Matyáš Lerch
Évaluation d'une intégrale définie

Batt. G. 41 (1903), 78–84

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501551

EVALUATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE

NOTE

DE

M. LERCH à Fribourg (Suisse).

---

1. Il s' agit de l' intégrale suivante

$$\Phi(a\,,\,b)=\int_0^\infty \operatorname{arctg}\frac{a}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\,dx\,, \tag{1}$$

dans laquelle a et b sont deux constantes réelles et positives.

Faisant d'abord $a=b$, et substituant $x=az$, il vient évidemment

$$\Phi(a\,,\,a)=a\mathrm{K}\,, \tag{2}$$

où K désigne la constante numérique $\Phi(1\,,\,1)$.

Cela étant, je considère au lieu de Φ l' intégrale suivante

$$\mathrm{S}=\int_0^\infty\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)^2dx\,, \tag{3}$$

dont la valeur est évidemment

$$\mathrm{S}=(a+b)\mathrm{K}+2\,\Phi(a\,,\,b). \tag{4}$$

Or, on a

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}=\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}+\left\{\begin{matrix}\pi, & \text{si}\, x<\sqrt{ab}\\ \\ 0, & \text{si}\, x>\sqrt{ab}\end{matrix}\right\};$$

à cause de la discontinuité de cette somme, il faudra décomposer l'intégrale (3) en deux autres dont les limites sont respectivement 0 et $\sqrt{ab}$, puis $\sqrt{ab}$ et l'infini. Dans la première intégrale la somme des deux arctangentes étant

$$\pi - \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2},$$

nous aurons

$$S = \int_0^{\sqrt{ab}} \left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\right)^2 dx + \int_{\sqrt{ab}}^{\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

En remplaçant la fonction sous le signe somme de la première intégrale par le trinôme équivalent, on obtient trois intégrales dont l'une pourra se réunir avec la deuxième intégrale de la dernière formule, et il vient

$$S = \pi^2\sqrt{ab} - 2\pi\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}\cdot dx. + \int_0^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

J'observe maintenant que l'on a, pour $x < \sqrt{ab}$:

$$\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \operatorname{arctg}\frac{x}{b},$$

et en faisant usage de l'intégration par parties qui donne

$$\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx = x\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2+x^2),$$

j'en tire cette formule auxiliaire

$$\int_0^{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{ab-x^2}dx = \sqrt{ab}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}} + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$-\frac{a}{2}\log\frac{a^2+ab}{a^2} - \frac{b}{2}\log\frac{b^2+ab}{b^2}$$

ou bien

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2}\log(a+b) + \frac{a}{2}\log a + \frac{b}{2}\log b.$$

Substituant cette valeur dans la récente expression de S, nous aurons

$$S = \pi\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} + \int_0^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{(a+b)x}{x^2-ab}\right)^2 dx.$$

Pour simplifier l' intégrale qui figure encore au second membre, je pose

$x = (a+b)z$; $m = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$; elle devient

$$J = (a+b)\int_0^\infty \left(\text{arctg}\,\frac{z}{z^2-m^2}\right)^2 dz.$$

Substituant ensuite

$$\frac{z^2-m^2}{z} = x\,,$$

les limites deviendront $-\infty$ et ∞, et puisque alors

$$z = \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2+4m^2})\,,$$

$$dz = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}\right)dx\,,$$

nous aurons

$$J = \frac{a+b}{2}\int_{8}^{\infty} \left(\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}\right)dx.$$

Observant que l' intégrale de la fonction impaire

$$\left(\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right)^2\frac{x}{\sqrt{x^2+4m^2}}$$

est nulle, on a enfin

$$J = (a+b)\int_0^\infty \left(\text{arctg}\,\frac{1}{x}\right)^2 dx = (a+b)\text{K}.$$

La dernière expression de S est donc

$$S = \pi \log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} + (a+b)\text{K}\,,$$

et en la comparant avec la valeur (4) nous aurons la formule de Bierens de Haan

$$\Phi(a\,,\,b) = \frac{\pi}{2}\log\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b} \tag{5}$$

que j' avais établie en 1899 d' une autre manière (1).

---

(1) Journal (časopis) de la Société mathématique de Prague, T. XXIX, p. 39

2. Je vais faire usage du résultat obtenu pour tirer une conséquence de l'intégrale analogue à S

$$(6) \qquad T = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)^2 dx$$

dont la valeur est

$$T = (a + b)K - 2\,\Phi(a\,,\,b).$$

L' identité élémentaire toujours vraie

$$\operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x} = \operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{x^2+ab}$$

permet d' écrire au lieu de (6)

$$T = \int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{(a-b)x}{x^2+ab}\right)^2 dx$$

ou bien, si l'on change x en $(a-b)x$ et supposant $a > b$,

$$(7) \qquad T = (a-b)\int_0^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2 dx\,,$$

