Matyáš Lerch

Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental

Journ. de Math. (5), 9 (1903), 377–401

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501553

Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires d'un discriminant positif fondamental ;

PAR M. LERCH.

Les formes binaires à coefficients entiers

$$ax^2 + bxy + cy^2 \quad \text{ou} \quad (a, b, c),$$

qui appartiennent au même discriminant positif $D = b^2 - 4ac$, se distribuent en un nombre fini de classes que je désigne par $\mathrm{Cl}(D)$. Un discriminant est dit *fondamental*, s'il ne lui correspond que des formes primitives, c'est-à-dire sans diviseur commun des coefficients a, b, c. Nous ne considérerons que des discriminants fondamentaux.

D'après les méthodes analytiques de Dirichlet, la détermination du nombre $\mathrm{Cl}(D)$ dépend de la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4, \tag{1}$$

c'est-à-dire de la solution composée des plus petits entiers positifs T, U. En désignant par $E(D)$ la quantité

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{2},$$

j'ai obtenu, en m'appuyant sur les recherches de Dirichlet, la formule suivante [1]

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \\ + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right.$$

u désignant une quantité positive arbitraire, et le symbole $\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)$ ayant la signification habituelle du signe de Legendre, généralisé par Kronecker.

En opérant sur la formule (2) sans aucune modification, les applications numériques seraient encore pénibles. Nous voulons montrer, dans cette Note, que la formule (2) est susceptible d'une modification qui rend facile le calcul du nombre des classes, même si la valeur du discriminant est assez considérable, en supposant, bien entendu, qu'on connaît, avec une certaine approximation, la quantité $\log \mathrm{E}(\mathrm{D})$.

J'introduirai, dans ce but, la quantité

$$(3)\qquad \mathrm{S} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

puis je désignerai par β les entiers 1, 2, 3, qui satisfont à l'une ou l'autre équation

$$(4)\qquad \left(\frac{\mathrm{D}}{\beta}\right) = -1 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\mathrm{D}}{\beta}\right) = 0,$$

et je pose

$$(5)\qquad \mathrm{P} = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}}\sum_{\beta}\frac{1}{\beta}\int_{\beta\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad \mathrm{Q} = \sum_{\beta}\int_{\frac{\beta^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

---

[1] Mémoire couronné par le Grand prix des Sciences mathématiques en 1900.

en convenant de réduire à la moitié les termes qui correspondent aux valeurs de β telles que $\left(\frac{D}{\beta}\right) = 0$.

On aura alors, au lieu de (2),

$$\mathrm{Cl}(D) \log E(D) = S - 2P - 2Q, \tag{2^a}$$

et je vais prouver que la quantité S s'obtient, avec une grande approximation, sous forme finie, puis je vais déterminer le nombre des termes qu'on doit prendre dans les séries P et Q pour pouvoir obtenir, au moyen de la formule (2^a), le nombre entier Cl(D). Le nombre desdits termes est relativement assez petit.

En même temps, j'établirai de nouveau la formule (2), puisque le Mémoire qui la donne n'est pas encore imprimé.

I.

Soit $f(z)$ une fonction réelle et positive, décroissante dans l'intervalle $(g \ldots \infty)$; nous considérerons seulement les valeurs de z contenues dans cet intervalle. L'inégalité évidente

$$f(m) > \int_m^{m+1} f(x)\,dx > f(m+1)$$

donne immédiatement

$$\sum_{m=n}^{n+p-1} f(m) > \int_n^{n+p} f(x)\,dx > \sum_{m=n+1}^{n+p} f(m),$$

dont on conclut le théorème de Cauchy que la série $\sum f(m)$ et l'intégrale

$$\int_n^{\infty} f(x)\,dx$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

On a ensuite en cas de convergence les inégalités

$$\sum_{m=n}^{\infty} f(m) > \int_n^{\infty} f(x)\,dx > \sum_{m=n+1}^{\infty} f(m),$$

dont on déduit

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} f(\nu) = \int_n^{\infty} f(x)\,dx - \vartheta f(n) \qquad (0 < \vartheta < 1) \tag{6}$$

et de même

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f(\nu) = \int_n^{\infty} f(x)\,dx + \vartheta' f(n) \qquad (0 < \vartheta' < 1).$$

Nous citerons ces deux équations sous le nom du *lemme de Cauchy*. Je vais en faire usage pour établir un résultat de M. Kinkelin ([1]) et qui consiste dans la relation

$$\lim_{\rho=0} \left\{ -\frac{1}{\rho} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}} \right\} = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)}, \tag{7}$$

ρ tendant vers zéro par des valeurs positives, bien entendu.

