Matyáš Lerch

Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion

J. Reine Angew. Math. 130 (1905), 47–65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501566

Einige Reihenentwicklungen der unvollständigen Gammafunktion.

Von Herrn *M. Lerch* in Freiburg (Schweiz).

Das Integral

$$Q(-a,\omega)=\int_\omega^\infty e^{-x}\frac{dx}{x^{a+1}}$$

geht nach der Substitution

$$x=\frac{\omega}{1-z}$$

in das folgende

$$(1.)\qquad Q(-a)=\omega^{-a}\int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}}(1-z)^{a-1}dz$$

über. Ich benutze nun die Potenzentwicklung

$$(2.)\qquad e^{-\frac{\omega}{1-z}}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)z^\nu,$$

welche allerdings nur für $|z|<1$ konvergiert, und führe in der unendlichen Reihe

$$(2^*.)\qquad e^{-\frac{\omega}{1-z}}(1-z)^{a-1}=\sum_0^{\infty}\Psi_\nu(\omega)z^\nu(1-z)^{a-1}$$

die Integration zwischen den Grenzen Null und Eins gliedweise aus. Da

$$\int_0^1 z^\nu(1-z)^{a-1}dz=\frac{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(a)}{\Gamma(a+\nu+1)}=\frac{\nu!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}$$

ist, so entsteht die folgende Darstellung der Funktion $Q(-a, \omega)$:

$$(3.)\quad \begin{cases} \omega^a Q(-a, \omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \dfrac{\nu!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+\nu)} \\ \quad = \dfrac{\Psi_0(\omega)}{a} + \dfrac{1.\Psi_1(\omega)}{a(a+1)} + \dfrac{1.2\Psi_2(\omega)}{a(a+1)(a+2)} + \cdots. \end{cases}$$

Wir setzen ω als reell und positiv voraus, und bemerken, daß die eben auseinandergesetzte Methode verlangt, daß a in seinem reellen Teil positiv bleibt, eine Annahme, die wir festhalten wollen.

Bevor wir zur strengen Rechtfertigung des benutzten Verfahrens übergehen, wollen wir uns über die Natur und Bildungsweise der Koeffizienten $\Psi_\nu(\omega)$ unterrichten.

Offenbar ist

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega},$$

ferner

$$2\pi i \Psi_\nu(\omega) = \int_{(0)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} \frac{dz}{z^{\nu+1}},$$

wobei die Integration im positiven Sinne längs eines um den Nullpunkt in hinreichend kleiner Entfernung geführten Weges geschieht.

Setzt man

$$\frac{1}{1-z} = x,$$

so entsteht

$$(4.)\quad 2\pi i \Psi_\nu(\omega) = \int e^{-\omega x} \frac{x^{\nu-1}}{(x-1)^{\nu+1}} dx,$$

wobei nun der geschlossene Integrationsweg den Punkt $x=1$ einmal im positiven Sinne umläuft. Dieses Integral hat aber den Wert

$$\frac{2\pi i}{\nu!}\left[D_z^\nu(e^{-\omega z} z^{\nu-1})\right]_{z=1}$$

und hieraus folgt

$$\Psi_\nu(\omega) = \frac{1}{\nu!\,\omega^{\nu-1}} D_{z=1}^\nu\left[e^{-\omega z}(\omega z)^{\nu-1}\right].$$

oder

$$(5.)\quad \Psi_\nu(\omega) = \frac{\omega}{\nu!} D_\omega^\nu(e^{-\omega}\omega^{\nu-1}).$$

Wird die Differentiation rechts ausgeführt, so entsteht

$$(5^*.) \qquad \Psi_\nu(\omega) = e^{-\omega} \sum_{\alpha=1}^{\nu} (-1)^\alpha \binom{\nu-1}{\alpha-1} \frac{\omega^\alpha}{\alpha!}.$$

Um über das Verhalten von Ψ_ν bei großem ν Aufschluß zu erhalten, benutzen wir die Darstellung (4.), indem wir als Integrationsweg das Rechteck wählen, dessen vier Ecken den komplexen Zahlen $\frac{1}{2} \pm Ni$, $M \pm Ni$ entsprechen; dabei bedeuten M und N zwei positive Größen, die wir nachher ins Unendliche wachsen lassen wollen. Das Integral kann wie folgt geschrieben werden

$$\int e^{-\omega x} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{(x-1)^2},$$

und wenn wir beachten, daß auf den Strecken

$$\left(\frac{1}{2} + Ni \ldots M + Ni\right), \quad \left(\frac{1}{2} - Ni \ldots M - Ni\right), \quad \left(M - Ni \ldots M + Ni\right)$$

das Produkt

$$e^{-\omega x} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\nu-1}$$

für sehr große M und N endlich bleibt, so ist klar, daß die auf diese Strecken entfallenden Teile des Integrals gegen Null konvergieren, falls M und N unendlich groß werden.

