Matyáš Lerch

Bemerkung über die Theorie der Gauss'schen Summen

Zprávy Král. Čes. spol. nauk, II. tř., 1903, č. 4, 1–4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501547

IV.

Bemerkung über die Theorie der Gauss'schen Summen.

Von M. Lerch.

Vorgelegt am 9. Januar 1903.

Es bedeuten ϱ, λ, μ drei beliebige ganze Zahlen, von denen jedoch μ von Null verschieden sein soll, und man betrachte die Summe

$$(1) \qquad \Phi(\varrho, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{|2\mu|-1} e^{\frac{\alpha^2\lambda + \alpha\varrho}{\mu}\pi i};$$

es lässt sich bei ihr eine Analogie mit der Thetareihe

$$\vartheta_3(u \mid \omega) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} e^{(\alpha^2\omega + 2\alpha u)\pi i}$$

erwarten, und diese Erwartung bestätigt sich durch die Existenz der Beziehungen

$$(2) \qquad \Phi(\varrho + 2\mu) = \Phi(\varrho), \quad \Phi(\varrho + 2\lambda) = e^{-\frac{\pi i}{\mu}(\varrho + \lambda)} \Phi(\varrho).$$

Durch diese Analogie mit elliptischen Transcendenten gewinnt die arithmetische Funktion $\Phi(\varrho, \lambda, \mu)$ an Interesse, zumal da sie für $\varrho = 0$ in die gewöhnlichen Gauss'schen Summen übergeht. Aus dem Grunde glaube ich die nachfolgenden Betrachtungen, welche beweisen, dass sich die Funktion Φ von eigentlichen Gauss'schen Summen nur unwesentlich unterscheidet, der Oeffentlichkeit übergeben zu dürfen.

Aus der zweiten der Gleichungen (2) folgert man die etwas allgemeinere

$$(2'') \qquad \Phi(\varrho + 2\beta\lambda) = e^{-\frac{\beta\pi i}{\mu}(\varrho + \beta\lambda)} \Phi(\varrho),$$

und in dieser Gleichung nehmen wir der Reihe nach $\beta = 0, 1, 2, \ldots |2\mu| - 1$, und addieren die Resultate. Es kommt

$$\Phi(\varrho) \sum_{\beta=0}^{|2\mu|-1} e^{-\frac{\beta^2\lambda + \beta\varrho}{\mu}\pi i} = \sum_{\beta=0}^{|2\mu|-1} \Phi(\varrho + 2\beta\lambda)$$

oder mit Rücksicht auf unsere Bezeichnung

$$(a) \qquad \Phi(\varrho, \lambda, \mu)\, \Phi(\varrho, \lambda, -\mu)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{\alpha=0}^{|2\mu|-1} e^{\frac{\alpha^2\lambda + \alpha\varrho}{\mu}\pi i} \sum_{\beta=0}^{|2\mu|-1} e^{\frac{2\alpha\beta\lambda\pi i}{\mu}}.$$

Auf der rechten Seite verschwindet die innere Summe immer dann, wenn $\alpha\lambda$ durch μ nicht teilbar ist; um die übrigen Fälle zu erledigen, werde mit δ der grösste gemeinsame Teiler von λ und μ bezeichnet, ferner werde $\lambda = \delta\lambda'$ $\mu = \delta\mu'$ gesetzt. Es hat dann die innere Summe einen von Null verschiedenen Wert, u. zw. $|2\mu|$, wenn α durch μ' teilbar ist, also für

$$\alpha = \varkappa\,|\mu'|, \quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots 2\delta - 1).$$

Nur diese Werte α in der Doppelsumme sind also zu berücksichtigen, und macht man darin von der Schreibweise $\alpha = \varkappa\,|\mu'|$ Gebrauch, so wird die rechte Seite von (a) den Wert

$$(b) \qquad \frac{1}{2}\,|\mu| \sum_{\varkappa=0}^{2\delta-1} (-1)^{\varkappa\lambda'\mu'} e^{\frac{\varkappa\varrho\pi i}{\delta}\operatorname{sgn}\mu}$$

haben, wobei in üblicher Weise mit sign. μ die Grösse $\frac{\mu}{|\mu|}$ oder das Vorzeichen von μ angedeutet wird.

Ich setze nun ϱ sgn. $\mu = \varrho'$ und beachte dass, der Ausdruck (b) auch so geschrieben werden kann

$$\frac{1}{2}\,|\mu| \sum_{\varkappa=0}^{2\delta-1} e^{\frac{\varrho' + \lambda'\mu'\delta}{\delta}\cdot\varkappa\pi i}$$

Er verschwindet also mit Ausnahme des Falles, wo $\left(\frac{\varrho'}{\delta} + \lambda' \ \mu\right)$ eine gerade ganze Zahl ist, wo alsdann auch $\frac{\varrho}{\delta} + \lambda' \mu'$ eine solche Zahl wird.

Man hat daher zunächst das Resultat, dass, wenn δ den grössten gemeinsamen Teiler von λ und μ bedeutet, immer

$$(3) \qquad \Phi(\varrho, \lambda, \mu) = 0, \ \textit{sobald} \ \varrho + \frac{\lambda\mu}{\delta} \ \textit{inkongruent Null} \ (\text{mod. } 2\delta)$$

ist.

Ist andernfalls ϱ durch δ teilbar und $\frac{\varrho}{\delta} + \lambda'\mu'$ gerade, so wird der Ausdruck (b) den Wert $|\mu| \delta = |\mu'| \delta^2$ haben, und die Formel (a) lautet dann

$$\Phi(\varrho, \lambda, \mu)\, \Phi(\varrho, \lambda, -\mu) = |\mu'|\, \delta^2.$$

Nun sind alle drei Zahlen ϱ, λ, μ durch δ teilbar und die Identität

$$\Phi(\varrho, \lambda\ \mu) = \delta\Phi\left(\frac{\varrho}{\delta}, \frac{\lambda}{\delta}, \frac{\mu}{\delta}\right),$$

welche aus der Definizion unmittelbar folgt, zeigt, dass wir an Allgemeinheit nichts verlieren, wenn wir $\delta = 1$ voraussetzen. Wir haben daher das Resultat:

„Wenn der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen λ und μ nicht zu gleicher Zeit in ϱ aufgeht, so ist Φ $(\varrho, \lambda, \mu) = 0$. Sind aber λ und μ relativ prim, so ist

$$(4) \qquad \Phi(\varrho, \lambda, \mu)\, \Phi(\varrho\ \lambda, -\mu) = \frac{1 + (-1)^{\varrho + \lambda\mu}}{2} \cdot |\mu|.$$

Die linke Seite ist aber die Norm der complexen Grösse Φ (ϱ, λ, μ) im gewöhnlichen Sinne, und man sieht daher, dass der absolute Betrag Φ (ϱ, λ, μ) gleich $\sqrt{|\mu|}$ ist, wenn er nicht verschwindet.

Bei gegebenen teilerfremden λ, μ hat ϱ vollkommen bestimmte Parität, da $\varrho \equiv \lambda\mu$ (mod. 2) sein soll; die Funktion Φ (ϱ, λ, μ) wird also, wenn sie von Null verschieden ist, auf die spezielle Grösse

$$(5) \qquad \Phi(\lambda\mu, \lambda, \mu) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^{|2\mu|-1} (-1)^{\alpha\lambda} e^{\frac{\alpha^2\lambda\pi i}{\mu}}$$

zurückgeführt, aus der sich dann vermöge der Relazion (2°) alle übrigen Werte ergeben.