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{(w+x)^{1+\rho}}$$

étant en effet décroissante, le lemme de Cauchy permet de conclure l'égalité

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{(w+n)^{\rho}} + \frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\rho}} \qquad (0 < \vartheta < 1).$$

([1]) *Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlen-Theorie* (*Programm* der Gewerbeschule Basel, 1861-1862).

Il s'ensuit, w étant supposé positif,

$$(\alpha)\quad \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}+\frac{(w+n)^{-\rho}-1}{\rho}+\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\rho}}.$$

En posant, pour un moment,

$$G(\rho)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}+\frac{(w+n)^{-\rho}-1}{\rho},$$

$$F(\rho)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(w+\nu)^{1+\rho}}-\frac{1}{\rho},$$

l'équation (α) devient

$$(\alpha')\qquad F(\rho)=G(\rho)+\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\rho}},$$

et je vais en conclure d'abord que la limite de $F(\rho)$ pour ρ infiniment petit est bien déterminée. Soit, en effet, δ une quantité positive aussi petite qu'on le veut, je détermine l'entier n par l'inégalité

$$\frac{1}{w+n}<\frac{1}{2}\delta,$$

et je forme la différence

$$F(\rho)-F(\rho')=[G(\rho)-G(\rho')]+\left[\frac{\vartheta}{(w+n)^{1+\rho}}-\frac{\vartheta'}{(w+n)^{1+\rho'}}\right],$$

ϑ' étant une quantité positive plus petite que 1 comme ϑ. Alors la deuxième parenthèse du second membre sera plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2}\delta$, et l'on peut assigner une limite ρ'' telle que l'on ait $|G(\rho)-G(\rho')|<\frac{1}{2}\delta$ toutes les fois que les deux quantités positives ρ et ρ' restent inférieures à ρ''. Cela découle de la continuité de la fonction $G(\rho)$ qui est une transcendante entière. On aura donc

$$|F(\rho)-F(\rho')|<\delta,$$

pourvu que $\rho<\rho''$ et $\rho'<\rho''$.

Il s'ensuit que l'expression $\lim\limits_{\rho=0} F(\rho)$ est convergente. Cela étant, l'équation (α') fait voir que la quantité ϑ tend vers une limite déterminée ϑ_0 pour ρ infiniment petit, et puisque

$$G(0) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n),$$

il s'ensuit

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n) + \frac{\vartheta_0}{w+n} \qquad (0 \leqq \vartheta_0 \leqq 1).$$

En passant à la limite pour n indéfiniment croissant, on trouve

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{w+\nu} - \log(w+n) \right\},$$

ou bien

$$\lim_{\rho=0} F(\rho) = -\frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)},$$

ce qui est le théorème de M. Kinkelin.

II.

J'aurai besoin ensuite d'une formule qui se présente tout naturellement dans la théorie de la série malmsténienne

$$(8) \qquad F(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(x+m)^2 + u]^{\frac{1}{2}s}},$$

dont l'étude m'a été suggérée par un Mémoire de M. Appell ([1]) et qui appartient à une classe de transcendantes dont je me suis occupé à

([1]) *Voir* une Lettre insérée aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. III.

maintes reprises. J'y suppose u réel et positif, puis $0 < x < 1$, quoique ce ne soit pas nécessaire.

Faisons usage de la formule

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{[(x+m)^2+u]^{\frac{1}{2}s}} = \int_0^\infty e^{-uz-(x+m)^2 z} z^{\frac{1}{2}s-1} dz$$

qui a lieu pour les valeurs de s à partie réelle positive, que je suppose d'abord supérieure à l'unité comme l'exige la convergence de notre série, et nous aurons

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^\infty z^{\frac{1}{2}s-1} e^{-uz} dz \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z}.$$

Cela étant, la formule connue de la théorie des fonctions elliptiques

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\omega}(x+m)^2} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(m^2\omega+2mx)} = \sqrt{\frac{\omega}{i}} \vartheta_3(x \mid \omega)$$

donne, en prenant $\omega = \frac{\pi i}{z}$, la représentation

$$(\beta) \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z} = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \vartheta_3\left(x \middle| \frac{\pi i}{z}\right),$$

et notre formule devient

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty \vartheta_3\left(x \middle| \frac{\pi i}{z}\right) z^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz} dz$$

ou, en changeant z en $z\pi$,

$$(9) \qquad \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) F(x, s, u) = \int_0^\infty \vartheta_3\left(x \middle| \frac{i}{z}\right) z^{\frac{s-3}{2}} e^{-uz\pi} dz.$$

Pour z infiniment petit, la fonction $\vartheta_3\left(x \middle| \frac{i}{z}\right)$ diffère infiniment peu de l'unité, et l'existence de l'intégrale exige donc que la partie réelle de s surpasse 1; la formule (β) fait voir, en outre, que l'intégrale existe encore pour $u = 0$, si l'on suppose que l'on ait $0 < x < 1$. Or, en faisant $u = 0$, la série (8) devient

$$F(x, s, 0) = R(x, s) + R(1 - x, s),$$

en dénotant par $R(x, s)$ la série harmonique généralisée

$$R(x, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^s}. \tag{10}$$

Il s'ensuit, si l'on introduit $\frac{1}{z}$ au lieu de z,

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)[R(x, s) + R(1 - x, s)] = \int_0^{\infty} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz, \tag{9°}$$

et nous allons transformer le second membre pour qu'il devienne convergent pour toutes les valeurs de s.