Das Integral (4.) ist daher dem geradlinigen von $x = \frac{1}{2} + i\infty$ bis $x = \frac{1}{2} - i\infty$ erstreckten Integral desselben Integranden gleich, und wir haben, indem wir $x = \frac{1}{2} + iy$ setzen, die Darstellung

$$\Psi_\nu(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega\left(\frac{1}{2}+iy\right)} \frac{\left(iy + \frac{1}{2}\right)^{\nu-1}}{\left(iy - \frac{1}{2}\right)^{\nu+1}} dy$$

und dies ist wegen

$$\left|\frac{iy + \frac{1}{2}}{iy - \frac{1}{2}}\right| = 1$$

absolut kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega}{2}} \frac{dy}{\left|\frac{1}{2}-iy\right|^2} = \frac{e^{-\frac{\omega}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{\frac{1}{4}+y^2},$$

d. h. es bleibt $\Psi_\nu(\omega)$ absolut kleiner als eine von ν unabhängige Größe M.

Ich setze nun $a = a' + a''i$ und mache die Annahme, daß $a' > 1$ ist. Die Rechtfertigung des oben zur Integration von (2^a.) angewandten Verfahrens verlangt den Nachweis, daß die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a-1} dz \qquad (\varepsilon > 0)$$

konvergiert und zugleich mit ε unendlich klein wird.

Die absoluten Beträge ihrer Glieder sind offenbar kleiner als diejenigen der Reihe

$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} M \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a'-1} dz,$$

welche wiederum kleiner sind als die der folgenden

$$A' = \sum_{\nu=0}^{\infty} M \int_{0}^{1} z^\nu (1-z)^{a'-1} dz.$$

Diese letztere Reihe ist aber offenbar

$$A' = \sum_{0}^{\infty} \frac{M.\nu!}{a'(a'+1)\ldots(a'+\nu)}$$

und konvergiert unter der gemachten Annahme $a' > 1$.

Die Reihen A' und A sind daher konvergent, letztere offenbar gleichmäßig in Bezug auf die Veränderliche ε zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$. Der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} A$$

wird daher nach einem bekannten Satze der Elemente durch direktes Einsetzen von $\varepsilon = 0$ in die Reihe A gewonnen, und dies gibt

$$\lim_{\varepsilon=0} A = 0;$$

hieraus folgt a fortiori

$$\lim_{\varepsilon=0} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_{1-\varepsilon}^{1} z^\nu (1-z)^{a-1}\, dz = 0,$$

was eben zu beweisen war.

Im Vorhergehenden ist also die Gleichung (3.) für den Fall, daß der reelle Teil der Veränderlichen a größer als Eins bleibt, streng bewiesen. Die Koeffizienten werden durch (5*.) für $\nu > 0$ in endlicher Form gegeben, wozu noch die Festsetzung

$$\Psi_0(\omega) = e^{-\omega}$$

hinzukommt.

Wegen der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\frac{1}{4} + y^2} = 2\pi$$

kommt noch die Ungleichung

$$(6.)\qquad |\Psi_\nu(\omega)| < e^{-\frac{1}{2}\omega}$$

zum Vorschein, die bei der wirklichen Rechnung behufs Fehlerabschätzung nützlich sein kann.

Schreibt man (3.) in der Gestalt

$$\omega^a Q(-a) - \frac{e^{-\omega}}{a} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{a(a+1)\dots(a+\nu)},$$

so drückt sich die linke Seite vermöge der bekannten Funktionalgleichung

$$a\, Q(-a) = e^{-\omega}\omega^{-a} - Q(1-a)$$

in der Gestalt aus

$$-\frac{\omega^a Q(1-a)}{a},$$

und man hat daher anstelle von (3.) die Entwicklung

$$\omega^a Q(1-a, \omega) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{\nu!}{(a+1)(a+2)\dots(a+\nu)}.$$

Setzen wir also

$$(7.)\qquad G_n(\omega) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \binom{n-1}{\nu-1} \frac{\omega^\nu}{\nu!},$$

so wird

$$(8.)\qquad Q(1-a,\omega)=\frac{e^{-\omega}}{\omega^a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,G_n(\omega)}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)},$$

solange der reelle Teil von a größer als Eins bleibt.

