Matyáš Lerch
Příspěvky k theorii funkcí elliptických

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1886, 391–429

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501555

25.

Příspěvky k theorii funkcí elliptických.

Přednášel M. J. Lerch dne 4. června 1886.

1.

Ve svých přednáškách o funkcích elliptických vycházel *Jacobi* z vlastností nekonečných řad tvaru

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a\nu^2+2b\nu+c} = e^c \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{a\nu^2+2b\nu},$$

které konvergují bezpodmínečně pro všechny konečné hodnoty veličiny b, jeli jen realná část veličiny a zápornou. Abychom dokázali právě učiněný výrok o konvergenci řady

$$\sum e^{a\nu^2+2b\nu},$$

rozdělme ji v součet dvou sčítanců

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{a\nu^2+2b\nu} \quad \text{a} \quad \sum_{\nu=-1}^{-\infty} e^{a\nu^2+2b\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{a\nu^2-2b\nu},$$

jež jsou téhož tvaru, a jichž konvergenci dokážeme.

Obecný člen prvé z těchto obou řad jest $u_\nu = e^{a\nu^2+2b\nu}$, a hodnota $\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu}$ je tu patrně rovna veličině $e^{2a\nu+(a+2b)}$; jeli tedy část realná veličiny a zápornou, je absolutní hodnota veličiny e^{2a} menší než 1 a její ν-tá mocnost klesá s rostoucím ν pod každou mez, takže máme

$$lim \left| \frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \right| = 0,$$

a řada $\Sigma \mid u_\nu \mid$ je konvergentní, jakž tvrzeno.

Tím zároveň podán důkaz o druhé z obou řad.

Poněvadž řada naše konverguje pro všecky hodnoty b, nikoli však pro všechna a, považuje se obyčejně a za parameter a značí se se $a = \pi i\, \tau$, b pak za vlastní proměnnou, psanou ve tvaru $b = \pi i\, u$, a hodnota řady

$$\text{(I)} \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau\nu^2 + 2u\nu)} = \vartheta(u, \tau)$$

znamená se obyčejně $\vartheta_3(u, \tau)$. Dovolíme si však označení pohodlnější, vynechajíce příponu 3. Veličina $\tau\pi i$ má svou realnou část zápornou, jeli druhá souřadnice veličiny τ kladnou, a naopak. Jen pro takováto τ má naše řada (I) smysl.

Poněvadž ν je číslo celistvé, nemění se členové řady (I), přejdeli u v $(u + 1)$, t. j. bude

$$\vartheta(u + 1) = \vartheta(u),$$

čímž řečeno, že $\vartheta(u)$ připouští periodu 1.

Klademeli v řadě (I) $\nu = \mu + 1$, probíhá μ zároveň s ν všecka celistvá čísla od $-\infty$ do ∞ a každé pouze jednou.

Proto bude

$$\vartheta(u, \tau) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\tau(\mu+1)^2 + 2u(\mu+1)]}$$
$$= e^{(2u+\tau)\pi i} \sum_{\mu} e^{\pi i[\tau\mu^2 + 2(u+\tau)\mu]},$$

tedy

$$\vartheta(u, \tau) = e^{(2u+\tau)\pi i}\vartheta(u + \tau, \tau).$$

Naše řada (I) tedy má důležitou vlastnost obsaženou ve vzorcích

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \vartheta(u + 1, \tau) = \vartheta(u, \tau) \\ \vartheta(u + \tau, \tau) = e^{-\pi i(2u+\tau)}\vartheta(u, \tau). \end{cases}$$

Poněvadž veličina τ nemůže býti realná, musí býti komplexní, a pak lze každou hodnotu u vyjádřiti tvarem $\alpha + \beta\tau$, kde α, β jsou veličiny realné.

Pak lze vždy určiti dvě celistvá čísla m a n tak, aby $\alpha = m + \alpha'$, $\beta = n + \beta'$, kde α' a β' jsou pravé kladné zlomky. Pak bude $\vartheta(u) = \vartheta(\alpha' + \beta'\tau + n\tau) = e^{-\pi i(2u' + 2n\tau - \tau)}\vartheta(u' + \overline{n-1}\tau) =$ atd., kde $u' = \alpha' + \beta'\tau$; opětovaným užitím vzorce (1) převedeme tento výraz na tvar součinu jisté funkce exponencialné s funkcí $\vartheta(u)$. Můžeme tedy hodnoty funkce $\vartheta(u)$ považovati za známé pro všecka u, známe-li je pro všecka u obsažená ve tvaru $\alpha' + \beta'\tau$, kde α', β' jsou pravé kladné zlomky. Tyto hodnoty u jsou znázorněny body uvnitř a na obvodě rovnoběžníka, jehož strany jsou úsečka $(0 \ldots 1)$ a průvodič bodu τ, kterýž nazveme rovnoběžníkem základním. Vedeme-li body $-1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm \nu, \ldots; -\tau, \pm 2\tau, \pm 3\tau, \ldots \pm \nu\tau, \ldots$ rovnoběžky se stranami tohoto rovnoběžníka, rozdělíme tím celou rovinu v rovnoběžníky shodné se základním. Známeli ϑ uvnitř jednoho z těchto rovnoběžníků, známe ji v celé rovině.

Místo funkce $\vartheta(u, \tau)$ můžeme též uvažovati funkci, která vznikne z ní, kladeli se $e^{u\pi i} = \xi$, $e^{\tau\pi i} = q$, a kterou znamenejme

$$T(\xi, q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} \xi^{2\nu}. \tag{I'}$$

Poněvadž realná část veličiny $\tau\pi i$ je zápornou, je nutně absolutní hodnota veličiny q menší než 1. Řada (I') obsahuje záporné mocnosti proměnné ξ v nekonečném počtu, a proto nemá řada pro $\xi = 0$ smyslu, a funkce nemá v místě $\xi = 0$ žádné určité hodnoty, a $\xi = 0$ je **podstatně zvláštním** místem funkce $T(\xi, q)$.

Druhé takové místo je $\xi = \infty$, všecka ostatní místa jsou pravidelna, a funkce má v nich hodnotu konečnou a určitou, která se od místa k místu spojitě mění. Zároveň patrno, že (I') je **sudou** funkcí ξ.

Druhá z rovnic (1) poskytne nám vztah

$$T(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} T(\xi, q). \tag{1'}$$

Jeli $\xi = \alpha$ hodnota, pro niž $T(\xi, q)$ zmizí, t. j. jeli $T(\alpha, q) = 0$, bude též $T(-\alpha, q) = 0$, takže též $-\alpha$ je místo nullové naší funkce. Podle (1') bude pak také $T(\pm q\alpha, q) = 0$, a tedy funkce zmizí také pro $\pm q\alpha$. Odtud plyne bezprostředně, že funkce $T(\xi, q)$ zmizí na místech $\xi = \pm q^n\alpha$, kde n je kladné neb záporné číslo celistvé.

Utvořme nyní sudou funkci $P(\xi, q)$, která zmizí na všech těchto místech $\xi = \pm q^n\alpha$ a na žádných jiných. Takovou nám poskytne nekonečný součin

$$P(\xi, q) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^2\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^4\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^6\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\ldots$$
$$\left(1 - q^2\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\left(1 - q^4\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\left(1 - q^6\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\ldots$$
$$= \left(1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - q^{2m}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2m}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$

Pro tuto funkci hledejme vztah analogický rovnici (1′), t. j. stanovme hodnotu $P(\xi q, q)$; i bude tu patrně

$$P(q\xi, q) = \left(1 - q^2\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - q^{2m+2}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2m-2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2n}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$
$$= \frac{1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}{1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2}}\,P(\xi, q),$$

tedy

$$P(q\xi, q) = -\frac{\alpha^2}{\xi^2}\,P(\xi, q).$$

Vztah tento bude téhož tvaru jako (1′), jeli $-\alpha^2 = \frac{1}{q}$, tedy $\alpha = \pm\frac{i}{\sqrt{q}}$. Nyní přesvědčíme se přímo dosazením, že funkce $T(\xi, q)$ zmizí pro tuto hodnotu α. Neboť řada (I′) poskytne nám pro $\xi = \alpha$ výraz

$$T(\alpha, q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2 - \nu},$$

a v tomto výrazu ruší se členové podvojně, a sice vždy oni dva, kteří odpovídají hodnotám $\nu = m,\ 1 - m$.

Dosadímeli tuto hodnotu za α do $P(\xi, q)$, obdržíme funkci

$$P(\xi, q) = \prod_{m=0}^{\infty}(1 + q^{2m+1}\xi^2)(1 + q^{2m+1}\xi^{-2}),$$

která zmizí pouze na oněch místech, na nichž mizí $T(\xi, q)$. Tudíž bude podíl

$$\frac{T(\xi, q)}{P(\xi, q)} = Q(\xi, q)$$

funkce, která se chová v okolí všech míst pravidelně, vyjímaje hodnoty $\xi = 0, \infty$, kde může míti místa zvláštní, a která se nemění, přejdeli ξ v $q\xi$, neboť dělením rovnic

$$T(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} T(\xi, q)$$

$$P(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} P(\xi, q)$$

obdržíme

$$\frac{T(q\xi, q)}{P(q\xi, q)} = \frac{T(\xi, q)}{P(\xi, p)},$$

to jest

$$Q(q\xi, q) = Q(\xi, q).$$

Dosadímeli sem za ξ a q hodnoty původní, shledáme, že

$$Q(e^{u\pi i}, e^{\tau\pi i})$$

je funkce jednoznačná proměnné u, která se chová v konečnu naskrze pravidelně a připouští periody 1, τ, takže má ve všech stejnolehlých bodech výše sestrojených rovnoběžníků hodnotu stejnou, a následovně nepřevyší v celé rovině určitou hodnotu M, která je větší než všechny hodnoty funkce Q uvnitř rovnoběžníka základního. Podle známé věty nauky o funkcích nemůže existovati jednoznačná analytická funkce komplexní proměnné u, která by pro všechna konečná u byla menší než jistá daná veličina M, leč neníli uvažovaná funkce stálou.