Soit, à cet effet, a une quantité positive et décomposons l'intégrale comme il suit :

$$\int_0^{a} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz + \int_a^{\infty} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz;$$

dans la deuxième intégrale, mettons $\{\vartheta_3(x \mid iz) - 1\} + 1$ au lieu de $\vartheta_3(x \mid iz)$, et décomposons les deux intégrales; puisque la partie réelle de $\frac{s-1}{2}$ est supposée positive, on a

$$\int_a^{\infty} z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz = \frac{2}{s-1}\, a^{-\frac{s-1}{2}},$$

et il vient

$$\left\{\begin{aligned} &\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)[R(x, s) + R(1 - x, s)] \\ &\quad = \frac{2}{s-1}\, a^{\frac{1-s}{2}} + \int_0^{a} \vartheta_3(x \mid iz)\, z^{-\frac{s+1}{2}}\, dz + \int_a^{\infty} \frac{\vartheta_3(x \mid iz) - 1}{z^{\frac{s+1}{2}}}\, dz. \end{aligned}\right. \tag{10*}$$

Dans cette formule, je multiplie les deux membres par $\dfrac{\pi^{\frac{1}{2}s}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$ et je prends $s = 1 + \rho$; on a d'abord

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}s}}{(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} a^{\frac{1-s}{2}} = \frac{2}{\rho} + \left[\log\pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + (\rho),$$

(ρ) désignant une quantité infiniment petite avec ρ.

On aura ainsi la formule

$$\begin{aligned} R(x, 1+\rho) &+ R(1-x, 1+\rho) - \frac{2}{\rho} \\ &= \left[\log\pi - \log a - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right] + (\rho) \\ &+ \frac{\pi^{\frac{1+\rho}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}\left[\int_0^a \mathfrak{S}_3(x\,|\,iz) z^{-\frac{1}{2}\rho-1} dz + \int_a^\infty \frac{\mathfrak{S}_3(x\,|\,iz)-1}{z^{1+\frac{1}{2}\rho}} dz\right], \end{aligned}$$

et puisque, d'après le théorème de M. Kinkelin,

$$\lim_{\rho=0}\left[R(x, 1+\rho) - \frac{1}{\rho}\right] = -\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

nous aurons, en prenant ρ infiniment petit et employant la valeur connue

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \log\pi = \Gamma'(1) - \log 4\pi :$$

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)} &= [\Gamma'(1) - \log 4\pi] + \log a \\ &- \int_0^a \mathfrak{S}_3(x\,|\,iz)\frac{dz}{z} - \int_a^\infty \frac{\mathfrak{S}_3(x\,|\,iz)-1}{z} dz, \end{aligned} \right.$$

formule qui est d'importance capitale pour notre objet et que nous avons établie dans une Note publiée au *Bulletin de la Société royale des Sciences de Prague*, année 1897 [1].

III.

Dans la formule qui vient d'être obtenue, je remplace, dans la première intégrale qui se présente au second membre, la quantité $\vartheta_3(x \mid iz)$ par sa valeur

$$\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{z}(x+m)^2},$$

et puis j'y change z en $\frac{1}{z}$; en dénotant ensuite par C la constante d'Euler

$$C = -\Gamma'(1) = 0,577215\ldots,$$

et posant, pour abréger,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x),$$

notre formule devient

$$(11^*)\quad \left\{ \begin{aligned} & -C - \log 4\pi + \log a - \psi(x) - \psi(1-x) \\ & = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-(x+m)^2 z\pi} \frac{dz}{\sqrt{z}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2nx\pi \int_a^{\infty} e^{-n^2 z\pi} \frac{dz}{z}. \end{aligned} \right.$$

Cela étant, je me rappelle la formule suivante, conséquence immédiate de la formule classique de Dirichlet,

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \psi\left(\frac{h}{D}\right) = -\sqrt{D}\, \mathrm{Cl}(D) \log E(D).$$

Soit maintenant D un discriminant fondamental positif et prenons,

---

[1] *Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes.*

dans la formule (11*), $x = \frac{h}{D}$, et, après avoir multiplié par le signe de Legendre $\left(\frac{D}{h}\right)$, ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$.