Für wirkliche Rechnung wird diese Entwicklung natürlich erst für größere a brauchbar sein, und zwar gibt dann eine nur geringe Anzahl von Gliedern die gewünschte Annäherung.

Eine andere Entwicklung von $Q(1-a)$, in welcher als Koeffizienten wieder die $G_n(\omega)$ auftreten, gewinnt man auf folgende Art.

Die bekannte Formel

$$\Gamma(a)\,Q(1-a,\omega)=\int_0^{\infty}e^{-\omega(x+1)}\frac{x^{a-1}\,dx}{x+1}$$

geht durch die Substitution

$$x+1=\frac{1}{1-z}$$

über in

$$\Gamma(a)\,Q(1-a,\omega)=\int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}}z^{a-1}(1-z)^{-a}\,dz.$$

Diese Gleichung findet statt, solange der reelle Teil von a positiv bleibt; nimmt man aber an, daß derselbe zwischen Null und Eins enthalten ist, so läßt sich die Entwicklung (2.) anwenden und es kommt

$$\Gamma(a)Q(1-a,\omega)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\int_0^1 z^{a+\nu-1}(1-z)^{-a}\,dz.$$

Das im allgemeinen Gliede rechts stehende Integral hat den Wert

$$\frac{\Gamma(a+\nu)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(\nu+1)}=\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+\nu-1)}{\nu!}\,\Gamma(a)\,\Gamma(1-a),$$

und unser Resultat nimmt demnach die Gestalt an:

$$\frac{Q(1-a,\omega)}{\Gamma(1-a)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Psi_\nu(\omega)\frac{a(a+1)\dots(a+\nu-1)}{\nu!}$$

$$=\Psi_0(\omega)+\Psi_1(\omega)\frac{a}{1}+\Psi_2(\omega)\frac{a(a+1)}{1.2}+\cdots.$$

Hier setze ich nun $a=1-s$ und beachte, daß in unserer Schreibweise

$$\Psi_n(\omega)=-e^{-\omega}G_n(\omega),\quad \Psi_0(\omega)=e^{-\omega};$$

dadurch entsteht die Gleichung

$$(9.)\qquad \frac{e^{\omega}Q(s,\omega)}{\Gamma(s)} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\omega)\binom{n-s}{n}.$$

Dieselbe wurde allerdings nur unter der Annahme bewiesen, daß der reelle Teil von s zwischen Null und Eins enthalten ist, aber die Reihe konvergiert, sobald der reelle Teil von s positiv ist. Die Konvergenz ist übrigens eine nur sehr langsame, und die Betrachtung entbehrt der Strenge.

Um Sicheres zu gewinnen, ersetzen wir das Integral in der Ausgangsgleichung

$$\Gamma(1-s)\,Q(s,\omega) = \int_0^1 e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz$$

durch ein Schlingenintegral

$$J = \int_{(1,0,1)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Der Integrationsweg ist hier eine geschlossene Linie, welche vom Punkte $z=1$ ausgeht und die Strecke $0 \ldots 1$ im positiven Sinne umläuft. Man kann dafür speziell die Sukzession der geraden nördlich von der Achse zu denkenden Strecke $1 \ldots \varrho$, des Kreisumfanges (ϱ) mit dem kleinen Halbmesser ϱ um den Nullpunkt herum, und des südlich von der Achse zu denkenden Segments $\varrho \ldots 1$ setzen.

