Matyáš Lerch

Démonstration élémentaire de la formule $\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty} \infty \frac{1}{(x+\nu)^2}$

Enseign. Math. 5(1903), 450–453

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/501549`

Les nombres sont d'une classification très facile, ainsi que les opérations qu'on peut effectuer sur eux, et il me semble que l'étude de cette classification ne serait pas stérile pour tous ceux qui s'en occuperaient.

Ch. Berdellé (Rioz, Haute-Saône).

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

I. Un lemme. — De la double inégalité bien connue

$$1 > \frac{\sin\varphi}{\varphi} > \cos\varphi$$

il suit que

$$0 < 1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$0 < 1 + \frac{\sin\varphi}{\varphi} < 2;$$

d'où en multipliant,

$$0 < 1 - \frac{\sin^2\varphi}{\varphi^2} < 4\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

ou, après la division par la quantité

$$\sin^2\varphi = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

$$(1) \qquad 0 < \frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} < \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

En supposant φ obtus, cette double inégalité permet de conclure que la fonction

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{1}{\varphi^2}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

II. — Je pose $\varphi = x\pi$ pour avoir les infinis de la fonction

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} \tag{2}$$

sous forme simple, et je vais considérer la somme évidemment convergente

$$f_2(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2} \tag{3}$$

qui devient infinie pour les mêmes valeurs que la fonction $f_1(x)$. On voit d'abord que l'on a

$$f_1(x+m) = f_1(x), \quad f_2(x+m) = f_2(x), \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

puis on s'assure que la différence

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x) \tag{4}$$

reste finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2} \ldots \frac{1}{2}\right)$ et par conséquent pour tous les x.

En effet, on a

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2} + f_3(x),$$

la fonction

$$f_3(x) = \sum{}' \frac{1}{(x+\nu)^2}, \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$$

restant finie dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, et la quantité

$$g(x) = \left(\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} - \frac{1}{x^2}\right) - f_3(x)$$

devient la différence de deux fonctions qui, dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ restent finies.

Il y a donc une constante positive C telle que partout

$$|g(x)| \leq C, \tag{5}$$

la valeur spéciale de cette constante n'ayant d'ailleurs aucune importance pour nous.

III. — Si, dans la série (3), on transforme l'indice sommatoire ν en posant

$$\nu = \rho + \mu m \ (\rho = 0, 1, 2, \ldots m-1;\ \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

où m signifie un entier positif quelconque, il vient

$$f_2(x) = \sum_{\rho=0}^{-1}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\rho+m\mu)^2} = \sum_{\rho=0}^{m-1}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2\left(\frac{x+\rho}{m}+\mu\right)^2}$$

ou bien

$$f_2(x) = \frac{1}{m^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_2\left(\frac{x+\rho}{m}\right) \tag{6}$$

Une équation fonctionnelle toute semblable subsiste pour la fonction

$$f_1(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi}$$

mais nous nous bornerons pour l'établir dans le cas particulier de $m = 2^k$, k étant un entier positif quelconque.

On a d'abord

$$\frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x}{2}\right) + f_1\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{4\cos^2\frac{x\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4\sin^2\frac{x\pi}{2}\cos^2\frac{x\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = f_1(x).$$

de la sorte que l'équation

$$f_1(x) = \frac{1}{m^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) \tag{7}$$

se trouve vérifiée pour $m = 2$. Admettant qu'elle subsiste pour une valeur m, nous transformerons les termes du second membre en l'employant dans le cas de $m = 2$, ce qui donne

$$f_1\left(\frac{x+\rho}{m}\right) = \frac{1}{2^2}\left[f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)\right]$$

et il s'ensuit au lieu de (7)

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right) + \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} f_1\left(\frac{x+m+\rho}{2m}\right)$$

ou bien

$$f_1(x) = \frac{1}{(2m)^2}\sum_{\rho=0}^{2m-1} f_1\left(\frac{x+\rho}{2m}\right)$$

ce qui est la formule (7) écrite avec la valeur $2m$ de l'entier m.

La formule (7) ayant lieu pour $m = 2$, sera vraie, par conséquent, pour $m = 4, 8, 16$, et en général pour $m = 2^k$.

IV. — Les deux formules (6) et (7) ayant lieu pour $m = 2^k$, il s'ensuit pour la fonction

$$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

la formule de la même forme

$$g(x) = \frac{1}{m^2}\sum_{\rho=0}^{m-1} g\left(\frac{x+\rho}{m}\right), \quad (m = 2^k). \tag{8}$$

Puisque pour toute valeur de x l'inégalité (5) a lieu, cette dernière formule permet de conclure

$$|g(x)| < \frac{mC}{m^2} = \frac{C}{m}, \quad (m = 2^k),$$

et il s'ensuit en faisant croître k au delà de toute limite, que l'on a

$$|g(x)| = 0.$$

Ceci vérifie l'équation $f_1(x) = f_2(x)$, ou bien

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 x\pi} = \sum_{\nu=\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\nu)^2}$$

qu'il s'agissait d'établir. Elle fait voir, d'une manière qui me paraît élémentaire et simple, que la fonction $\sin x\pi$ est analytique, ce qui permet d'obtenir son développement suivant les puissances de x sans faire usage du théorème de Taylor-Cauchy.

M. Lerch (Fribourg, Suisse).