A cause des relations

$$\left(\frac{D}{D-h}\right) = \left(\frac{D}{h}\right), \quad \sum_{1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) = 0,$$

on trouve, en faisant usage de la formule (12), l'équation

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{h=0}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-(h+mD)^2 \frac{z\pi}{D^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$
$$+ 2\sqrt{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{n}^{\infty} e^{-n^2 z\pi} \frac{dz}{z},$$

où nous avons fait usage de la formule connue

$$\sum_{h=1}^{D-1} \left(\frac{D}{h}\right) \cos\frac{2nh\pi}{D} = \left(\frac{D}{n}\right)\sqrt{D},$$

qui subsiste pour les discriminants fondamentaux positifs.

La double sommation qui se présente au second membre s'effectue en posant $h + mD = n$ et en observant que

$$\left(\frac{D}{h}\right) = \left(\frac{D}{n}\right);$$

il vient ainsi

$$2\sqrt{D}\,\mathrm{Cl}(D)\log E(D) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z\pi}{D^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$
$$+ 2\sqrt{D} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \int_{n}^{\infty} e^{-n^2 z\pi} \frac{dz}{z}.$$

Les termes de la première série sont égaux deux à deux, puis les substitutions $z = \frac{D^2 x^2}{n^2\pi}$, $z = \frac{x}{n^2\pi}$ donnent

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-\frac{n^2 z\pi}{D^2}} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{2D}{n\sqrt{\pi}} \int_{\frac{n}{D}\sqrt{\frac{\pi}{a}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

$$\int_{a}^{\infty} e^{-n^2 z\pi} \frac{dz}{z} = \int_{n^2 a\pi}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x};$$

posant donc, pour plus de symétrie, $a = \frac{1}{Du}$, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{C}l(\mathrm{D}) \log \mathrm{E}(\mathrm{D}) = 2\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right) \frac{1}{n} \int_{n\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{D}}{n}\right) \int_{\frac{n^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}, \end{aligned}$$

u désignant une quantité positive arbitraire. C'est la formule (2) annoncée au commencement.

IV.

Revenons sur la formule (11*) en cherchant ce qu'elle devient pour x infiniment petit. On a d'abord

$$\psi(x) = \psi(1 + x) - \frac{1}{x},$$

d'où il suit que, pour x infiniment petit, le premier membre de (11*) devient

$$(\gamma) \qquad \mathrm{C} - \log 4\pi + \log a + \frac{1}{x}.$$

Quant au second, tous ses termes restent finis pour $x = 0$ à l'exception du terme $m = 0$ de la première somme; celui-ci est

$$\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-x^2 z\pi} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x^2\pi}{a}}^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{x\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} - \int_0^{\frac{x^2\pi}{a}} e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} \right]$$

ou bien

$$= \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{a}} + (x),$$

(x) désignant un infiniment petit. On aura ainsi, en supprimant de part et d'autre le terme $\frac{1}{x}$ et passant à la limite,

$$\mathrm{C} - \log 4\pi + \log a = -\frac{2}{\sqrt{a}} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{a}}^{\infty} e^{-m^2 z\pi}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$
$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a}^{\infty} e^{-n^2 z\pi}\frac{dz}{z}.$$

Posons $a = \frac{1}{\nu}$ et transformons, comme plus haut, les intégrales; nous aurons la relation

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\nu\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{\nu}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \\ &\quad = \frac{\mathrm{C} - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\nu} - \frac{1}{2}\log\nu, \end{aligned} \right.$$

qui nous servira à évaluer les sommes

$$(14) \qquad \mathrm{S}_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad \mathrm{S}_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

Il résulte, en effet, de la formule (13), en y faisant $\nu = \frac{u}{\mathrm{D}}$, l'équation

$$\mathrm{S}_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{\mathrm{D}}}}^{\infty} e^{-x^2}dx$$
$$= \frac{\mathrm{C} - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\frac{u}{\mathrm{D}}} - \log\sqrt{\frac{u}{\mathrm{D}}} - \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\mathrm{D}\pi}{u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

puis, en y prenant $v = \mathrm{D}u$,

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\frac{m^2\pi}{\mathrm{D}u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mathrm{C} - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\mathrm{D}u} - \log\sqrt{\mathrm{D}u} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\mathrm{D}u\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Cela fait, observons que les équations qu'on trouve en intégrant par parties,

$$\int_a^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} = \frac{e^{-a}}{a} - \int_a^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x^2}, \qquad \int_a^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{1}{2}\int_a^{\infty} e^{-x^2}\frac{dx}{x^2},$$

donnent les inégalités suivantes :

$$(15)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\frac{m^2\mathrm{D}\pi}{u}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} < \frac{u}{\mathrm{D}\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{m^2\mathrm{D}\pi}{u}}}{m^2}, \\ \displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}\int_{m\sqrt{\mathrm{D}u\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx < \frac{1}{\mathrm{D}u\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-m^2\mathrm{D}u\pi}}{m}. \end{cases}$$