Auf dem Integrationswege bleibt die Funktion

$$e^{-\frac{\omega}{1-z}}(1-z)^{s-1}$$

unzweideutig bestimmt, sobald man die Festsetzung macht, für $(1-z)^{s-1}$ denjenigen Zweig zu wählen, der für unendlich kleine z in 1 übergeht. Was die Funktion z^{-s} betrifft, so setzen wir fest, daß sie auf dem Segment $1 \ldots \varrho$ im arithmetischen Sinne genommen wird, also

$$z^{-s} = e^{-s\log z} \text{ und } \log z \text{ reell;}$$

die Fortsetzung längs des Kreises (ϱ) in die Strecke $\varrho \ldots 1$ wird dadurch vollkommen bestimmt, und zwar erhält die Funktion im Punkte z von $\varrho \ldots 1$ am südlichen Ufer den Wert

$$z^{-s}e^{-2s\pi i};$$

demnach wird J sich in folgende Teile spalten:

$$J=\int_1^{\varrho} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz+\int_{(\varrho)}+e^{-2s\pi i}\int_{\varrho}^{1} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

wobei das mittlere Integral längs des Kreises (ϱ) zu nehmen ist. Zieht man das erste und das dritte Integral zusammen, so entsteht

$$J=\int_{(\varrho)}+(e^{-2s\pi i}-1)\int_{\varrho}^{1} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Falls nun der reelle Teil von s zwischen Null und Eins genommen wird, nähert sich das Integral

$$\int_{(\varrho)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz$$

zu gleicher Zeit mit ϱ der Null, und wir erhalten bei diesem Grenzübergange $\varrho=0$ die Gleichung

$$J=(e^{-2s\pi i}-1)\,\Gamma(1-s)\,Q(s,\omega),$$

hieraus also die wichtige Gleichung

$$\text{(A.)}\qquad \Gamma(1-s)\,Q(s,\omega)=\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1}\int_{(1,0,1)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Dieselbe ist zwar unter der Annahme bewiesen, daß der reelle Teil von s zwischen Null und Eins enthalten ist, sie behält aber ihre Gültigkeit für jedes Gebiet der s-Ebene, in welchem die rechte Seite einen Sinn hat; speziell findet (A.) statt, sobald der reelle Teil von s positiv bleibt; wir werden annehmen, daß derselbe größer als Eins bleibt.

Wir betrachten anstelle von (A.) zunächst die Größe

$$\text{(B.)}\qquad H_r=\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1}\int_{(r,0,r)} e^{-\frac{\omega}{1-z}} z^{-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

wobei $0<r<1$ und der Integrationsweg in $z=r$ beginnt und endigt, sodaß

$$\lim_{r=1} H_r=\Gamma(1-s)\,Q(s,\omega).$$

Nun läßt sich in (B.) die Entwicklung (2.) benutzen, da dieselbe längs des gesamten Integrationsweges $(r, 0, r)$ gleichmäßig konvergiert. Wir erhalten

$$H_r = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \cdot \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Nun spalten wir dies in

$$H_r = S_n(r) + R_n(r),$$

wobei n eine feste, hinreichend große ganze Zahl ist und

$$S_n(r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_\nu(\omega) \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

$$R_n(r) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Nun ist

$$\lim_{r=1} \int_{(r,0,r)} = \int_{(1,0,1)}$$

also

$$\lim_{r=1} \left\{\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz\right\} = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\nu+1-s)}{\Gamma(\nu+1)},$$

also

$$\text{(C.)} \qquad \lim_{r=1} S_n(r) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Psi_\nu(\omega) \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(\nu+1-s)}{\nu!}.$$

Ferner ist für $\nu \geqq n$, falls n hinreichend groß,

$$\frac{1}{e^{-2s\pi i}-1} \int_{(r,0,r)} z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz = \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

also

$$R_n(r) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

Bedeutet s' den reellen Teil von s, so besteht wegen der oben bewiesenen Tatsache

$$|\Psi_\nu(\omega)| < M$$

die Ungleichung

$$\left|\Psi_\nu(\omega) \int_0^r z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz\right| < M \int_0^1 z^{\nu-s'}(1-z)^{s'-1}\,dz.$$

Damit ist bewiesen, daß die Reihe $R_n(r)$ sich aus Gliedern zusammensetzt, welche absolut kleiner bleiben als die entsprechenden Glieder der Reihe positiver Größen

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} M\frac{\Gamma(\nu+1-s')\Gamma(s')}{\nu!};$$

der asymptotische Wert entfernter Glieder der letzteren ist nun

$$\frac{M\Gamma(s')}{(\nu+1-s')^{s'}},$$

sie ist also konvergent, falls $s'>1$ ist. Damit ist aber die gleichmäßige Konvergenz in Bezug auf r der Reihe $R_n(r)$ bewiesen, und man hat demnach

$$\lim_{r=1} R_n(r) = \sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega) \int_0^1 z^{\nu-s}(1-z)^{s-1}\,dz,$$

was eben die Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \Psi_\nu(\omega)\frac{\Gamma(s)\Gamma(\nu+1-s)}{\nu!}$$

ist.

