Matyáš Lerch

Sur l'approximation des racines d'équations numériques

Enseign. Math. 7 (1905), 300–304

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501569

ce qui donnera $r$ respectivement $r - 1$ systèmes possibles, d'où

$$P_2^2 = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+\pi}{n}\quad\sin\frac{\alpha+(n-1)\pi}{n}\right)^n}{\left(\sin\frac{\alpha}{n}\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\ldots\sin\frac{\alpha+(n-2)\pi}{n}\right)^2}$$

ou bien, en vertu de (18),

$$P_2^2 = \frac{(\sin\alpha)^n}{2^{(n-1)^2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{(n-1)^2}(1-\omega)}$$

de sorte que nous obtenons pour *n pair*

$$\Delta_n = \frac{n^n(1-\omega^2)^{\frac{n}{2}-1}(1+\omega)}{2^{(n-1)^2}}$$

Niels Nielsen (Copenhague).

---

# SUR L'APPROXIMATION DES RACINES D'ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

1. Les approximations successives.

Etant donnée l'équation

$$x = F(x) \tag{1}$$

dont on connaît une solution approchée $x_0$, formons les quantités $x_\nu$ suivant la formule

$$x_{\nu+1} = F(x_\nu) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

$x_n$ sera une valeur approchée de la racine $x$, si la différence $x_{n+1} - x_n$ est négligeable. Car on a

$$x_n - F(x_n) = x_n - x_{n+1}\,.$$

Pour juger l'approximation obtenue par la méthode, changeons $\nu$ en $\nu+1$, dans l'équation (2), et retranchons avec l'équation (2) :

$$x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = F(x_{\nu+1}) - F(x_\nu) .$$

Le théorème de la moyenne ou de Rolle permet de conclure

$$(3) \qquad x_{\nu+2} - x_{\nu+1} = (x_{\nu+1} - x_\nu) F'(\xi_\nu) ,$$

où $\xi_\nu$ fait partie de l'intervalle $(x_\nu \dots x_{\nu+1})$. Il s'ensuit

$$(4) \qquad x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) F'(\xi_0) F'(\xi_1) \dots F'(\xi_{n-1}) .$$

Pour que la méthode soit applicable, il faut que la fonction $F'(\xi)$ soit petite aux environs de la racine cherchée.

Dans l'équation de Kepler

$$x = a + \varepsilon \sin x$$

on a

$$F'(x) = \varepsilon \cos x ;$$

la méthode des approximations successives fournira de bons résultats, si $|\varepsilon| \leqq \frac{1}{10}$, ou si $|\varepsilon|$ étant toujours $\leqq 1$, la racine $x$ est approchée de $\pm\frac{\pi}{2}$, ce qui exige que $a$ soit approché de $\pm\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$.

2. La solution de l'équation

$$f(x) = 0$$

dont on connaît une valeur approchée $x_0$ se ramène au cas précédent en faisant

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} .$$

Faisant $x = x_0 + h$, l'expression de la dérivée se développe en série

$$F'(x_0 + h) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} h - \frac{f'''(x_0)}{2!\, f'(x_0)} h^2 - \dots$$

d'où il suit qu'on ait sensiblement

$$F'(\xi) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} (x_0 - \xi) .$$

Cette quantité sera petite, si la racine dont il s'agit, est simple.

Remarquons que, pour déterminer des racines multiples, on ne fait pas usage de l'algorithme du plus grand commun diviseur, impossible pour des équations transcendantes, et très rarement praticables pour des équations algébriques.

S'il s'agit d'une racine de multiplicité $p$, on résout l'équation

$$f^{(p-1)}(x) = 0$$

dont la racine en question est une solution simple.

3. La méthode de Newton successive.

Elle consiste dans la formation des quantités

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et n'est autre que la méthode du numéro 1, pourvu que l'on fasse

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{f''(x) f(x)}{f'(x)^2}$$

et il s'ensuit d'après (4).

$$x_{n+1} - x_n = (x_1 - x_0) \prod_{\nu=0}^{n-1} \frac{f''(\xi_\nu) f(\xi_\nu)}{f'(\xi_\nu)^2}$$

Cette méthode est plus rapide que celle du numéro précédent, car ici le numérateur contient des facteurs $f(\xi_\nu)$ qui tendent vers zéro, tandis que les quantités $F'(\xi_\nu)$ du numéro 2 sont presque constantes ; mais cette dernière présente cet avantage que le dénominateur $f'(x_0)$ dans les formules

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{f(x_\nu)}{f'(x_0)}$$

est constant.

4. Une méthode pour résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

consiste à effectuer l'inversion d'une série de puissances. Posant en effet

$$f(x_0 + \xi) = f(x_0) + \eta \ , \tag{5}$$

le problème prend la forme

$$a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + \dots = \eta \ , \tag{5 bis}$$

et on a, d'après un algorithme connu,

$$\xi = b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 + \dots \ ; \tag{6}$$

il ne reste qu'à prendre $\eta = -f(x_0)$ pour avoir

$$f(x_0 + \xi) = 0 \ .$$

5. Le développement (6), borné à ses deux premiers termes, devient

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x_0) f(x_0)^2}{f'(x_0)^3} ,$$

$x_1$ étant la nouvelle valeur approchée de la racine $x = x_0 + \xi$. Cette formule nous amène à prendre, pour employer la méthode du numéro 1,

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2} \frac{f''(x) f(x)^2}{f'(x)^3} \cdot x_{\nu+1} = F(x_\nu)$$

On a ici

$$F'(x) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x) f'''(x)}{2f'(x)^4} f(x)^2$$

et il est manifeste que la convergence est beaucoup plus rapide que dans la méthode de Newton ; mais elle est aussi plus pénible, puisque elle emploie des valeurs de la dérivée seconde.

6. On aura une généralisation de la *regula falsi*, si l'on effectue l'inversion de l'équation

$$f(x) = y$$

au moyen de la formule d'interpolation

$$x = x_0 + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)(y - y_1) + B_3(y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \ldots$$

où l'on a posé

$$y_\nu = f(x_\nu)$$

en prenant pour les $x_\nu$ des quantités arbitraires aux environs de la racine cherchée $x'$ ; en faisant $y = 0$, il vient

$$(7) \qquad x' = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 - B_3 y_0 y_1 y_2 + \ldots$$

Quant aux quantités $B_\nu$, on les calcule au moyen des équations

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = x_0 + B_1(y_1 - y_0) \\ x_2 = x_0 + B_1(y_2 - y_0) + B_2(y_2 - y_0)(y_2 - y_1), \\ \ldots \end{cases}$$

Pour avoir une approximation commode, on choisit $x_0$, $x_1$ et calcule $y_0$, $y_1$ ; cela permet d'évaluer $B_1$ ; puis on fait, pour se tenir à la méthode (7),

$$x_2 = x_0 - B_1 y_0$$

et on détermine $y_2 = f(x_2)$ ; la deuxième équation (8) donne alors aisément la valeur de $B_2$. Ensuite, on fait

$$x_3 = x_0 - B_1 y_0 + B_2 y_0 y_1 = x_2 + B_2 y_0 y_1 \;, \quad y_3 = f(x_3) \;,$$

et on tire du système (8) la valeur de $B_3$, et ainsi de suite.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).