En choisissant u de telle sorte que $\mathrm{D}u$ en même temps que $\frac{\mathrm{D}}{u}$ soient assez grands (par exemple $u = 1$), les deuxièmes membres des inégalités (15) seront insignifiants, et les quantités (14) seront données avec une grande approximation par les formules

$$(14^a)\qquad \begin{cases} S_1 = \dfrac{\mathrm{C} - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\dfrac{u}{\mathrm{D}}} + \log\sqrt{\dfrac{\mathrm{D}}{u}}, \\ S_2 = \dfrac{\mathrm{C} - \log 4\pi}{2} + \sqrt{\mathrm{D}u} - \log\sqrt{\mathrm{D}u}. \end{cases}$$

La somme S définie par la formule (3) qui est

$$(16)\qquad S = S_1\sqrt{\mathrm{D}} + S_2$$

a donc pour valeur approchée l'expression

$$(16^*)\quad \left\{\begin{aligned} S = {} & \frac{1}{2}\sqrt{D}\,(\log D + C - \log 4\pi + 2\sqrt{u} - \log u) \\ & - \frac{1}{2}(\log D - C + \log 4\pi + \log u - 2\sqrt{u}). \end{aligned}\right.$$

La partie dépendante du paramètre arbitraire u, à savoir

$$(1 + \sqrt{D})(\sqrt{u} - \log\sqrt{u}),$$

devient minimale pour $u = 1$ et nous ferons toujours cette hypothèse. On aura ainsi la formule approchée, relative à l'hypothèse de $u = 1$,

$$(17)\qquad S = \frac{1}{2}\sqrt{D}(\log D + 0{,}046181) - \frac{1}{2}\log D + 0{,}023090,$$

et l'on pourra, dans la pratique, remplacer le second membre par la quantité

$$\frac{1}{2}\sqrt{D}\log D - \frac{1}{2}\log D,$$

dès que le discriminant D dépasse une certaine limite, en supposant, bien entendu, que la quantité $\log E(D)$ soit elle-même aussi considérable.

V.

Nous allons maintenant établir une limite supérieure de l'erreur qui s'introduit dans les calculs en bornant les séries

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\int_{m\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\int_{\frac{m^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

à un nombre fini de termes, que je désigne respectivement par r, r'. Les erreurs en question seront en tout cas inférieures à des quantités respectives

$$a_r = \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\nu\sqrt{\frac{u\pi}{D}}}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad b_{r'} = \sum_{\nu=r'+1}^{\infty} \int_{\frac{\nu^2\pi}{Du}}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Les fonctions

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{et} \qquad f(z) = \int_{\alpha^2 z^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

étant décroissantes, l'application du lemme de Cauchy

$$\sum_{\nu=m+1}^{\infty} f(\nu) = \int_m^{\infty} f(z)\,dz - \vartheta f(m) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

donne immédiatement

$$a_r = \int_r^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \frac{\vartheta}{r} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

$$b_{r'} = \int_{r'}^{\infty} dz \int_{\alpha'^2 z^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} - \vartheta' \int_{\alpha'^2 r'^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

où l'on a posé

$$\alpha = \sqrt{\frac{u\pi}{D}}, \qquad \alpha' = \sqrt{\frac{\pi}{Du}},$$

puis

$$0 < \vartheta < 1, \qquad 0 < \vartheta' < 1.$$

Or, l'intégrale double

$$J = \int_r^{\infty} \frac{dz}{z} \int_{\alpha z}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

correspond aux conditions $r < z < \frac{x}{\alpha}$ et pourra s'écrire

$$(18) \quad J = \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_r^{\frac{x}{\alpha}} \frac{dz}{z} = \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2} dx [\log x - \log(\alpha r)]\,dx,$$

ou, en faisant $\alpha r = \rho$,

$$(18^1) \qquad \mathrm{J}(\rho) = \int_{\rho}^{\infty} e^{-x^2} \log x \, dx - \log \rho \int_{\rho}^{\infty} e^{-x^2} \, dx;$$

au moyen de cette écriture la valeur de a_r s'exprime comme suit :

$$(18^2) \qquad a_r = \mathrm{J}(\alpha r) - \frac{\mathfrak{S}}{r} \int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Pour transformer $b_{r'}$, observons que l'intégrale double

$$\mathrm{J}' = \int_{r'}^{\infty} dz \int_{(\alpha' z)^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}$$

correspond aux conditions $r' < z < \frac{\sqrt{x}}{\alpha'}$ et pourra donc être mise sous la forme

$$\mathrm{J}' = \int_{(\alpha' r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} \int_{r'}^{\frac{\sqrt{x}}{\alpha'}} dz = \int_{(\alpha' r')^2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{\alpha'} - r' \right) e^{-x} \frac{dx}{x},$$

ou bien

$$\mathrm{J}' = \frac{2}{\alpha'} \int_{\alpha' r'}^{\infty} e^{-x^2} \, dx - r' \int_{(\alpha' r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Posant donc pour abréger

$$(19) \qquad \mathrm{K}(\rho) = 2 \int_{\rho}^{\infty} e^{-x^2} \, dx - \rho \int_{\rho^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x},$$

on aura comme valeur de la quantité $b_{r'}$

$$(19^1) \qquad b_{r'} = \frac{\mathrm{K}(\alpha' r')}{\alpha'} - \mathfrak{S}' \int_{(\alpha' r')^2}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x}.$$