Durch die vorliegenden Ausführungen ist die Gültigkeit der Gleichung (9.) unter der Annahme, daß der reelle Teil von s größer als Eins bleibt, streng bewiesen.

Wir wollen nun eine Relation ableiten, aus welcher sich eine Entwicklung der Funktion $Q(a, 1)$ ergibt, welche in ihren Gliedern die Größen $\Gamma(a+c+ni)$ enthält. Die Kenntnis der letzteren Funktionen würde also zu einer bequemen Bestimmung von $Q(a)$ ausreichen.

Ich betrachte die Funktion der reellen Veränderlichen ξ

$$F(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+itn+it\xi)}{(c+itn+it\xi)\,\omega^{c+it(n+\xi)}},$$

wobei ω reell und positiv ist, ebenso wie t, ferner wird auch die Hilfsgröße c reell und positiv vorausgesetzt, und zwar so groß, daß der reelle Teil von $a+c$ positiv ausfällt.

Die Reihe ist offenbar konvergent, und zwar beinahe so intensiv wie eine geometrische mit dem Verhältnis

$$e^{-t\frac{\pi}{2}}.$$

Ferner ist

$$F(\xi+1)=F(\xi);$$

die trigonometrische Entwicklung von $F(\xi)$ kann in der Gestalt

$$F(\xi)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{2m\xi\pi i}$$

angenommen werden, und zwar wird

$$A_m=\int_0^1 F(\xi)e^{-2m\xi\pi i}d\xi.$$

Führt man die Integration an der zugrunde gelegten Reihe $F(\xi)$ aus, so ergibt sich

$$A_m=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+itx)}{c+itx}\,\frac{e^{-2mx\pi i}dx}{\omega^{c+itx}}$$

oder, wenn man x durch $\frac{x}{t}$ ersetzt:

$$A_m=\frac{e^{\frac{2mc\pi}{t}}}{t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix}\,\frac{dx}{\left(\omega e^{\frac{2m\pi}{t}}\right)^{c+ix}}.$$

Setzt man für einen Augenblick

$$\omega_1=\omega e^{\frac{2m\pi}{t}},$$

so kommt alles auf die Bestimmung des Integrals

$$L=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix}\,\frac{dx}{\omega_1^{c+ix}}$$

an. Dasselbe geht nach Substitution von

$$\Gamma(a+c+ix)=\int_0^{\infty}e^{-z}z^{a+c+ix-1}dz$$

in das Doppelintegral

$$L=\int_0^{\infty}e^{-z}z^{a-1}dz\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{z}{\omega_1}\right)^{c+ix}\frac{dx}{c+ix}$$

über. Nun ist aber bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{\infty}k^{c+ix}\frac{dx}{c+ix}=\begin{cases}2\pi, \text{ wenn } k>1,\\ 0, \text{ wenn } 0<k<1,\end{cases}$$

also bleibt aus unserem Doppelintegral

$$L = 2\pi \int_{\omega_1}^{\infty} e^{-z} z^{a-1}\, dz,$$

d. h. es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+ix)}{c+ix} \frac{dx}{\omega_1^{c+ix}} = 2\pi\, Q(a, \omega_1). \tag{10.}$$

Damit haben wir die Koeffizientendarstellung

$$A_m = \frac{2\pi}{t} e^{\frac{2mc\pi}{t}} Q\left(a, \omega e^{\frac{2m\pi}{t}}\right),$$

und infolgedessen die Relation

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2\pi}{t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2m\pi}{t}(c+it\xi)} Q\left(a, \omega e^{\frac{2m\pi}{t}}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+itn+it\xi)}{(c+itn+it\xi)\, \omega^{c+itn+it\xi}}. \end{aligned}\right. \tag{11.}$$

Ich wähle darin $\xi = 0$, $\omega = 1$ und schreibe sie wie folgt

$$\frac{2\pi}{t} Q(a) + \frac{2\pi}{t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right) + \frac{2\pi}{t} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2mc\pi}{t}} Q\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+int)}{c+int}.$$