Podle této věty musí tedy býti $Q(e^{u\pi i}, e^{\tau\pi i})$ veličinou nezávislou na u, t. j. podíl $Q(\xi, q)$ nezávisí na ξ, nýbrž pouze na q, pročež jej znamenejme $\varphi(q)$. Máme pak rovnici

$$(\dagger) \qquad T(\xi, q) = \varphi(q) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{2n+1}\xi^2)(1 + q^{2n+1}\xi^{-2}),$$

z níž plyne, že funkce $T(\xi, q)$ nezmizí na žádných dalších místech mimo $\xi = \pm\, iq^{m+\frac{1}{2}}$, kde m značí nullu neb záporné číslo celistvé.

Jsou tedy místa nullová u funkce $\vartheta(u, \tau)$ dána rovnicí

$$e^{u\pi i} = e^{\tau\pi i(m+\frac{1}{2}) + \pi i(n+\frac{1}{2})},$$

takže funkce $\vartheta(u, \tau)$ zmizí na všech místech tvaru

$$u = \frac{1+\tau}{2} + m\tau + n,$$

kde m a n jsou celistvá čísla libovolného označení i nullu včítaje, a na žádných dalších.

Jeli u tvaru $\alpha + m\tau + n$, pravíme, že jest u shodno s α podle soustavy modulů $(1, \tau)$, píšíce

$$u \equiv \alpha, \ modd\ (1, \tau).$$

V tomto názvosloví zní náš výsledek v té formě, že nullová místa funkce $\vartheta(u, \tau)$ jsou *modd* $(1, \tau)$ shodna s místem $\frac{1+\tau}{2}$.

Geometricky jsou tato místa znázorněna ve středech rovnoběžníků výše sestrojené sítě, takže funkce $\vartheta(u, \tau)$ zmizí v každém z oněch rovnoběžníků vždy a to pouze jednou.

2.

Vzorec (†) poskytuje rozvoj funkce $T(\xi, q)$ v nekonečný součin, při čemž však přichází ještě funkce $\varphi(q)$, které dosud neznáme ve tvaru součinu.

Jacobi nalezl nekonečný součin pro $\varphi(q)$, a po něm podáno více verifikací, z nichž zvlášť pozoruhodným je důkaz *Cauchyho*, a jemu částečně podobný *Weierstrassův*, jenž všechny ostatní elegancí i přesností předčí, jejž tu s malou změnou opakujeme.

Součin na pravé straně rovnice (†) skládá se ze dvou činitelů tvaru

$$(\alpha) \qquad \pi(x, p) = (1 + px)(1 + p^2 x)(p + p^3 x) \ldots$$

a sice jest

$$\prod_0^\infty (1 + q^{2n+1}\xi^2) = \pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right),$$

$$\prod_0^\infty (1 + q^{2n+1}\xi^{-2}) = \pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right),$$

takže tu p, jak nutno, je menší než 1.

Z definice (α) plyne bezprostředně vztah

$$(\beta) \qquad \pi(x, p) = (1 + px)\,\pi(px, p).$$

Ana je funkce (α) konečna a spojita pro všecka konečná x, dá se rozvinouti v nekonečnou řadu mocninovou stále konvergentní, jakož se o tom ihned přesvědčíme. Buďiž $f(x)$ funkce hovící funkcionalné rovnici (β), t. j. rovnici $f(x)=(1+px)f(px)$, a nechť platí pro x, která jsou menší než určitá mez, rozvoj v konvergentní řadu

$$(\gamma) \qquad f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu x^\nu.$$

Poněvadž předpokládáme, že $|p|<1$, bude řada $\sum_0^\infty c_\nu p^\nu x^\nu$ tím silněji konvergovati, a proto bude lze klásti do rovnice

$$f(x)=(1+px)f(px)$$

hodnoty v řadách, takže vznikne

$$\sum_0^\infty c_\nu x^\nu=(1+px)\sum_0^\infty c_\nu p^\nu x^\nu=\sum_0^\infty(c_\nu+c^{\nu-1})p_\nu x^\nu, \qquad c_{-1}=0,$$

a odtud posléz

$$c_\nu=(c_\nu+c_{\nu-1})p^\nu,$$

z čehož se řešením obdrží

$$c_\nu=\frac{c_{\nu-1}p^\nu}{1-p^\nu}=\frac{p^\nu p^{\nu-1}c_{\nu-2}}{(1-p^\nu)(1-p^{\nu-1})}=\ldots$$

$$=\frac{c_0p^\nu p^{\nu-1}p^{\nu-2}\ldots p^1}{(1-p^\nu)(1-p^{\nu-1})(1-p^{\nu-2})\ldots(1-p^1)},$$

tedy posléz

$$c_\nu=\frac{c_0p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-p)(1-p^2)\ldots(1-p^\nu)}.$$

Pro tato c_ν máme pak

$$f(x)=(1+px)f(px)=(1+px)(1+p^2x)f(p^2x)=\ldots$$
$$=(1+px)(1+p^2x)\ldots(1+p^nx)f(p^nx).$$

Poněvadž $|p|<1$, bude tu $\lim\limits_{n=\infty} p^n=0$, a proto

$$f(x) = f(0) \lim_{n=\infty} (1+px)(1+p^2x)\dots(1+p^nx)$$
$$= c_0\pi(x, p),$$

takže platí skutečně

$$(\delta) \qquad \pi(x, p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \quad c_\nu = \frac{p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-p)(1-p^2)\dots(1-p^\nu)},$$

kterážto řada konverguje pro všecka konečná x.

Součinitel c_ν lze psáti též ve tvaru

$$c_\nu = p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \frac{\pi(-p^\nu, p)}{\pi(-1, p)},$$

takže pak bude

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) = \sum_0^\infty q^{\nu^2} \frac{\pi(-q^{2\nu}, q^2)}{\pi(-1, q^2)} \xi^{2\nu}$$

aneb

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)} \sum_0^\infty q^{\nu^2} \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{2\nu}$$

$$\pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)} \sum_0^\infty q^{\nu^2} \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{-2\nu}.$$

Násobením těchto výrazů obdržíme pak z rovnice

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) \pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q)$$

následující výsledek:

$$(\varepsilon) \quad \frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)^2} \sum_{\mu, \nu} q^{\mu^2+\nu^2} \pi(-q^{2\mu}, q^2)\, \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{2\mu-2\nu}$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2 \dots)$$

Pravou stranu rovnice (ε) lze uvésti v jednoduchou řadu mocninovou. Znamenámeli $\mu - \nu = s$, bude koefficient při x^{2s} dán výrazem (při kladném s)

$$(\zeta) \qquad C_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu^2+2\nu s+s^2} \pi(-q^{2\nu+2s}, q^2) \pi(-q^{2\nu}, q^2),$$

načež bude

$$\frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \xi^{2s}, \; C_s = C_{-s},$$

z čehož soudíme, že tu

$$C_s = \frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)} q^{s^2} = C_0 q^{s^2}, \; C_0 = \frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)}$$

a tedy dle (ζ)

$$C_0 = C_s q^{-s^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu^2 + 2\nu s} \pi(-q^{2\nu + 2s}, q^2) \pi(-q^{2\nu}, q^2).$$

Členové této řady klesají s rostoucím s pod každou mez, až na prvý, jenž nezávisí na s, a má hodnotu

$$\pi(-1, q^2),$$

která nám tedy poskytuje C_0, takže máme rovnici

$$\frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)} = \pi(-1, q^2),$$

a tedy

$$\varphi(q) = \pi(-1, q^2) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \ldots,$$

takže máme konečný výsledek

$$\text{(II)} \quad T(\xi, q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + q^{2n+1}\xi^2)(1 + q^{2n+1}\xi^{-2}),$$

a odtud

$$\text{(II*)} \quad \vartheta(u, \tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + q^{2n+1} e^{2u\pi i})(1 + q^{2n+1} e^{-2u\pi i}),$$

aneb spojímeli vždy dva a dva činitele:

$$\text{(II}^0\text{)} \quad \vartheta(u, \tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + 2q^{2n+1} \cos 2u\pi + q^{4n+2}),$$

z čehož plyne $\vartheta(-u) = \vartheta(u)$, což i přímo z definice snadno se odvodí.

3.

Dosavad jsme uvažovali funkci $\vartheta(u, \tau)$ pouze vzhledem k proměnné u; nyní přihledneme k některým vlastnostem jejím vztahujícím se k změnám parametru τ.

Jeli pomyslná část parametru τ kladná, je též pomyslná část veličiny $-\frac{1}{\tau}$ kladnou, jak z geometrického znázornění přímo vyplývá a snadno se počtem verifikuje; následkem toho existuje funkce $\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$, kterou prozatím znamenejme $\varphi(u)$. Nullová místa této funkce určíme z rovnice

$$\frac{u}{\tau} = \frac{1-\frac{1}{\tau}}{2} + m + n\frac{1}{\tau},$$

z čehož plyne

$$u = \frac{1+\tau}{2} + m\tau + n - 1,$$

t. j. funkce $\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ zmizí na místech shodných s $\frac{1+\tau}{2}$ *modd* $(1, \tau)$, na nichž také mizí funkce $\vartheta(u, \tau)$. Následovně bude podíl

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta(u, \tau)} = h(u)$$

funkce, která se v okolí každého místa v konečnu chová pravidelně a nikde nemizí. Následkem toho bude se funkce $\log h(u)$ chovati v okolí všech míst v konečnu pravidelně, a tedy bude buď stálou, neb celistvou funkcí racionalnou aneb řadou stále konvergentní, kterouž znamenejme $-\bar{g}(u)$. Bude pak $h(u) = e^{-\bar{g}(u)}$, a tedy

$$\vartheta(u, \tau) = e^{\bar{g}(u)}\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\bar{g}(u)}\vartheta\left(-\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

a dosadímeli hodnoty v řadách

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau\nu^2 - 2u\nu)} = e^{\bar{g}(u)} \sum_{\nu} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu^2 + 2\nu u)}$$

$$= e^{g(u)} \sum e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu + u)^2},$$

kde jsme položili

$$g(u) = \bar{g}(u) + \frac{\pi i}{\tau}u^2,$$

což je funkce téhož tvaru jako $\bar{g}(u)$.