où l' on a posé, pour abréger,

$$n = \frac{\sqrt{ab}}{a-b}\,.$$

Cela étant, décomposons l'intégrale (7) en deux autres

$$(8) \qquad \frac{T}{a-b} = J_1 + J_2\,,$$

où

$$J_1 = \int_0^n \left(\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_1^2+n^2}\right) dx_1\,, \quad J_2 = \int_n^\infty \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_2^2+n^2}\right)^2 dx_2\,,$$

et transformons ces dernières-ci par les substitutions respectives

$$\frac{x_1^2+n^2}{x_1} = z_1\,,\ (x_1 < n)\,,\quad \frac{x_2^2+n^2}{x_2} = z_2\,,\ (x_2 > n)\,;$$

on aura

$$x_1 = \frac{1}{2}(z_1 - \sqrt{z_1^2 - 4n^2}) \ , \ 2n \leqq z_1 \leqq \infty ,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(z_2 + \sqrt{z_2^2 - 4n^2}) \ , \ 2n \leqq z_2 \leqq \infty ,$$

et par conséquent

$$J_1 = -\frac{1}{2}\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4n^2}}\right)dz ,$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4n^2}}\right)dz ;$$

la formule (8) devient de la sorte

$$\frac{T}{a-b} = \int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}} ,$$

et on a cette formule nouvelle

$$\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2 \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - 4n^2}} = \frac{a+b}{a-b}K - \frac{2\Phi(a, b)}{a-b} ,$$

où

$$n = \frac{\sqrt{ab}}{a-b} .$$

On peut prendre, sans nuire à la généralité du résultat, $a = 1$, $b = q$, et en substituant les valeurs

$$K = \pi \log 2 \ , \ 2\Phi(1 \ , \ q) = \pi \log\frac{(1+q)^{1+q}}{q^q} ,$$

le second membre devient

$$\frac{\pi}{1-q} \log \frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{b+1}} ,$$

et la lettre n aura la signification suivante :

$$n = \frac{\sqrt{q}}{1-q} . , \quad 0 < q < 1.$$

Dans cette écriture, notre résultat devient

$$\int_{2n}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{z}\right)^2\frac{zdz}{\sqrt{z^2-4n^2}}=\frac{\pi}{1-q}\log\frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{1+q}}.$$

Faisant $z=\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{2n}=r$, on pourra l'écrire

$$(9)\qquad \int_0^r\left(\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)^2\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{2\pi\sqrt{q}}{(1-q)^2}\log\frac{q^q}{\left(\frac{1+q}{2}\right)^{1+q}}$$

où l'on a posé

$$\sqrt{q}=-r+\sqrt{r^2+1}\,,$$

r désignant une quantité positive arbitraire.

De cette intégrale on en déduira une autre en passant aux valeurs complexes de la variable r. Pour ce but je change x en rx pour avoir la forme suivante de l'équation (9)

$$\int_0^1(\operatorname{arctg}rx)^2\frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\,\pi r^2\sqrt{q}}{(1-q)^2}\left[q\log q-(1+q)\log\frac{1+q}{2}\right].$$

Considérée comme fonction analytique de la variable complexe r, l'intégrale qui constitue le premier membre reste synectique dans le plan affecté des deux *coupures* $(i\ldots\infty i)$ et $(-i\ldots-\infty i)$, segments de l'axe imaginaire. Dans la même région reste synectique la fonction algébrique

$$\sqrt{q}=-r+\sqrt{r^2+1}\,,$$

le radical y conservant le signe positif de sa partie réelle. En désignant par α un angle réel entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, on pourra donc prendre $r=i\sin\alpha$, ce qui exige qu'on fait

$$\sqrt{q}=e^{-\alpha i}.$$

Observant que

$$\operatorname{arctg}rx=\frac{1}{2i}\log\frac{1+irx}{1-irx}\,,$$

le passage anoncé aux imaginaires donnera

$$(10) \qquad \int_0^1 \left(\log \frac{1 + x \sin\alpha}{1 - x \sin\alpha}\right)^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - x^2}} = 4\pi(\alpha \sin\alpha + \cos\alpha \log \cos\alpha),$$

$$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Si l' on pose $\sin\alpha = a$, en transformant en même temps l' intégrale par la substitution $x = \frac{x'}{a}$, il vient

$$(10^*) \quad \int_0^a \left(\log \frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{4\pi}{a^2}\left(a \arcsin a + \sqrt{1 - a^2} \log \sqrt{1 - a^2}\right).$$

Je veux m'arrêter un moment au cas particulier de $a = 1$; en lui appliquant les substitutions successives

$$x = \cos 2\varphi \quad , \quad \operatorname{tg}\varphi = z ,$$

on parvient à la formule

$$\int_0^1 \frac{1 + z^2}{(1 - z^2)^2} (\log z)^2 \, dz = \frac{\pi^2}{4}$$

qui d' ailleurs se vérifie aisément.