Hier läßt sich links die zweite Reihe durch eine schnell konvergierende ersetzen, wenn man die *Euler-Prym*sche Gleichung

$$Q\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right) = \Gamma(a) - P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right)$$

benutzt und die Summation

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{2mc\pi}{t}} P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right) \tag{D.}$$

mit Hilfe der Darstellung

$$P\left(a, e^{-\frac{2m\pi}{t}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-\frac{2m\pi}{t}(a+n)}}{n!\,(a+n)}$$

ausführt; dies liefert die Größe (D.) in der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+c+n)}-1\right)}.$$

Man erhält daher für die Funktion

$$Q(a) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\,dx$$

die Darstellung

$$(12.)\quad \left\{\begin{aligned} Q(a) &= \frac{t}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a+c+nti)}{c+nti} \\ &\quad - \frac{\Gamma(a)}{e^{\frac{2c\pi}{t}}-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+c+n)}-1\right)} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} e^{\frac{2mc\pi}{t}}\, Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right). \end{aligned}\right.$$

Wird hier z. B. $t=1$, $c=1$ genommen, so wird die letzte Reihe rechts einen Wert ergeben, der kleiner als 10^{-230} ist, also ohne weiteres unterdrückt werden kann.

Um hier zur Grenze für $c=0$ überzugehen, beachte ich, daß für unendlich kleine c die rechte Seite von (12.) in

$$\frac{t}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+nti)-\Gamma(a-nti)}{nti} + \frac{t}{2\pi}\,\frac{\Gamma(a+c)}{c}$$
$$-\Gamma(a)\left(\frac{t}{2\pi c} - \frac{1}{2}\right) + \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)}-1\right)} - \sum_{m=1}^{\infty} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right)$$

übergeht, und somit kommt

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned} Q(a) &= \frac{1}{2}\Gamma(a) + \frac{t}{2\pi}\Gamma'(a) \\ &\quad + \frac{t}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a+nti)-\Gamma(a-nti)}{ni} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(a+n)\left(e^{\frac{2\pi}{t}(a+n)}-1\right)} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{m} Q\left(a, e^{\frac{2m\pi}{t}}\right). \end{aligned}\right.$$

Die vorteilhafteste Wahl der Hilfsgröße t wäre $t=2$.

Eine andere Art Entwicklungen der Q-Funktion sind diejenigen, welche sich der Theorie der Reihe

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+x+n)u}}{(\omega+x+n)^s} \tag{14.}$$

anschließen. Darunter gehört die wohlbekannte Entwicklung *Hermites**) und diejenige, welche ihr Herr *Mellin***) zur Seite gestellt hat. In der Reihe (14.) wird vorausgesetzt, daß u im reellen Teile positiv ist; ich setze übrigens u reell und positiv voraus.

Führt man an der Reihe (14.) die Integration

$$\int_0^1 \Phi(x)\, dx$$

aus, so erhält man als Integralwert

$$\int_0^{\infty} e^{-(\omega+z)u} \frac{dz}{(\omega+z)^s} \quad \text{oder} \quad \int_{\omega}^{\infty} e^{-xu} \frac{dx}{x^s},$$

was man auch so schreiben kann:

$$u^{s-1} \int_{\omega u}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{z^s}.$$

Demnach ist

$$\int_0^1 \Phi(x)\, dx = Q(1-s, u\omega) \cdot u^{s-1}. \tag{15.}$$

Entwickelt man nun die Funktion

$$e^{ux} \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n+x)^s}$$

nach Potenzen von x, so entsteht

$$e^{ux} \Phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s}{m} x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{s+m}}.$$

Diese Entwicklung konvergiert im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig nur dann, wenn $\omega > 1$ ist; unter dieser Annahme erhält man, wenn man auf beiden Seiten mit $e^{-ux} dx$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert, ver-

*) Dieses Journal Bd. 90.

**) Acta math. Bd. 2.

möge (15.) die Relation

$$(16.)\qquad Q(1-s,\, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-s}{m} P(m+1,\, u)\, S(s+m),$$

wobei zur Abkürzung

$$(17.)\qquad S(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a}$$

gesetzt wird und die Koeffizienten

$$P(m+1,\, u) = \int_0^u e^{-x} x^m\, dx$$

sich leicht in endlicher Gestalt darstellen lassen. Für $u=1$ geht diese Formel in die *Hermite*sche über.