Cela étant, posons $u = \xi^2$, pour que les quantités

$$\alpha = \xi \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{D}}}, \qquad \alpha' = \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{D}}}$$

s'expriment linéairement, et prenons ξ pour variable indépendante. En faisant usage des relations faciles à vérifier

$$\frac{dJ}{d\nu} = -\frac{1}{\nu}\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad \frac{dK}{d\nu} = -\int_{\nu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

on trouve aisément pour la quantité suivante, partie principale de $2\sqrt{\frac{D}{\pi}}a_r + b_{r'}$,

$$\Phi = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}J(\alpha r) + \frac{K(\alpha' r')}{\alpha'},$$

l'expression de sa dérivée relative à ξ :

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = -\frac{2}{\alpha}\int_{\alpha r}^{\infty} e^{-x^2}dx + \frac{2}{\alpha'\xi}\int_{\alpha' r'}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

Cette quantité s'annule en prenant $r = r'$, $\xi = 1$ et l'on voit que l'erreur devient à peu près minimale, si l'on prend le nombre de termes égal dans les deux séries, et en supposant $u = 1$. Nous poserons donc d'une manière définitive

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}}, \qquad \nu = \alpha r,$$

de sorte que nos quantités deviennent

$$a_r = J(\nu) - \frac{\mathfrak{S}}{r}\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}dx, \qquad b_r = \frac{K(\nu)}{\alpha} - \mathfrak{S}'\int_{\nu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

nous aurons besoin de la quantité suivante

$$c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}a_r + b_r = \frac{2a_r}{\alpha} + b_r \tag{20}$$

qui définit la limite supérieure de l'erreur dont il s'agit, à savoir

$$c_r = 2\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sum_{\nu=r+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\int_{\nu\alpha}^{\infty} e^{-x^2}dx + \sum_{\nu=r+1}^{\infty}\int_{\nu^2\alpha^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}.$$

On aura d'abord, au moyen de l'équation (2), la formule

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Cl}(\mathrm{D})\log \mathrm{E}(\mathrm{D}) \\ &\quad = \sum_{m=1}^{r}\left(\frac{\mathrm{D}}{m}\right)\left[\frac{2}{\alpha m}\int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{\alpha^2 m^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}\right] + \Theta c_r \\ &\qquad\qquad (-1 < \Theta < 1), \end{aligned}\right.$$

et l'expression suivante de c_r

$$(20^1)\qquad c_r = \frac{2\mathrm{J}(\nu) + \mathrm{K}(\nu)}{\alpha} - \frac{2\mathfrak{S}}{\nu}\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \mathfrak{S}'\int_{\nu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}$$

nous servira à déterminer le nombre r.

Posons, pour abréger,

$$2\mathrm{J}(\nu) + \mathrm{K}(\nu) = \Lambda(\nu),$$

de sorte que la fonction Λ sera définie par l'expression

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\Lambda(\nu) = 2\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}\log x\,dx \\ &\qquad + (2 - 2\log\nu)\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx - \nu\int_{\nu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}, \end{aligned}\right.$$

et, en posant encore

$$(22^1)\qquad \Omega(\nu) = \frac{2}{\nu}\int_{\nu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{\nu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

la formule (20^1) donne comme conséquence

$$(20^2)\qquad c_r = \frac{\Lambda(\nu)}{\alpha} - \mathfrak{S}''\Omega(\nu) \qquad (0 < \mathfrak{S}'' < 1).$$

Cela étant, l'entier $\mathrm{Cl}(\mathrm{D})$ ayant une parité connue, il suffira de choisir r par la condition

$$c_r < \log \mathrm{E}(\mathrm{D}),$$

qui sera remplie à plus forte raison, d'après (20^2), si l'on fait

$$(23)\qquad \Lambda(\rho) \leqq \alpha \log E(D) \qquad (\rho = \pm \alpha r).$$

Pour déterminer r, il suffira de dresser une Table de valeurs de la fonction $\Lambda(\rho)$ qui se calcule aisément au moyen de la série

