Matyáš Lerch
Démonstration élémentaire d’un théorème arithmétique

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1903, O. 2, 1–3

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501548

II.

Démonstration élémentaire d'un théorème arithmétique.

Par M. Lerch.

(Présenté dans la séance du 9 Janvier 1903)

Soit m un entier divisible par les facteurs a, b, c, . . . k, l, premiers entre eux, deux à deux. Il s'agit du nombre N des entiers positifs ne surpassant pas m qui n'admettent pour diviseur aucun des entiers a, b, c . . . k, l.

Pour déterminer N, j'emploie la fonction $F(x)$, égale à 1 pour x fractionnaire, mais s'annulant pour x entier: le nombre en question sera alors donné par l'expression

$$N = \sum_{\nu=1}^{m} F\left(\frac{\nu}{a}\right) F\left(\frac{\nu}{b}\right) \ldots F\left(\frac{\nu}{k}\right) F\left(\frac{\nu}{l}\right),$$

car le terme en ν est nul, si ν admet l'un ou l'autre des entiers a, b, . . . pour diviseur, et il est égal à un dans le cas contraire.

Cela étant, posons $L = a\,b\,c \ldots k$ et effectuons la substitution

$$\nu = \varrho + L\mu, \ (\varrho = 1, 2, \ldots . L; \ \mu = 0, \ 1 \ldots \frac{m}{L} - 1).$$

Il vient, vue la périodicité de la fonction $F(x)$, la formule

$$N = \sum_{\varrho=1}^{L} F\left(\frac{\varrho}{a}\right) F\left(\frac{\varrho}{b}\right) \ldots F\left(\frac{\varrho}{k}\right) \sum_{\mu=0}^{m'-1} F\left(\frac{\varrho + L\mu}{l}\right),$$

où j'ai mis $m' = \frac{m}{L}$.

Il s'agit encore de la somme interne que je transforme en faisant

$$\mu = \sigma + \lambda l, \ (\sigma = 0, 1, \ldots l-1; \ \lambda = 0, 1, \ldots m''-1), \text{ où}$$

$$m'' = \frac{m'}{l} = \frac{m}{abc\ldots kl}.$$

Il vient ainsi

$$S_\varrho = \sum_{\mu=0}^{m'-1} F\left(\frac{\varrho + L\mu}{l}\right) = m'' \sum_{\sigma=0}^{l-1} F\left(\frac{\varrho + L\sigma}{l}\right),$$

car on a

$$F\left(\frac{\varrho + L\sigma + Ll\lambda}{l}\right) = F\left(\frac{\varrho + L\sigma}{l}\right);$$

cela étant, j'observe que les fractions

$$\frac{\varrho + L\sigma}{l} \left(\sigma = 0, 1, \ldots l-1\right)$$

ne diffèrent des fractions

$$\frac{0}{l}, \frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \ldots \frac{l-1}{l},$$

prises dans un certain ordre, que par des entiers: on a donc

$$\sum_{\sigma=0}^{l-1} F\left(\frac{\varrho + L\sigma}{l}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{l-1} F\left(\frac{\varkappa}{l}\right) = l-1,$$

d'où

$$S_\varrho = m''(l-1)$$

et il s'ensuit, en substituant,

$$N = \frac{m(l-1)}{abc\ldots kl} \sum_{\varrho=1}^{L} F\left(\frac{\varrho}{a}\right) F\left(\frac{\varrho}{b}\right) \ldots F\left(\frac{\varrho}{k}\right). \tag{1}$$

Pour achever le calcul, je prend d'abord $m = abc \ldots kl$, et en dénotant par n le nombre de facteurs, la formule (1) donnera pour la somme.

$$M_n = \sum_{\nu=1}^{ab\ldots kl} F\left(\frac{\nu}{a}\right) F\left(\frac{\nu}{b}\right) \ldots F\left(\frac{\nu}{k}\right) F\left(\frac{\nu}{l}\right)$$

la formule de réduction

$$M_n = (l-1)\, M_{n-1}$$

dont on conclut

$$M_n = (a-1)\,(b-1) \ldots (l-1).$$

La somme qui figure dans la formule (1), aura donc la valeur $(a-1)\,(b-1) \ldots (k-1)$ et il vient le résultat connu

$$N = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{l}\right).$$