Ich schreibe nun die Gleichung (15.) in der Gestalt

$$\int_0^1 \Phi(1-x)\, dx = u^{s-1} Q(1-s,\, u\omega),$$

und berechne das Integral, indem ich zunächst die Funktion

$$e^{-ux} \Phi(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n-x)^s}$$

nach Potenzen von x entwickle. Dadurch entsteht

$$\Phi(1-x) = e^{ux} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} x^m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^{s+m}},$$

eine Reihe, die so schnell konvergiert wie die geometrische mit dem Verhältnis $\frac{x}{\omega+1}$. Die Integration nach x zwischen Null und Eins ergibt

$$(18.)\qquad Q(1-s,\, u\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \mathfrak{P}(m+1,\, u)\, S_1(s+m),$$

wobei die Bezeichnung

$$(19.)\qquad S_1(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+n)u}}{(\omega+n)^a u^a},$$

und

$$\mathfrak{P}(m+1,\, u) = \int_0^u e^{x} x^m\, dx$$

gebraucht wird. Letztere Größe läßt sich wieder in geschlossener Form durch Elementarfunktionen ausdrücken, und zwar ist

$$\mathfrak{P}(m+1, u) = (-1)^m m! e^u \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} \frac{(-u)^\nu}{\nu!} - e^{-u} \right\}.$$

Diese Entwicklung (18.), welche ich in den Prager Berichten vom Jahre 1889 auf einem anderen Wege gewonnen habe, geht für $u=1, \omega=1$ in die freilich früher publizierte Formel des Herrn *Mellin* über. Da sich letztere nur auf diesen Spezialfall bezieht, in welchem aber die Konvergenz für den wirklichen Gebrauch zu schwach ist, so gebührt der Vorzug doch der *Hermite*schen Entwicklung, da sich letztere für einigermaßen große ω wirklich verwenden läßt.

Es sei nun $k \geqq 2$ eine ganze Zahl und man setze $u\omega = z$, $\omega = k-1$ also

$$u = \frac{z}{k-1}.$$

Setzt man dann

$$(19^a.) \qquad R(a) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-nu}}{n^a},$$

so nimmt (18.) die Gestalt an

$$(18^a.) \qquad Q(1-s, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-s}{m} \frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+s}} R(m+s);$$

für kleine u ist der Quotient

$$\frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+1}}$$

von $\frac{1}{m+1}$ nur wenig verschieden, also verhält sich der als Koeffizient in (18ª.) vorkommende Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{P}(m+1, u)}{u^{m+s}}$$

ungefähr wie

$$\frac{u^{1-s}}{m+1}.$$

Ist also der reelle Teil von s größer als Eins, so wird man in (18ª.) die Zahlen $R(m+s)$ auf eine Anzahl von Dezimalstellen berechnen müssen, welche mit abnehmendem u wächst; dabei konvergiert die Reihe (19ª.) sehr langsam, wenn u klein wird. Brauchbar wird also unsere Formel (18ª.) doch nur für größere z. Bei ihrer Anwendung hat man zunächst einzelne Glieder der Reihe

$$R(s) = \frac{e^{-ku}}{k^s} + \frac{e^{-(k+1)u}}{(k+1)^s} + \frac{e^{-(k+2)u}}{(k+2)^s} + \cdots$$

zu berechnen; die Glieder der Reihe $R(s+m)$ entstehen aus ihnen durch die Division bezw. mit

$$k^m, (k+1)^m, (k+2)^m, \ldots .$$

Wir schließen unsere Betrachtungen mit einer halbkonvergenten Entwicklung der Reihe

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu u}}{(\omega+\mu)^s} = \Psi(\omega, s). \tag{20.}$$

Dieselbe wird bekanntlich durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, das entsteht, wenn man in

$$\frac{\Gamma(s)}{(\omega+\mu)^s} = \int_0^{\infty} e^{-(\omega+\mu)x} x^{s-1}\, dx$$

über $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ summiert. Wir setzen voraus, daß $s > 0$. Es kommt

$$\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\omega x} x^{s-1}\, dx}{1 - e^{-u-x}}.$$

Schreibt man ux anstatt x, so kommt

$$u^{-s}\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u\omega x} x^{s-1}}{1 - e^{-u(1+x)}}\, dx. \tag{21.}$$