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \Lambda(\rho) &= (2 - C - \log 4)\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &\quad + (2\rho - \sqrt{\pi})\log\rho + C\rho + \sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{(4\nu+1)\rho^{2\nu+1}}{\nu!\,\nu(2\nu+1)^2}, \end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Lambda(\rho) = 0{,}0323 + (2\rho - 1{,}7724)\log\rho + 0{,}5772\rho \\ - \frac{5}{9}\rho^3 + \frac{9}{10}\rho^5 - \frac{13}{882}\rho^7 + \ldots. \end{aligned}$$

On a, par exemple,

$$\Lambda\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}7896, \qquad \Lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 1{,}4091, \qquad \Lambda\left(\frac{1}{4}\right) = 1{,}9319,$$

$$\Lambda\left(\frac{1}{5}\right) = 2{,}3519, \qquad \Lambda\left(\frac{1}{6}\right) = 2{,}7044, \qquad \Lambda\left(\frac{1}{7}\right) = 3{,}0060,$$

$$\Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3{,}2690.$$

Bien que le nombre r des termes, que la formule (21) contient, ne soit pas exagéré, il sera néanmoins beaucoup plus commode de séparer les termes qui correspondent à des valeurs $m = \beta$, où l'on a

$$(25^0)\qquad \left(\frac{D}{\beta}\right) = -1 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{D}{\beta}\right) = 0 \qquad (\beta = \beta_0),$$

et de prendre

$$(25)\qquad P_r = \sum_{\beta \leqq r} \frac{2}{\alpha\beta}\int_{\alpha\beta}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad Q_r = \sum_{\beta \leqq r}\int_{\alpha^2\beta^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x},$$

en convenant de réduire à la moitié tout terme $\beta = \beta_0$ correspondant à une valeur telle que $\left(\frac{D}{\beta_0}\right) = 0$. Le deuxième membre de la formule (21) devient alors

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\frac{2}{\alpha m}\int_{\alpha m}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{\alpha^2 m^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}\right) - 2(P_r + Q_r) + \Theta c_r,$$

et la somme qui figure au début ayant pour valeur l'expression $S - c_r$, nous aurons

$$(26)\qquad \mathrm{Cl}(D)\log E(D) = S - 2(P_r + Q_r) - (1 - \Theta)c_r,$$

avec la valeur suivante de S :

$$(26^0)\quad S = \frac{1}{2}\sqrt{D}(\log D + 0{,}046181) - \frac{1}{2}\log D + 0{,}023090,$$

qui a été donnée dans (17).

Puisque la quantité $1 - \Theta$ se trouve entre 0 et 2, la formule (26) peut s'exprimer par l'inégalité qui résulte, en outre, de la condition $c_r < \log E(D)$,

$$(26^*)\qquad \frac{S - 2(P_r + Q_r)}{\log E(D)} - 2 < \mathrm{Cl}(D) < \frac{S - 2(P_r + Q_r)}{\log E(D)},$$

et cette dernière inégalité définit l'entier Cl(D) sans ambiguïté, si l'on en connaît d'avance la parité. Aussi les cas ne sont pas rares où l'inégalité seule

$$\mathrm{Cl}(D)\log E(D) < S$$

suffit pour déterminer le nombre des classes

Notons encore une fois que nous avons posé $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{D}}$, $\alpha r = v$, et que le nombre r se détermine au moyen de la condition (23).

L'indétermination de la formule (26) devient plus restreinte, si l'on y remplace c_r par sa valeur calculée au moyen de la formule (20^2).

Toutes les difficultés du problème reviennent donc à la détermination de la solution fondamentale de l'équation de Fermat

$$T^2 - DU^2 = 4,$$

dont la théorie ne paraît pas être encore assez avancée.

Pour montrer l'utilité pratique de ce qui précède, je vais déterminer le nombre des classes du discriminant premier $D = 9817$; les discriminants de la forme $8k + 5$ seuls peuvent avoir T et U impairs; pour les autres, on a $T = 2x$, $U = 2y$ et $x^2 - Dy^2 = 1$. J'emprunte à une citation de M. Konen le fait découvert par M. A. Martin, que l'entier x contient 97 chiffres; la quantité $\log E(D)$ étant à peu près

$$\log T = \log 2x,$$

on aura environ

$$\log E(D) = 222,$$

et puisque, dans notre cas, $\alpha = 0,01788$, la condition concernant le nombre des termes devient

$$\Lambda(\nu) \leqq \alpha \log E(D) = 4,$$

la valeur $\Lambda\left(\frac{1}{8}\right) = 3,269$ permet de conclure qu'il suffira de prendre $\alpha r \geqq \frac{1}{8}$, d'où $r = 7$.

L'équation $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$ n'admettant que des solutions $\beta = 5$ et $\beta = 7$, dans l'intervalle de $\beta = 1$ à $\beta = r = 7$, les sommes P_r et Q_r contiennent deux termes chacune, lesquels se calculent d'ailleurs facilement.