Máme tedy

$$(\alpha)\qquad e^{g(u)} = \frac{\vartheta(u,\tau)}{\sum e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu+u)^2}} = \frac{\vartheta(u,\tau)}{e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}\,\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Zvětšímeli u o 1, nezmění se čitatel, jak známo, a jmenovatel rovněž ne, poněvadž se tím hodnota součtu nemění; zvětšímeli však u o τ, obdrží čitatel faktor $e^{-\pi i(2u+\tau)}$, a jmenovatel přejde na

$$\vartheta\left(\frac{u}{\tau}+1, -\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u^2+2u\tau+\tau^2)}$$
$$= \vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}e^{-\pi i(2u+\tau)},$$

takže se změní o týž faktor jako čitatel, a podíl zůstane nezměněn. Představuje nám tedy výraz (α) funkci dvojperiodickou o periodách 1 a τ, která je dána řadou stále konvergentní, věc to nemožná z týchž důvodů, jichž jsme výše užili při výrazu Q. Musí tedy výraz (α) býti nezávislým na u, rovným veličině stálé C, která závisí bezpochyby na parametru τ, t. j. platí vztah

$$(\beta)\qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)} = C\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2},$$

kde C nezávisí na u, ale záviseti může na τ.

Předpokládejme u reálné a integrujme obě strany rovnice (β) dle u v mezích 0 a 1. Obecný člen v levo má tvar $e^{\tau\pi i\nu^2}e^{2\nu u\pi i}$, a poněvadž integrál

$$\int_0^1 e^{2\nu u\pi i}du$$

má hodnotu 0 pro všecka celistvá ν od 0 různá, ale rovná se 1 pro $\nu=0$, bude integrál levé strany rovnati se jednotce, takže máme rovnici

$$1 = C\int_0^1 \sum_\nu e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2}du = C\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2}du$$

$$= C \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{\nu}^{\nu+1} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz,$$

takže máme pro stanovení C rovnici

$$(\gamma) \qquad C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz = 1,$$

kde integrace vztahuje se k realným z. Jeli τ veličina ryze pomyslná a kladná, bude $\frac{i}{\tau}$ realné a kladné, a proto bude substituce

$$-\frac{i}{\tau} z^2 = v^2, \quad z = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, v$$

realnou, t. j. realným z odpovídají realná v. Volímeli za $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ kladnou hodnotu, budou z a v stejného znamení, a integrál náš obdrží tvar

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, c,$$

kde patrně $c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv$ nezávisí na τ, a je čistě numerickou stálou. Z rovnice (γ) máme pak

$$C = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{i}{\tau}}$$

a dosazením do (β) posléz

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau\nu^2 + 2u\nu)} = \frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) \sum e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2},$$

kde $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ značí kladnou hodnotu kořene $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$; poněvadž tu c nezávisí na u ani na τ, obdržíme je volbou zvláštních hodnot, na př. $u = 0$, $\tau = i$. Tím se vyskytne na obou stranách faktor $\Sigma e^{-\pi\nu^2}$ od nully různý, takže jím lze děliti, načež plyne $c = 1$. Máme také jednak vedlejší výsledek

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv = 1,$$

a jednak vzorec

$$\text{(III)} \qquad \vartheta(u, \tau) = \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2} \vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right),$$

jehož platnosť ovšem dokázána pouze pro ryze pomyslná τ. Nebude však nesnadno provésti důkaz i pro ostatní hodnoty τ. Z rovnice poslední plyne

$$(\delta) \qquad \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) = e^{\frac{\pi i}{\tau}u^2} \frac{\vartheta(u, \tau)}{\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Pravá strana je tu analytickou funkcí jednoznačnou proměnné τ, pokud má τ druhou souřadnici kladnou. Znamenámeli pak symbolem $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ onu z obou hodnot odmocniny $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$, jejíž realná část je kladná, bude tento výraz $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ pro uvažovaná τ úplně jednoznačným a spojitým, vyjadřuje hodnoty analytické funkce τ v těchto místech pravidelně se chovající. Výraz tento splývá pro ryze pomyslná τ s výrazem na levé straně rovnice (δ), t. j. dvě analytické funkce proměnné (τ) dané výrazem $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ a pravou stranou rovnice (δ) splývají pro ryze pomyslná τ, a tedy jsou identické. Rovnice (δ) a tedy také (III) platí pro všecka u a pro všecka τ, jichž druhá souřadnice je kladná, máli jen symbol $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ právě uvedený význam.*)

Důležitosť vzorce (III) jeví se zvlášť při číselném stanovení hodnot funkce ϑ, o čemž později.

---

*) Symbol ten zavádím po příkladu svého slavného učitele p. *Kroneckera* (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1880).

4.

Dosadímeli do řady (I) $\tau + 1$ místo τ, obdržíme

$$\vartheta(u, \tau + 1) = \sum_{\nu} e^{\pi i(\tau\nu^2 + 2u\nu) + \nu^2\pi i},$$

a poněvadž
$$e^{\nu^2\pi i} = (-1)^{\nu^2} = (-1)^{\nu} = e^{\nu\pi i},$$

bude

$$\vartheta(u, \tau + 1) = \sum_{\tau} e^{\pi i[\tau\nu^2 + 2(u+\frac{1}{2})\nu]}$$

(IV)
$$= \sum_{\nu} (-1)^{\nu} q^{\nu^2} \xi^{2\nu} = \vartheta(u + \tfrac{1}{2}, \tau),$$

čímž převedeno stanovení funkce ϑ o parametru $(\tau + 1)$ na stanovení funkce ϑ o parametru τ.

Při číselném stanovení funkce ϑ jedná se o to, aby veličina $q = e^{\tau\pi i}$ byla pokud možno malá, tedy druhá souřadnice parametru τ pokud možno veliká. Jeli realná část veličiny τ absolutně větší než $\frac{1}{2}$, můžeme ji uvésti na tvar $m + \alpha$, kde α jest absolutně menší než $\frac{1}{2}$, a m je číslo celistvé.

Substituce $\tau = \tau' + m$ vyvolá τ', jehož realná část jest α, a transformační vzorec (IV) poskytne funkci

$$\vartheta(u, \tau) = \vartheta\left(u + \frac{m}{2}, \tau'\right)$$

o parametru τ'. Jeli pak τ' absolutně větší než 1, můžeme užiti vzorce (III), čímž obdržíme funkci o parametru $-\dfrac{1}{\tau'}$, jehož druhá souřadnice je větší atd.

Transformace vyjádřená vzorcem (IV) vedla nás k utvoření funkce $\vartheta(u + \frac{1}{2})$; nyní vyšetříme výrazy funkcí

$$\vartheta\left(u + \frac{\tau}{2}, \tau\right), \quad \vartheta\left(u + \frac{1+\tau}{2}, \tau\right).$$

Zavedemeli $u + \dfrac{\tau}{2}$ místo u do řady (I), obdržíme

$$\vartheta\left(u + \frac{\tau}{2}\right) = \sum_{\nu} e^{\pi i[\tau(\nu^2 + \nu) + 2u\nu]}$$

$$= \sum_{\nu} e^{\pi i[\tau(\nu + \frac{1}{2})^2 + 2u(\nu + \frac{1}{2})] - \pi i(u + \frac{1}{4}\tau)},$$

takže máme řadu

$$(\alpha)\qquad e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu=-}^{\infty}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})u]}$$
$$=\sum q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}.$$

Zavedemeli pak $u+\frac{1+\tau}{2}$ do téže řady, obdržíme

$$\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau(\nu^2+\nu)+2(u+\frac{1}{2})\nu]}$$
$$=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau(\nu+\frac{1}{2})^2+2(u+\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})]-\pi i(u+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\tau)},$$

a tedy

$$ie^{(u+\frac{1}{4}\tau)\pi i}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i[\tau(\nu+\frac{1}{2})^2+2(u+\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})]}$$
$$=i\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu}q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}.$$

Spojíme-li v řadách pro $\vartheta(u)$ a $\vartheta(u+\frac{1}{2})$ členy odpovídající hodnotám $\nu=n$, $-n$, a v řadách pro funkce

$$e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau),\quad ie^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})\tau).$$

členy příslušné k hodnotám $\nu=n$, $-n-1$, obdržíme následující soustavu vzorců:

$$(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned}
&\vartheta(u,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\tau\nu^2+2\nu u)}=\sum_{\nu}q^{\nu^2}\xi^{2\nu}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi u,\\
&\vartheta(u+\tfrac{1}{2},\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau\nu^2+2\nu(u+\frac{1}{2})]}=\sum_{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu^2}\xi^{2\nu}\\
&\qquad\qquad=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}\cos 2n\pi u,\\
&e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})u]}\\
&\qquad=\sum_{\nu}q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi u,\\
&-ie^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=-\sum_{\nu}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})(u+\frac{1}{2})]}
\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned}
&= -i\sum_{\nu}(-1)^{\nu}q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\sin(2n+1)\pi u
\end{aligned}\right.
$$

Tyto čtyry funkce dají se shrnouti ve společný tvar

$$
(\mathrm{VI})\qquad \vartheta_{gh}(u,\tau) = (-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2}g)^2\tau + 2(\nu+\frac{1}{2}g)(u+\frac{1}{2}h)]},
$$

kde g, h značí jednu z hodnot 0, 1, a sice jsou funkce (V) patrně

$$\vartheta_{00}(u) = \vartheta(u)$$

$$\vartheta_{01}(u) = \vartheta(u+\tfrac{1}{2})$$

$$\vartheta_{10}(u) = e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau)$$

$$\vartheta_{11}(u) = -ie^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau)$$

Přípona (g, h) sluje *známkou* či *charakteristikou* funkce ϑ_{gh}, i považujeme dvě charakteristiky (g, h), (g', h') za *shodné* (kongruentní), jsouli oba rozdíly $(g-g', h-h')$ čísla sudá, takže existují pouze čtyry neshodné známky: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1); známky mohou se také značiti jedním písmenem. Součtem dvou známek $\varepsilon = (g, h)$, $\varepsilon' = (g', h')$ rozumíme známku $\varepsilon + \varepsilon' = (g+g', h+h')$. Pak bude součet dvou známek shodným s jich rozdílem, sudý násobek každé známky je shodný se známkou (0, 0).