Hier benutzen wir den bekannten Satz

$$\frac{1}{1-e^{-z}} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} z^{2\nu-1} + (-1)^p \frac{\Theta B_{p+1}}{(2p+2)!} z^{2p+1},$$

wobei $0 < \Theta < 1$, und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die positiven *Bernoulli*schen Zahlen sind. In unserem Falle ist $z = u(1+x)$ und wir erhalten daher folgende Darstellung der Größe (21.):

$$\begin{aligned} u^{-s}\Gamma(s)\, \Psi(\omega, s) = {} & \frac{1}{u}\int_0^{\infty} e^{-u\omega x} \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-u\omega x} x^{s-1}\, dx \\ & + \sum_1^p (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} \int_0^{\infty} e^{-u\omega x} x^{s-1} (1+x)^{2\nu-1}\, dx \\ & + (-1)^p \frac{B_{p+1}}{(2p+2)!} u^{2p+1}\, \Theta' \int_0^{\infty} e^{-u\omega x} x^{s-1} (1+x)^{2p+1}\, dx. \\ & (0 < \Theta' < 1) \end{aligned}$$

Wird das letzte Glied der rechten Seite mit $(-1)^p R_p$ angedeutet, so ist offenbar R_p positiv und kleiner als der numerische Wert desjenigen Ausdrucks, der als neues Glied zum voranstehenden Aggregat hinzukommen würde, falls man p um eine Einheit wachsen ließe.

Nun ist aber, wie oben bemerkt,

$$\int_0^\infty e^{-vx} \frac{x^{s-1}\, dx}{1+x} = e^v \cdot \Gamma(s)\, Q(1-s, v),$$

und wenn man die Identität

$$(1+x)^{2\nu-1} = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} x^\alpha$$

benutzt, so kommt

$$\int_0^\infty e^{-u\omega x}\, x^{s-1} (1+x)^{2\nu-1}\, dx = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u\omega x}\, x^{\alpha+s+1}\, dx,$$

was aber den Wert

$$\sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \cdot \frac{\Gamma(s+\alpha)}{(u\omega)^{s+\alpha}}$$

hat. Setzt man demnach

$$(22.)\qquad G(z, s)_\nu = \sum_{\alpha=0}^{2\nu-1} \binom{2\nu-1}{\alpha} \frac{s(s+1)\ldots(s+\alpha-1)}{z^\alpha},$$

so erhalten wir aus obiger Gleichung

$$u^{-s}\, \Psi(\omega, s)\, e^{-u\omega} = \frac{1}{u} Q(1-s, u\omega) + \frac{e^{-u\omega}}{2(u\omega)^s}$$
$$+ \frac{e^{-u\omega}}{(u\omega)^s} \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} G(u\omega, s)_\nu,$$

wobei rechts eine halbkonvergente Reihe steht, in welcher der Rest absolut kleiner bleibt, als das erste vernachlässigte Glied.

Ersetzt man $u\omega$ durch z, so nimmt unsere halbkonvergente Entwicklung die Gestalt an:

$$(23.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-mu-z}}{(mu+z)^s} = \frac{1}{u} Q(1-s, z) \\ \displaystyle\qquad + \frac{e^{-z}}{2z^s} + \frac{e^{-z}}{z^s} \sum_{\nu=1,2,3,\ldots} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{B_\nu}{(2\nu)!} u^{2\nu-1} G(z, s)_\nu. \end{cases}$$

Wenn man hier auf beiden Seiten mit u multipliziert, so entsteht eine halbkonvergente Bestimmung von $Q(1-s, z)$ bei positivem reellem s, welche die Berechnung einer einzigen Reihe des *Hermite*schen Typus, nämlich

$$\sum_0^\infty \frac{e^{-mu}}{(mu+z)^s},$$

erfordert. Diese Reihe ist — ins Komplexe übertragen — mit derjenigen identisch, welche *Malmstén* und *Lipschitz* zuerst untersuchten, und die ich unter der Bezeichnung

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^\infty \frac{e^{2nx\pi i}}{(w+n)^s}$$

bei verschiedenen Gelegenheiten betrachtet habe, namentlich in meiner Abhandlung über die *Malmstén*schen Reihen, welche sich in den Schriften der Prager Akademie vom Jahre 1891 abgedruckt findet.