Mais on trouve $S = 450,5$, d'où

$$\mathrm{Cl}(D) < \frac{450}{222},$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{Cl}(D) = 1 \qquad (D = 9817),$$

le nombre des classes d'un discriminant premier devant être impair.

VI.

Si le discriminant D admet comme facteur le nombre 2 ou 3, les valeurs β_0 sont très nombreuses et le calcul pourrait devenir pénible. C'est pourquoi j'aurais recommandé de modifier la formule en chassant tout d'abord les valeurs de m qui contiennent l'un ou l'autre de ces facteurs.

Soit donc $D = 4m$ un discriminant pair; la somme qui figure au second membre de (21) ne contient effectivement que des termes de rang impair et l'on pourra l'écrire

$$S' - 2(P'_r + Q'_r) + (\Theta - 1)c'_r,$$

où P'_r et Q'_r sont les sommes P_r et Q_r bornées aux termes provenant des valeurs impaires de β, puis

$$S' = \sum_\mu \left(\frac{2}{\alpha\mu} \int_{\alpha\mu}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{\alpha^2\mu^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \right) \qquad (\mu = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Cela étant, posons

$$S'' = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{2\nu\alpha} \int_{2\nu\alpha}^{\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{4\nu^2\alpha^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x} \right),$$

nous aurons évidemment

$$S' = S - S'',$$

S désignant la série étudiée plus haut. Pour obtenir la quantité S'', observons que l'on a

$$S'' = \frac{1}{2}\sqrt{D}\, S''_1 + S''_2,$$

où

$$S''_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_{2\nu\alpha}^{\infty} e^{-x^2}\,dx, \qquad S''_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{4\nu^2\alpha^2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x};$$

ces deux dernières quantités s'obtiennent avec une grande approximation au moyen des formules (14) et (14^a), dans lesquelles il faut prendre $u=4$ et $u=\frac{1}{4}$; il vient ainsi, en employant l'écriture $D=4m$,

$$S''_1 = \frac{C-\log 4\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\log m \qquad S''_2 = \frac{C-\log 4\pi}{2} + \sqrt{m} - \frac{1}{2}\log m;$$

on a ainsi, en écrivant, pour un moment, $\frac{C-\log 4\pi}{2} = A$,

$$S'' = \frac{1}{2}\sqrt{m}\log m + \sqrt{m}(A+1) - \frac{1}{2}\log m + A + 1,$$

et puisque, d'après (16^*), pour $D = 4m$, $u=1$

$$S = \sqrt{m}(\log m + 2A + 2 + \log 4) - \frac{1}{2}\log m + A + 1 - \log 2,$$

il vient, en retranchant,

$$(27) \qquad S' = \frac{1}{2}\sqrt{m}(\log m + C - \log\pi + 2 + 2\log 2) - \log 2$$

ou bien

$$(27') \qquad S' = \frac{1}{2}\sqrt{m}(\log m + 2,818770) - 0,693147;$$

le nombre des classes sera alors déterminé par les inégalités

$$(28) \quad \frac{S' - 2P'_r - 2Q'_r}{\log E(D)} > \mathrm{Cl}(D) > \frac{S' - 2P'_r - 2Q'_r}{\log E(D)} - 2 \qquad (D = 4m).$$

Soit, par exemple, $D = 4m = 4 \times 859 = 3436$, on a

$$\frac{1}{2}T = 7024 \times 10^{18},$$

d'où

$$\log E(D) = 53,28,$$

puis

$$\alpha = 0,0308,$$

et enfin

$$\alpha \log E(D) = 1,64;$$

observant que $\Lambda\left(\frac{1}{3}\right) = 1,409$, on peut prendre

$$\alpha r \geqq \frac{1}{3},$$

d'où

$$r = 11,$$

et il n'y aura qu'une solution de l'équation $\left(\frac{D}{\beta}\right) = -1$, à savoir $\beta = 7$.

On trouve

$$\log m + 2,82 = 9,57, \qquad \sqrt{m} = 29,30,$$

d'où

$$S' < 150, \qquad \text{Cl}(D) < \frac{150}{53,28},$$

donc

$$\text{Cl}(D) = 2,$$

le nombre des classes devant ici être pair.

Le lecteur voit comment se modifie la formule générale en cas de $D = 3m$ ou $D = 12m$.

La méthode exposée ici en partant de la formule (2) est applicable aussi aux autres développements que nous avons établis dans le Mémoire couronné, soit pour les discriminants positifs, soit négatifs. Je reviendrai, dans une prochaine occasion, sur les séries semi-convergentes qui se présentent dans ce dernier cas, pour faire voir que les méthodes analytiques présentent un réel avantage sur le procédé élémentaire de la détermination des formes réduites.