Z řady (VI) plyne:

$$\vartheta_{g+2,h}(u) = \vartheta_{g,h}(u)$$

$$\vartheta_{g,h+2}(u) = (-1)^{g}\vartheta_{g,h}(u),$$

takže funkce mající shodné známky se mohou lišiti pouze znamením.

Zároveň obdržíme z řady (VI):

$$
\vartheta_{gh}(u) = (-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\nu^2\tau + 2\nu(u+\frac{1}{2}g\tau+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{4}g^2\tau+gu+\frac{1}{2}gh]},
$$

t. j.

$$
(\mathrm{VII})\qquad \vartheta_{gh}(u) = (-i)^{gh}e^{g(u+\frac{1}{4}g\tau)\pi i}\vartheta_{00}(u+\tfrac{1}{2}g\tau+\tfrac{1}{2}h)
$$

Z rovnice této plyne, že místa nullová funkce $\vartheta_{gh}(u)$ jsou modd $(1, \tau)$ shodna s místem

$$\frac{(1-g)\tau+(1-h)}{2} \equiv \frac{(g-1)\tau+(h-1)}{2},$$

a zároveň obdržíme z ní hodnotu funkce

$$\vartheta_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h')$$
$$= (-i)^{gh} e^{g(u + \frac{1}{2}g'\tau + \frac{1}{2}h' + \frac{1}{4}g\tau)\pi i} \vartheta_{00}\left(u + \tfrac{1}{2}(g + g')\tau + \tfrac{1}{2}(h + h')\right)$$

a po krátké redukci

(VIII)
$$\vartheta_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h')$$
$$= (-1)^{gh} i^{g'(h + h')} e^{-g'(u + \frac{1}{4}g'\tau)\pi i} \vartheta_{g+g',\, h+h'}(u)$$

Zároveň bychom obdrželi z rovnice (VII) výrazy pro $\vartheta_{gh}(u + 1)$, $\vartheta_{gh}(u + \tau)$, které ale raději odvodíme přímo z řady (VI). Vzroste-li tam u o 1, obdrží exponent obecného členu přírůstek $(2\nu + g)\pi i$, takže se tím člen sám znásobí veličinou $e^{(2\nu + g)\pi i} = (-1)^g$, která nezávisí na ν a přichází ve všech členech, čímž vznikne

$$\vartheta_{gh}(u + 1) = (-1)^g \vartheta_{gh}(u).$$

Píšemeli pak v řadě (VI) $\nu = \mu + 1$, obdrží exponent obecného členu hodnotu

$$\pi i \left[\left(\mu + 1 + \frac{g}{2}\right)^2 \tau + 2\left(\mu + 1 + \frac{g}{2}\right)\left(u + \frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= \pi i \left[\left(\mu + \frac{g}{2}\right)^2 \tau + 2\left(\mu + \frac{g}{2}\right)\left(u + \tau + \frac{h}{2}\right)\right] + \pi i(\tau + 2u + h)$$

a řada bude míti tvar

$$\vartheta_{gh}(u) = e^{\pi i(2u+\tau+h)} . (-1) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[(\mu + \frac{1}{2}g)^2\tau + 2(\mu + \frac{1}{2}g)(u + \tau + \frac{1}{2}h)]}$$
$$= (-1)^h e^{\pi i(2u + \tau)} \vartheta_{gh}(u + \tau),$$

takže máme vzorce:

(IX)
$$\vartheta_{gh}(u + 1) = (-1)^g \vartheta_{gh}(u)$$
$$\vartheta_{gh}(u + \tau) = (-1)^h e^{-\pi i(2u + \tau)} \vartheta_{gh}(u).$$

Ze vzorců (II) a (VII) odvodíme snadno nekonečné součiny pro funkce ϑ_{gh}. Bude tu

$$(X)\begin{cases}\vartheta_{01}(u)=\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+1}\xi^2)(1-q^{2n+1}\xi^{-2}) \\ \qquad =\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1-2q^{2n+1}\cos 2\pi u+q^{4n+2}) \\ \vartheta_{10}(u)=\sqrt[4]{q}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\xi^2)(1+q^{2n}\xi^{-2}) \\ \qquad =2\sqrt[4]{q}.\cos\pi u.\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}) \\ \vartheta_{11}(u)=-i.\sqrt[4]{q}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\xi^2)(1-q^{2n}\xi^{-2}) \\ \qquad =2\sqrt[4]{q}\sin\pi u\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}),\end{cases}$$

kde jako dříve položeno $\xi=e^{u\pi i}$, $q=e^{\tau\pi i}$, a čtvrtá odmocnina $\sqrt[4]{q}$ značí $e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$, čímž je úplně určena.

5.

Druhá logarithmická derivace funkce $\vartheta_{gh}(u,\tau)$, t. j. funkce

$$\frac{d^2 lg\vartheta_{gh}(u,\tau)}{du^2}$$

jest jednoznačná funkce proměnné u, která se pouze v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$ stává nekonečnou, a v ostatních bodech se chová pravidelně. Jeli pak $u_0=\frac{(g-1)\tau+(h-1)}{2}$ nullové místo funkce $\vartheta_{gh}(u)$, bude v něm funkce tato mizeti pouze jednoduše, jak ze vzorců (II) a (X) bezprostředně vyplývá, a bude tedy v okolí tohoto místa míti tvar

$$(u-u_0)\,\mathfrak{P}(u-u_0),$$

kde $\mathfrak{P}\,(u-u_0)$ značí řadu mocninovou tvaru

$$c_0+c_1(u-u_0)+c_2(u-u_0)^2+\ldots\ldots,$$

a při tom jest $\mathfrak{P}(0)=c_0$ od nully různo.

Logarithmická derivace $\frac{\vartheta'_{gh}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$ bude tedy v okolí bodu $u=u_0$ tvaru

$$\frac{1}{u-u_0}+\frac{\mathfrak{P}'(u-u_0)}{\mathfrak{P}(u-u_0)}=\frac{1}{u-u_0}+\bar{\bar{\mathfrak{P}}}(u-u_0)$$

a druhá derivace logarithmická tedy tvaru

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u,\tau)}{du^2}=-\frac{1}{(u-u_0)^2}+\mathfrak{P}_0(u-u_0),$$

z čehož soudíme, že má funkce tato v místě $u=u_0$ nekonečno druhého stupně.

Jelikož jedna z funkcí $\vartheta_{gh}(u)$, $\vartheta'_{gh}(u)$ je vždy sudou, druhá pak lichou, bude jich podíl $\frac{\vartheta'_{gh}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$ funkcí lichou, a jeho derivace (1) tedy sudou funkcí proměnné u.

Zároveň patrno z rovnic (IX), že tu platí:

$$\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u+1)}{du^2}=\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2}$$

$$\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u+\tau)}{du^2}=\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2}$$

Zavedemeli tedy označení

$$\text{(2)} \qquad P_{gh}(u\,|\,\tau)=-\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2},$$

bude $P_{gh}(u)$ sudá jednoznačná analytická funkce proměnné u, která jest v okolí nullových míst $u_0=\frac{(g-1)\tau+h-1}{2}$ funkce $\vartheta_{gh}(u)$ tvaru

$$\frac{1}{(u-u_0)^2}+\mathfrak{P}(u-u_0),$$

a v okolí všech ostatních míst v konečnu se pravidelně chová, a která má vlastnosť dvojnásobné periodicity vyjádřenou rovnicemi

$$P_{gh}(u+1)=P_{gh}(u+\tau)=P_{gh}(u),$$

z nichž plyne bezprostředně rovnice obecnější

$$P_{gh}(u+m+n\tau)=P_{gh}(u),$$

kde m, n značí dvě celistvá čísla kladná neb záporná, takže má funkce tato v místech shodných, znázorněných stejnolehlými body rovnoběžníků sítě výše sestrojené stejnou hodnotu.

Ze vzorce (VIII) obdržíme pak bezprostředně

(3) $$P_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h') = P_{g+g', h+h'}(u)$$

Zavedemeli označení $P_{gh}(o) = a_{gh}$, bude tu patrně dle vzorce (3):

(4) $$\begin{aligned} P_{00}(0) &= P_{01}(\tfrac{1}{2}) = P_{10}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{11}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{00} \\ P_{01}(0) &= P_{00}(\tfrac{1}{2}) = P_{11}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{10}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{01} \\ P_{10}(0) &= P_{11}(\tfrac{1}{2}) = P_{00}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{01}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{10} \\ P_{11}(0) &= P_{10}(\tfrac{1}{2}) = P_{01}\left(\frac{\tau}{1}\right) = P_{00}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = \infty, \end{aligned}$$

a obecně tu máme

(4ª) $$a_{gh} = P_{g'h'}\left(\frac{g+g'}{2}\tau + \frac{h+h'}{2}\right)$$

Studujme nyní funkce

(α) $$P_{gh}(u) - a_{g'h'}, \ .$$

kde (g', h') jest jedna ze sudých známek $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$.

Funkce (α) patrně zmizí na místech shodných s místem

$$\frac{(g+g')\tau + h + h'}{2},$$

kteráž jsou shodna se svými protivnými hodnotami; neboť tam jest dle (4ª) $P_{gh}(u) = a_{g'h'}$.

