^{c-1}dx$$

zu erhalten.

Wird ferner

$$(12^4.) \qquad n!\binom{z}{n} = z^n - C_1^{(n)}z^{n-1} + C_2^{(n)}z^{n-2} - C_3^{(n)}z^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{(n)}z \cdots$$

gesetzt, so ergibt sich aus ($12^3.$) zunächst

$$n!\,\Phi_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)}v^n - C_1^{(n)}\frac{\Gamma(c+n-1)}{\Gamma(c)}v^{n-1} + C_2^{(n)}\frac{\Gamma(c+n-2)}{\Gamma(c)}v^{n-2}$$

oder

$$(12^5.) \qquad \begin{cases} n!\,\Phi_n(c, v) = c(c+1)\dots(c+n-1)v^n - C_1^{(n)}c(c+1)\dots(c+n-2)v^{n-1} \\ + C_2^{(n)}c(c+1)\dots(c+n-3)v^{n-2} - C_3^{(n)}c(c+1)\dots(c+n-4)v^{n-3} + \cdots \\ \qquad + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{(n)}cv. \end{cases}$$

Schließlich ergibt sich mit Hilfe der Entwicklung

$$\frac{\log(1+z)}{[1-v\log(1+z)]^c}=\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(c,v)\,z^n \tag{15.}$$

folgende Darstellung:

$$\omega^{c-1}e^{\omega}Q(1-c,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}v\,\Psi_n(c,v)\Delta^n\log u, \qquad \left(\Delta u=1;\ \omega=\frac{u}{v}\right) \tag{16.}$$

wo wiederum der reelle Teil von u positiv sein muß.

Die ganzen Funktionen $v\,\Psi_n(c,v)$ entstehen aus den Polynomen $C_n(v)$, wenn man darin die Koeffizienten der einzelnen Potenzen v^ν mit entsprechenden Faktoren $\binom{c+\nu-2}{\nu-1}$ multipliziert.

Die im vorhergehenden überall festgehaltene Voraussetzung

$$0<v<\frac{1}{\log 2}$$

kann durch die allgemeinere

$$|e^{\frac{1}{v}}-1|>1$$

ersetzt werden, welche sich übrigens besonders dann als nützlich erweist, wenn für ω komplexe Werte gesetzt werden sollen.

Zum Schluß bemerke ich, daß Entwicklungen ähnlicher Art, aber für andere Funktionen, wie die hier gegebenen, sich in einem schönen Aufsatz *Hermites**) finden, dessen Ausgangspunkt die aus der Interpolationstheorie bekannte Reihe

$$f(x+\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\xi}{\nu}\Delta^\nu f(x)$$

bildet.

---

*) Annali di Matematica, 3. Reihe, V. Band, 1901 (Extrait de plusieurs lettres à M. *Pincherle*).