Ukážeme, že na týchž místech mizí také prvá derivace funkce (α), t. j. funkce $P'_{gh}(u)$. Neb ana je $P_{gh}(u)$ funkce sudá, je $P'_{gh}(u)$ funkcí lichou, a jsouc zároveň dvojperiodickou, má vlastnosť

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2} + v\right) = P'_{gh}\left(v - \frac{\omega}{2}\right) = -P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2} - v\right),$$

kde $\omega = m\tau + n$ značí jednu z period. Jsouli m a n tak volena, že $P_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ není $= \infty$, t. j. nenili $(m, n) \equiv (g, h) + (1, 1)$, bude lze klásti $v = o$, čímž vznikne

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right)=-P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

tedy

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right)=0,$$

kde ω značí jednu z veličin $g''\tau+h''$, pro něž je známka (g'', h'') $+(g, h)$ shodna s jednou ze tří sudých známek $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. Pro funkci $P'_{gh}(u)$ tedy známe tři neshodná místa nullová, jsou to právě ona místa, na nichž zmizí funkce (α), t. j.

$$P_{gh}(u)-a_{g'h'}.$$

Z toho plyne, že na místech řečených mizí funkce (α) ve stupni nejméně druhém, ana by jinak derivace její $P'_{gh}(u)$ měla tam hodnotu od nully různou.

Funkce (α) má však v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$ nekonečna stupně druhého, a proto bude přirozeno porovnati ji s funkcí

$$\varphi(u)=\frac{\vartheta_{g''h''}(u)^2}{\vartheta_{gh}(u)^2},\ \text{kde}\ (g'', h'')\equiv(g, h)+(g', h')+(1, 1),$$

která nezmizí ani nevzroste do nekonečna na žádných jiných místech nežli funkce (α), a to ve stupni zajisté nikoli větším.

Z rovnic (IX) plyne ihned, že tato funkce $\varphi(u)$ má periody $(1, \tau)$, t. j. že platí

$$\varphi(u+1)=\varphi(u+\tau)=\varphi(u).$$

Avšak funkce (α) má tytéž periody a podíl

$$\frac{P_{gh}(u)-a_{g'h'}}{\varphi(u)}$$

je ve všech konečných místech u pravidelným, ana jsou místa nullová jmenovatele mezi místy nullovými čitatele obsažena, a nekonečna společna, a to po obékráte polohou i stupněm.

Jest tudíž podíl tento funkcí dvojperiodickou stále konečnou a proto veličinou stálou, takže obdržíme

$$(\beta)\qquad P_{gh}(u)-a_{g'h'}=\left(C\,\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}\right)^2,$$

Z rovnice této plyne, že odmocnina

$$(\beta^0) \qquad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{g'h'}} = C\,\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)},$$

$$[g'' \equiv g+g'+1,\ h'' \equiv h+h'+1 \pmod 2],$$

jest jednoznačnou funkcí proměnné u.

Volme z obou hodnot odmocniny onu, jejíž rozvoj dle mocností $(u-u_0)$, kde $u_0 = \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}$, začíná členem $\frac{1}{u-u_0}$, čímž pak je znamení odmocniny (β^0) úplně určeno, postrádajíc dvojznačnosti analytické.

Abychom určili stálou C, rozviňme pravou stranu rovnice (β^0) dle mocností $(u-u_0)$. Člen začáteční bude patrně

$$C\,.\,\frac{\vartheta_{g''h''}\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right)}{\vartheta'_{gh}\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right)}\,.\,\frac{1}{u-u_0}$$

A tu jest patrně dle vzorce (VIII):

$$\vartheta_{g''h''}\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right)$$

$$= (-1)^{g''(1-h)}i^{(1-g)(h''+1-h)}e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h}(0),$$

$$\vartheta_{gh}\left(u+\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right) = (-1)^{g(1-h)}i^{1-g}e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\vartheta_{11}(u)$$

a odtud dělením na u pro $u=0$:

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right) = (-1)^{g(1-h)}i^{1-g}e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\vartheta'_{11}(0),$$

a tedy je součinitel členu začátečního dán výrazem

$$C\,.\,(-1)^{(g''-g)(1-h)}i^{(1-g)(h''-h)}\,.\,\frac{\vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h}(0)}{\vartheta'_{11}(0)}$$

Avšak

$$g'' \equiv g+g'+1,\ h''-h \equiv h'+1 \pmod 2)$$

$$g''+1-g \equiv g',\ h''+1-h \equiv h',$$

$$\vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h} = \vartheta_{g',\,h''+1-h} = (-1)^{\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}\vartheta_{g'h'},$$

a proto bude tento koefficient vyjádřen tvarem

$$C\,(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}\,i^{(1-g)(h''-h)}\,\frac{\vartheta_{g'h'}(0)}{\vartheta'_{11}(0)},$$

a poněvadž musí býti roven 1, máli obstáti rovnosť (β^0), musí

$$C=(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}\,i^{(g-1)(h''-h)}\,\frac{\vartheta'_{11}(0)}{\vartheta_{g'h'}(0)},$$

a rovnice (β^0) obdrží tvar

$$(5)\qquad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{g'h'}}=$$

$$(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}\,i^{(g-1)(h''-h)}\,\frac{\vartheta'_{11}(0)}{\vartheta_{g'h'}(0)}\cdot\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$$

$$g''\equiv g+g'+1,\; h''\equiv h+h'+1 \pmod 2.$$

Funkce (5) jest jednoznačnou analytickou funkcí proměnné u, která má v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$, jež jsou, jak známo, modulis $(1,\tau)$ shodna s $\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right)$, nekonečna stupně prvního, a je dvojperiodická o periodách $(2-g')$, $(2-h')\,\tau$, předpokládaje, že g', h' mají jednu z hodnot 0, 1.

Neboť zvětšímeli na pravé straně rovnice (5) u o 1, obdrží čitatel faktor $(-1)^{g''}$, jmenovatel $(-1)^{g}$, tedy celý zlomek objeví se znásoben hodnotou $(-1)^{g''-g}=(-1)^{g'+1}$; jeli $g'=1$, je tento výraz roven 1, a funkce má periodu 1; jeli $g'=0$, objeví se funkce znásobena hodnotou (-1), t. j. změní znamení; vzrosteli pak u opět o 1, vrátí se funkce do původní hodnoty, a má periodu 2; v obou případech je tedy perioda rovna $(2-g')$.

Vzrosteli nyní u o τ, obdrží funkce faktor $(-1)^{h''-h}=(-1)^{h'+1}$; jeli $h'=1$, zůstala funkce nezměněna a má tedy periodu τ, a jeli $h'=0$, změnila funkce označení, a má tedy periodu 2τ; v obou případech je tedy perioda ta $(2-h')\,\tau$. —

Shledali jsme, že $P_{gh}(u)$ je dvojperiodickou funkcí o periodách $(1,\tau)$ proměnné u, která má v okolí nullových míst u_0 funkce ϑ_{gh} tvar $-\frac{2}{(u-u_0)^3}+\mathfrak{P}(u-u_0)$, a která zmizí na místech, na nichž mizí tři funkce (5), t. j. funkce

$$\sqrt{P_{gh}(u)-a_{00}},\quad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{01}},\quad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{10}},$$

jichž místa nullová jsou různa. Nekonečna těchto tří funkcí jsou nullová místa funkce $\vartheta_{gh}(u)$ a sice jsou jednoduchá. Proto bude funkce

$$\varphi(u) = \sqrt{P_{gh} - a_{00}}\,\sqrt{P_{gh} - a_{01}}\,.\,\sqrt{P_{gh} - a_{10}}$$

míti s funkcí $P'_{gh}(u)$ společná nekonečna, a všecka její místa nullová jsou zároveň místy nullovými funkce $P'(u)$. Zvětšímeli u o 1, změní první dva činitelé znamení, třetí zůstane nezměněn, a tedy též celý součin se tím nemění, takže jest $\varphi(u+1) = \varphi(u)$. Zvětšímeli u o τ, zůstane prostřední faktor nezměněn, oba krajní změní znamení, a bude opět $\varphi(u+\tau) = \varphi(u)$. Funkce $\varphi(u)$ má tedy tytéž periody jako $P'(u)$, a podíl

$$\frac{P'_{gh}(u)}{\varphi(u)}$$

chová se v okolí všech konečných míst pravidelně, a je funkcí dvojperiodickou, což vyžaduje, aby byl veličinou stálou: Tudíž bude

$$P'_{gh}(u) = C\sqrt{P_{gh}(u) - a_{00}}\,\sqrt{P_{gh}(u) - a_{01}}\,\sqrt{P_{gh}(u) - a_{10}}$$

Je-li u_0 nullové místo funkce ϑ_{gh}, začíná rozvoj dle mocností rozdílu $(u - u_0)$ v levo členem $-\frac{2}{(u-u_0)^3}$, v pravo každý činitel členem $\frac{1}{u-u_0}$, a tedy bude nutně $C = -2$, takže máme posléz důležitý vztah

$$P'_{gh}(u) = -2\sqrt{P_{gh}(u) - a_{00}}\,\sqrt{P_{gh}(u) - a_{01}}\,\sqrt{P_{gh}(u) - a_{10}} \tag{6}$$

Znamenáme-li tedy

$$P_{gh}(u) = x,$$

hoví tato funkce rovnici differencialné

$$\frac{dx}{du} = -2\sqrt{(x - a_{00})(x - a_{01})(x - a_{10})}, \tag{6^0}$$

v níž bylo znamení odmocniny náležitě voleno. Je-li tu $g = h = 1$, je funkce x v okolí bodu $u = 0$ tvaru $x = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$, ana jakožto sudá funkce obsahovati může pouze sudé mocniny proměnné. Odtud plyne

$$\frac{1}{x} = \frac{u^2}{1 + u^2\mathfrak{P}(u^2)} = u^2 + u^4\overline{\mathfrak{P}}(u^2),\ \frac{1}{\sqrt{x}} = u + c_1u^3 + c_2u^5 + \ldots,$$

z čehož se obdrží na základě známé poučky z theorie řad mocninových rozvoj tvaru

$$u = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad \mathfrak{P}(0) = 0, \text{ konvergentní v jistém okolí bodu } x = \infty.$$

Touto řadou je stanovena určitá analytická funkce u proměnné x, která je pro nekonečně veliká x nekonečně malou, ačkoli dvojznačnou. Je patrno, že tato funkce hoví rovnici (6^0) aneb lépe rovnici differencialné

$$(6^*) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}},$$

která ji úplně definuje, připojíme-li podmínku, že pro nekonečně veliká x má u míti nekonečně malé hodnoty. Tuto funkci u označíme symbolem

$$(7^0) \qquad u = \int\limits_{\infty} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}}, \qquad x = P_{11}(u),$$

čímž nic jiného nemá býti vyjádřeno, nežli že derivace $\frac{du}{dx}$ rovná se pravé straně rovnice (6^*), a že pro $x = \infty$ jest $u = o$.

V ostatních případech, kdy (g, h) jest jednou ze sudých známek (0,0), (0,1), (1,0), chová se funkce x v okolí místa $u = o$ pravidelně a jest jakožto sudá funkce tvaru

$$x = c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

z čehož plyne pro dosti malá u:

$$\sqrt{x - c_0} = \sqrt{c_1} \,.\, u \; (1 + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^4 + \ldots)$$

a odtud

$$u = \mathfrak{P}(\sqrt{x - c_0}), \quad \mathfrak{P}(0) = 0, \quad c_0 = P_{gh}(0) = a_{gh},$$

čímž jest u definováno jako analytická funkce proměnné x, která je nekonečně malá a dvojznačná v okolí bodu $x = a_{gh}$. I je patrno, že tato funkce hoví differencialné rovnici (6^*), která ji úplně definuje, připojíme-li podmínku, že funkce ta v bodě $x = a_{gh}$ zmizí; označíme ji symbolem

$$(7) \qquad u = \int\limits_{a_{gh}} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}}, \qquad x = P_{gh}(u).$$

kterým nic jiného nemá vyjádřeno býti, než posledně řečené vlastnosti funkce u. Vzorec tento zahrnuje v sobě vzorec (7^0), umluvíme-li se psáti $a_{11} = \infty$.

6.

Zabývejme se nyní differencialnou rovnicí

$$(\alpha) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{-2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

Položíme-li

$$(\beta) \qquad x = a + (b-a)z,$$

bude jednak

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} x - a = (b-a)z \\ x - b = (a-b)(1-z) \\ x - c = (a-c)\left(1 - \dfrac{a-b}{a-c}z\right) \end{cases}$$

a jednak

$$\frac{dx}{dz} = b - a,$$

takže obdržíme rovnici

$$(\delta) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{c-a}\,.\,\sqrt{z(1-z)(1-\mu z)}},$$

kde

$$(\varepsilon) \qquad \mu = \frac{a-b}{a-c}.$$

Rovnice (α) přejde v rovnici (6^*), volíme-li na př.

$$a = a_{01},\ b = a_{00},\ c = a_{10},$$

tak že substitucí

$$(8) \qquad x = a_{01} + (a_{00} - a_{01})z,\ \mu = \frac{a_{01} - a_{00}}{a_{01} - a_{10}}$$

obdrží rovnice (6^*) tvar

$$(9) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{a_{10} - a_{01}}\,.\,\sqrt{z(1-z)(1-\mu z)}}$$

kde o znamení odmocniny příležitostně rozhodneme.

Především uvažme, že $x = P_{gk}(u)$ a tedy též z je zcela určitá funkce proměnné u, a že odmocniny $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z}$, $\sqrt{1-\mu z}$ mají zcela určitou hodnotu, jsouce [srov. vzorce (γ)] jednoznačnými funkcemi proměnné u, a rovněž odmocnina $\sqrt{a_{10}-a_{01}}$ má hodnotu jednoznačně definovanou, ana jest jen zvláštní hodnotou jednoznačné funkce $\sqrt{P_{10}-a_{01}}$. Abychom tyto funkce vyjádřili funkcemi ϑ, uvažme, že z (γ) plyne v našem případě:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x-a_{01}}{a_{00}-a_{01}}}$$

$$\sqrt{1-z} = \sqrt{\frac{x-a_{00}}{a_{01}-a_{00}}}$$

$$\sqrt{1-\mu z} = \sqrt{\frac{x-a_{10}}{a_{01}-a_{10}}}$$

Uvažujme nyní případ, kde $x = P_{01}(u)$. Tu obdržíme použitím pouze rovnice (5):

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{z} &= -\frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)} \\ \sqrt{1-z} &= \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{10}(u)}{\vartheta_{01}(u)} \\ \sqrt{1-\mu z} &= \frac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} \cdot \frac{\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)}, \end{aligned} \right.$$

kde užito označení $\vartheta_{gk} = \vartheta_{gk}(o,\tau)$.

Při tom je patrno, že znamení odmocnin jsou tu tak stanovena, že pro $u = 0$, t. j. pro $z = 0$ jest $\sqrt{1-z} = 1$, $\sqrt{1-\mu z} = 1$. Z téhož vzorce (5) plyne pro $a_{10} = P_{10}(o)$:

$$\sqrt{a_{10}-a_{01}} = -\frac{\vartheta'_{11} \cdot \vartheta_{00}}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{10}}, \qquad \vartheta'_{11} = \vartheta'_{11}(o,\tau)$$

a rovněž i

$$\sqrt{\mu} = k = \sqrt{\frac{a_{00}-a_{01}}{a_{10}-a_{01}}} = \left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}\right)^2.$$

Nalezlo se, že veličina ϑ'_{11} se dá jednoduše vyjádřiti součinem funkcí ϑ_{gk}; skutečně obdržíme z poslední z rovnic (X), dělíme-li ji na u a přejdeme-li k mezím pro $u = 0$:

$$(\alpha')\qquad \vartheta'_{11}(o) = 2\pi\sqrt[4]{q}\,\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3.$$

Násobíme-li výrazy plynoucí z (*X*) a (*II*) pro $u = o$, máme

$$(\beta')\ \vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3 . \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n-1})^2.$$

Znamenáme-li

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) = h_{00},\ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) = h_{01}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = h_{10},\ \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = h_{11},$$

obdržíme patrně

$$\begin{aligned} h_{00}h_{01} \,.\, h_{10}h_{11} &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})(1-q^{4n}) \\ &= (1-q^2(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14})\ldots\ldots \\ &\times(1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16})\ldots\ldots \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = h_{11}, \end{aligned}$$

tedy

$$h_{00}h_{01}h_{10} = 1,$$

a proto bude dle (β'):

$$\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3$$

a porovnáme-li s (α'),

$$(11)\qquad \vartheta'_{11} = \pi\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10},$$

takže vznikne ze vzorce pro $\sqrt{a_{10}-a_{01}}$:

$$(12)\qquad \sqrt{a_{10}-a_{01}} = -\pi\vartheta^2_{00},$$

při čemž napišme ještě hořejší výsledek

$$(13)\qquad \sqrt{k} = \sqrt[4]{\mu} = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}$$

Abychom definitivně rozhodli o znamení pravé strany v (9), uvažme, že tu platí

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{a_{00} - a_{01}} \frac{dx}{du},$$

a že

$$a_{00} - a_{01} = \frac{\vartheta'^2_{11}}{\vartheta^2_{01}} \cdot \frac{\vartheta^2_{10}}{\vartheta^2_{00}} = \pi^2 \vartheta^4_{10},$$

takže bude

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\pi^2 \vartheta^4_{10}} \cdot \frac{dx}{du};$$

jelikož tu funkce $\frac{dx}{du}$ rozvinuta dle mocností $(u - u_0)$ pro $u_0 = \frac{\tau}{2}$ začíná členem $-\frac{2}{(u-u_0)^3}$, začíná týž rozvoj funkce $\frac{dz}{du}$ členem

$$-\frac{2}{\pi^2 \vartheta^4_{10}} \frac{1}{(u-u_0)^3}.$$

Tato funkce může se dle (9) ale pouze znamením lišiti od součinu

$$2\sqrt{a_{10} - a_{01}} \,.\, \sqrt{z(1-z)(1-\mu z)} = 2\pi \frac{\vartheta^2_{00}\vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{11}(u)\vartheta_{10}(u)\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)^3},$$

jenž začíná při témž rozvoji výrazem $\frac{1}{(u-u_0)^3}$ násobeným koefficientem

$$2\pi \frac{\vartheta^2_{00}\vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_{10}\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_{00}\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta'_{01}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3} = -2\pi \frac{\vartheta^2_{00}\vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}}{\vartheta'^2_{11}} = -\frac{2}{\pi^2 \vartheta^4_{10}},$$

první členy obou řad se tedy shodují, a proto jsou řady — nemohouce býti znamení protivných — sobě rovny. Bude tudíž

$$(9^0) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{a_{10} - a_{01}}} \frac{1}{\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}.$$

Znamenáme-li, jakož zvykem,

$$-\sqrt{a_{10} - a_{01}} = \pi \vartheta^2_{00} = 2K,$$

bude

$$(9^*) \qquad 2Ku = \int_0 \frac{dz}{-2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$$

Zavedeme-li nyní funkci

$$s = -\sqrt{z} = \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)},$$

bude

$$2Ku = v = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2 s^2)}}, \tag{10*}$$

při čemž je počáteční hodnota odmocniny rovna 1.

Sečteme-li čtverce prvých dvou z rovnic (10), a přičteme-li ku čtvercované třetí z nich μ-násobný čtverec prvé, majíce zřetel k rovnici (13), obdržíme důležité vztahy mezi čtverci funkcí ϑ, a sice:

$$\left\{\begin{array}{l} \vartheta_{00}^2 \vartheta_{11}(u)^2 + \vartheta_{01}^2 \vartheta_{10}(u)^2 = \vartheta_{10}^2 \vartheta_{01}(u)^2 \\ \vartheta_{10}^2 \vartheta_{11}(u)^2 + \vartheta_{01}^2 \vartheta_{00}(u)^2 = \vartheta_{00}^2 \vartheta_{01}(u)^2, \end{array}\right. \tag{14}$$

jež se obyčejně přímo dokazují způsobem, kterýž vyložiti nám bude možno teprvé později.

7.

Veličiny a_{00}, a_{01}, a_{10} jsou funkce jediného parametru τ, a proto bude jediná z nich neodvislou. Zavedeme-li však veličiny ω, ω' tak aby $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, bude funkce

$$-\frac{d^2}{du^2} \log \vartheta_{gh}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{\omega'}{\omega}\right) = \wp_{gh}(u|\omega, \omega')$$

totožna s funkcí

$$\frac{1}{\omega^2} P_{gh}\left(\frac{u}{\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right),$$

která má tu vlastnost, že obdrží v bodech u', pro něž

$$\frac{u'}{\omega} = \frac{u}{\omega} + m + n\tau$$

tutéž hodnotu jako v bodě u, nechť jsou m, n libovolná čísla celistvá. Poněvadž tu bude zároveň

$$u' = u + m\omega + n\omega',$$

je patrno, že platí vztah

$$\wp_{gh}(u+m\omega+n\omega'|\omega,\omega')=\wp^{gh}(u|\omega,\omega'),$$

t. j. $\wp_{gh}(u)$ jsou funkce o periodách ω, ω'.

Znamenáme-li pak

$$\wp_{gh}(o|\omega,\omega')=\frac{1}{\omega^2}P_{gh}\left(o\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)=\frac{1}{\omega^2}a_{gh}=e_{gh},$$

bude se funkce

$$(\alpha)\qquad \sqrt{\wp_{gh}(u|\omega,\omega')-e_{g'h'}}$$

od funkce $\frac{1}{\omega}\sqrt{P_{gh}\left(\frac{u}{\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)-a_{g'h'}}$ lišiti nanejvýš znamením, a bude jí rovna, umluvíme-li se přikládati odmocnině (α) onu hodnotu, jejíž rozvoj dle mocností $(u-u_0)$ pro $u_0=\frac{1-g}{2}\omega'+\frac{1-h}{2}\omega$ začíná členem $\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\frac{u}{\omega}-\frac{u_0}{\omega}}=\frac{1}{u-u_0}$.

Za touto supposicí obdržíme pak z rovnice (6) vztah

$$(\mathfrak{A})\quad \wp'_{gh}(u|\omega,\omega')=-2\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{00}}\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{01}}\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{10}},$$

a funkce $\wp_{gh}(u)=x$ hoví tedy rovnici differencialné

$$(\mathfrak{A}^0)\qquad \frac{dx}{du}=-2\sqrt{(x-e_{00})(x-e_{01})(x-e_{10})},\qquad x=\wp_{gh}(u),$$

kde veličiny e_{gh} jsou funkce dvou neodvislých proměnných ω, ω', takže vládne jimi jediný vztah.

Netřeba tu zvlášť vykládati, že z rovnice ($\mathfrak{A}^0$) plyne analogickými úvahami, jimiž jsme odvodili vzorec (7), následující rovnice:

$$(\mathfrak{A}^*)\qquad u=\int_{e_{gh}}\frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_{00})(x-e_{01})(x-e_{10})}},\qquad x=\wp_{gh}(u)$$

platící i pro $g=h=1$, umluvímeli se psáti $e_{11}=\infty$.

Veličiny e_{gh} jsou toho způsobu, že jsouli dvě dány, je již tím třetí určena, předpokládaje, že periody ω,ω' předepsány nejsou.

Jeli α veličina nezávislá na u, bude funkce

$$(\mathfrak{B})\qquad y=\wp_{gh}(u)+\alpha,$$

ano tu

$$\frac{dy}{du} = \wp'_{gh}(u),$$

hověti rovnici

$$(\mathfrak{B}^*) \qquad u = \int\limits_{c_{gh}} \frac{dy}{-2\sqrt{(y-c_{00})(y-c_{01})(y-c_{10})}},$$

znamenámeli

$$c_{gh} = e_{gh} + \alpha.$$

Veličiny c_{gh} jeví se při neurčitém α, ω, ω' býti neodvislými vespolek, takže můžeme je přímo voliti, obecně snad pouze v jistých mezích libovolně, a pak z nich určiti veličiny α, ω, ω'.

Je tedy otázka, jeli lze a za jakých podmínek stanoviti veličiny α, ω, ω' z předepsaných hodnot c_{gh}, tak aby funkce ($\mathfrak{B}$) hověla rovnici ($\mathfrak{B}^*$). Odpověď záleží v podrobném studiu funkce u proměnné y definované rovnicí ($\mathfrak{B}^*$), a funkce obrácené, aneb, což totéž jest, v integrování rovnice differencialné

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \frac{dy}{du} = -2\sqrt{(y-c_{00})(y-c_{01})(y-c_{10})}.$$

Dříve než k řešení této otázky přikročíme, pokusíme se o typické vyjádření funkcí $P_{gh}(u)$. Poslední z rovnic (X) poskytne, dvakrát logarithmicky differencována, patrně

$$\frac{d^2}{du^2} lg\,\vartheta_{11}(u) = \frac{d^2}{du^2} lg\, sin\,\pi u + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{d^2}{du^2} lg\big(1-q^{2n}e^{2u\pi i}\big) + \frac{d^2}{du^2} lg\,\big(1-q^{2n}e^{-2u\pi i}\big) \Big].$$

Avšak

$$\begin{aligned} 1-q^{2n}e^{2u\pi i} &= -q^n e^{u\pi i}\left(q^n e^{u\pi i} - q^{-n}e^{-u\pi i}\right) \\ &= -2\,i\,q^n e^{u\pi i}\, sin\,(u+n\tau)\,\pi, \\ 1-q^{2n}e^{-2u\pi i} &= q^{+n}e^{-u\pi i}\left(q^{-n}e^{u\pi i} - q^n e^{-u\pi i}\right) \\ &= 2\,i\,q^n e^{-u\pi i} sin\,(u-n\tau)\,\pi, \end{aligned}$$

takže bude

$$\frac{d^2}{du^2} lg\,\big(1-q^{2n}e^{2u\pi i}\big) = \frac{d^2 lg\, sin\,(u+n\tau)\,\pi}{du^2},$$

$$\frac{d^2}{du^2} lg\,\big(1-q^{2n}e^{-2u\pi i}\big) = \frac{d^2 lg\, sin\,(u-n\tau)\,\pi}{du^2},$$

a následovně

$$\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}(u)}{du^2} = \frac{d^2 lg\,sin\,\pi u}{du^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^2}{du^2} lg\,sin\,(u+n\tau)\,\pi\right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{du^2} lg\,sin\,(u-n\tau)\,\pi\right),$$

čili

$$\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}(u)}{du^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d^2}{du^2} lg\,sin\,(u-n\tau)\,\pi.$$

Užijemeli nyní známého vzorce

$$sin\,\pi v = \pi v \mathop{\Pi'}_{m=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{v}{m}\right) e^{\frac{v}{m}},$$

(kde čárka u znamení součinu vyjadřuje, že se má vynechati hodnota $m=0$, t. j. že se má utvořiti součin hodnot vzniklých z obecného činitele pro $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) obdržíme:

$$\frac{d\,lg\,sin\,\pi v}{dv} = \frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{v-m} + \frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{d^2 lg\,sin\,\pi v}{dv^2} = \frac{1}{v^2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(v-m)^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(v-m)^2},$$

Pomocí tohoto vzorce obdržíme

$$(\mathfrak{C}) \qquad -\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}(u)}{du^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u-m-n\tau)^2} = P_{11}(u).$$

Tento součet ale nekonverguje neodvisle od způsobu seřadění svých členů, ale součet, jejž obdržíme z něho differencováním, t. j.

$$(\mathfrak{C}') \quad P'_{11}(u) = -2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u-m-n\tau)^3} = -2\sum_{m,n} \frac{1}{(u-m-n\tau)^3}$$

konverguje neodvisle od seřadění svých členů, aneb jak říkáme, bezpodmínečně. To dokážeme pomocí následující věty:

Řada

$$(\gamma) \qquad \sum_{m,n}{}' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^3},$$

v níž ω, ω' jsou libovolné dvě veličiny od 0 různé, jichž podíl není realným, je konvergentní.

Prvý důkaz této a jiné obecnější mnohem věty podal prvý *Eisenstein* *), zde ale stůjž kratší důkaz *Weierstrassův*.

Poněvadž ω, ω' nejsou v realném poměru, bude lze sestrojiti rovnoběžník, jehož vrcholy jsou 0, ω, $\omega+\omega'$, ω', a celou rovinu rozděliti v rovnoběžníky s ním shodné o vrcholech $m\omega+n\omega'$.

Prodlužme strany $\overline{(\omega, \omega+\omega')}$, $\overline{(\omega', \omega+\omega')}$ a vyšetřme, která z nich je bodu 0 blíže; budiž to první z nich, a vzdálenost příslušná buď δ; v případě opačném bychom změnili označení hodnot ω, ω', píšíce (ω', ω) místo (ω, ω'). Jsouli přímky ty od bodu 0 stejně vzdáleny, nezmění se na věci ničeho.

Jelikož členové součtu (γ) jsou veličiny kladné, můžeme je uvésti v libovolný pořádek, aniž tím hodnotu součtu, jeli konečná, změníme. Rozdělme je v skupiny, jichž součty buďte $S_1, S_2, S_3, \ldots S_\nu, \ldots$, kde S_ν obsahuje členy, v nichž hodnoty $m\omega+n\omega'$ jsou representovány body položenými vesměs na obvodu rovnoběžníka o vrcholech $\pm\nu\omega\pm\nu\omega'$; nejkratší vzdálenost obvodu tohoto rovnoběžníku od bodu 0 je patrně $\nu\delta$; počet bodů sem příslušných jest 8ν, a pro všechny platí $|m\omega+n\omega'|\geqq\delta\nu$, takže bude $S_\nu<\frac{8\nu}{\delta^3.\nu^3}=\frac{8}{\delta^3}\cdot\frac{1}{\nu^2}$,

a tedy

$$S_1+S_2+S_3+\ldots+S_\nu+\ldots<\frac{8}{\delta^3}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{\nu^2}+\ldots\right)$$

kterážto řada konverguje, a tedy též řada (γ).

Odtud odvodíme bezpodmínečnost konvergence řady $(\mathfrak{C}')$.

Je totiž

$$\sum_{m,n}{}'\frac{1}{|u-m\omega-n\omega'|^3}=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{\left|1-\frac{u}{m\omega+n\omega'}\right|^3}\cdot\frac{1}{|m\omega+n\omega'|^3}$$

$$\begin{pmatrix}m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots\\ m=0,n=0 \text{ vyloučeno}\end{pmatrix}$$

Veličiny $\left|1-\frac{u}{m\omega+n\omega'}\right|^{-3}$ patrně nepřevyší určitou stálou veličinu M, takže bude

$$\sum_{m,n}{}'\frac{1}{|u-m\omega-n\omega'|^3}<M\cdot\sum_{m,n}{}'\frac{1}{|m\omega+n\omega'|^3},$$

---

*) Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind (Mathem. Abhandlungen v. Dr. G. Eisenstein, p. 218).

a poněvadž u součtu v pravo konvergence je dokázána, je též součet v levo konvergentním. Pro ω (resp. ω') rovné 1, ω' (resp. ω) rovné τ plyne odtud přímo absolutní konvergence součtu ($\mathfrak{C}'$).

Řadu ($\mathfrak{C}'$) obdržíme též differencováním řady

$$\varphi(u) = \Sigma'_{m,n}\left[\frac{1}{(u-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2}\right] + \frac{1}{u^2},$$

která rovněž absolutně konverguje. Neboť obecný člen má hodnotu

$$\frac{1}{(u-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} = \frac{u(2m+2n\tau-u)}{(m+n\tau)^2(u-m-n\tau)^2}$$

$$= \frac{2u}{\left(1-\dfrac{u}{m+n\tau}\right)^2}\left(1-\frac{u}{2m+2n\tau}\right)\cdot\frac{1}{(m+n\tau)^3},$$

z čehož další průběh důkazu jest patrný.

Z rovnice $P'_{11}(u) - \varphi'(u) = 0$ soudíme, že musí existovati určitá veličina stálá c, tak aby

$$P_{11}(u) = c + \varphi(u).$$

Weierstrass znamená nekonečný součet

$$(\mathfrak{D}^0) \qquad \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{(u-m\omega-n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega+m\omega')^2}\right\} = \wp(u|\omega, \omega'),$$

takže bude naše funkce $\varphi(u)$ dána výrazem $\wp(u|1, \tau)$, tedy

$$(\mathfrak{D}) \qquad P_{11}(u) = \wp(u|1, \tau) + c$$

Z rovnice (3) § 5. soudíme, že tu bude

$$(\mathfrak{D}') \quad P_{gh}(u) = P_{11}\left(u + \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) = \wp\left(u + \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) + c,$$

z čehož patrno, jak lze veškery funkce P vyjádřiti funkcí $\wp$.

Zároveň je tu patrným vztah

$$\frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{u}{\omega}\middle|1, \frac{\omega'}{\omega}\right) = \wp(u|\omega, \omega'),$$

a tedy též vztah

$$(\mathfrak{D}^*)\qquad \wp_{gh}(u|\omega,\,\omega') = \wp\left(u + \frac{1-g}{2}\omega' + \frac{1-h}{2}\omega\,\middle|\,\omega,\,\omega'\right) + c_0,$$

kde
$$c_0 = \frac{1}{\omega^2}\,c.$$

Funkce $\wp(u|\omega,\,\omega')$ je sudou funkcí proměnných u, ω, ω', a souměrnou vzhledem k posledním dvěma, kteréž jsou její periody, ano tu

$$\wp(u + m\omega + n\omega') = \wp(u).$$

V nejjednodušším vztahu naleză se k funkci $p_{11}(u)$, a sice jest

$$\wp_{11}(u|\omega,\,\omega') = \wp(u|\omega,\,\omega') + c_0,$$

z kteréžto rovnice plyne, že funkce ta hoví rovnici differencialné $(x = \wp u)$.

$$(\mathfrak{E})\qquad \frac{dx}{du} = -2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\,,$$

kde e_ι jsou dány výrazy $e_{gh} - c_0$, a sice, píšeme-li

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\middle|\omega,\,\omega'\right),\quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right),\quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right),$$

bude patrně dle $(\mathfrak{D}^*)$.

$$(\mathfrak{E}^0)\qquad e_1 = e_{10} - c_0,\; e_2 = e_{00} - c_0,\; e_3 = e_{01} - c_0.$$

Funkce

$$\sqrt{\wp u - e_1},\quad \sqrt{\wp u - e_2},\quad \sqrt{\wp u - e_3}$$

jsou jednoznačné vzhledem k u, a volíme-li hodnoty odmocnin tak, aby jich rozvoj podle mocností proměnné u začínal členem $\frac{1}{u}$, odpadá i jich formalná dvojznačnosť. Zároveň platí rovnice:

$$\sqrt{\wp u - e_1} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{10}},\quad \sqrt{\wp u - e_2} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{00}},$$
$$\sqrt{\wp u - e_3} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{01}}.$$

Funkce $\wp(u)$ má tu důležitou vlastnosť, že při ní je vztah mezi veličinami e_1, e_2, e_3 znám, platí tu totiž

$$(\mathfrak{E}^1) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

takže rovnice $\mathfrak{E}$ je tvaru

$$(\mathfrak{E}^2) \qquad \frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g^3},$$

kde patrně

$$-4g_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$
$$4g_3 = e_1 e_2 e_3.$$

Abychom dokázali vztah $(\mathfrak{E}_1)$, zjednejme si rozvoj funkcí $\wp u$, $\wp' u$ podle mocností u.

Znamenáme-li $w = m\omega + n\omega'$, zní definice funkce $\wp u$ následovně:

$$\wp u = \sum_w \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) + \frac{1}{u^2}$$

Pro $|u| < |w|$ platí, jak známo:

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \ldots + \frac{u^\nu}{w^{\nu+1}} + \ldots$$

a odtud differencováním

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \frac{1}{w^2} + 2\frac{u}{w^3} + 3\frac{u^2}{w^4} + \ldots + \nu\frac{u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}} + \ldots$$

a odtud tedy pro $|u|$ menší než nejmenší z veličin $|w|$:

$$(\alpha) \qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3s_4 u^2 + 5s_6 u^4 + \ldots,$$

kde jsme znamenali

$$s_{2n} = \sum_w' \frac{1}{w^{2n}},$$

při čemž jsme ihned za $s_{2n+1} = \sum_w' \frac{1}{w_{2n+1}}$ kladli hodnotu 0, neboť v tomto součtu se členy po dvou ruší.

Z rovnice (α) plyne:

$$\wp^3 u = \frac{1}{u^6} + \frac{9s_4}{u^2} + \mathfrak{P}_0(u), \quad \mathfrak{P}_0(0) = 15s_6$$

$$\wp^2 u = \frac{1}{u^4} + \mathfrak{P}_1(u) \quad , \; \mathfrak{P}_1(0) = \ast$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}_2(u) \quad , \; \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

a dále

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 6s_4 u + 20 s_6 u^3 + \ldots$$

tedy

$$\wp'(u)^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{24 s_4}{u^2} + \mathfrak{P}_3(u), \quad \mathfrak{P}_3(0) = -80 s_6.$$

Bude tedy

$$\wp'(u)^2 - \{4\wp^3 u - g_1 \wp^2 u - g_2 \wp u - g_3\}$$

jen tehdy rovno nulle, je-li $g_1 = o$, ano tu v $\wp'(u)^2$ člen obsahující $\frac{1}{u^4}$ nepřichází. Pro g_2 nalezne se podmínka:

$$-24 s_4 - 36 s_4 + g_2 = o$$

t. j. bude

$$g_2 = 60 s_4 = 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}$$

Pro stanovení g_3 třeba znáti ještě absolutní členy řad $\mathfrak{P}$, kteréž jsme napsali vedle; obdržíme tak rovnici:

$$-80 s_6 - 60 s_6 - g_3 = 0$$

t. j.

$$g_3 = 140 s_6 = 140 \cdot \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}$$

Máme tedy vzorec ($\mathfrak{E}$) ve tvaru

($\mathfrak{E}^*$) $$\wp'(u) = -\sqrt{4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3},$$

kde

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}$$

Obdobným způsobem pak, jakým jsme výše obdrželi rovnici (7), nalezneme

$$(\mathfrak{F})\quad u=\int_{\infty}\frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}=\int_{\infty}\frac{dx}{-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\ x=\wp u.$$

Ne příliš obtížno bude nalézti vzorce

$$(\mathfrak{F}^0)\quad u=\int_{e_k}\frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}=\int_{e_k}\frac{dx}{-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\ x=\wp_k u$$

kde znamenáme

$$\wp_0 u=\wp u,\ \wp_1 u=\wp\left(u+\frac{\omega}{2}\right),\ \wp_2 u=\wp\left(u+\frac{\omega+\omega'}{2}\right),\ \wp_3 u=\wp\left(u+\frac{\omega'}{2}\right)$$

26.

Studien an Hypostomen böhmischer Trilobiten Nro. IV.

Vorgetragen von Dr. **Ottomar Novák** am 12. März 1886.

(Mit einer Tafel Abbildungen.)

Vergleichende Studien, die ich in der letzten Zeit an den Trilobitengattungen Cromus und Encrinurus unternommen habe, führten mich zu der Überzeugung, dass die Merkmale der Hypostome dieser Gattungen in jeder Beziehung vollkommen übereinstimmen.

Dieses Resultat gab Veranlassung, zu der Vermuthung dass die von Barrande 1852 *) gegründete Gattung Cromus mit der Gattung Encrinurus identisch sein dürfte. In diesem Falle hätte die viel ältere Bezeichnung Encrinurus die Prioritaet.

Nach den auf der beiliegenden Tafel dargestellten Hypostomen der beiden genannten Gattungen können die gemeinsamen Merkmale derselben folgendermaassen zusammengefasst werden:

Charakteristik des Hypostomes von Cromus und Encrinurus.

Die allgemeine Form des Hypostomes bildet ein Dreieck, dessen convexe Basis der Hypostomalsutur entspricht. Der meist sehr schmale

*) Syst. Silur. Boh. Vol. I. p. 821.