Matyáš Lerch

Zur Bestimmunung des analytischen Existenzbereiches in der Théorie der elliptischen Functionen

Monatsch. Math. Phys. 11 (1900), 107–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501543

Zur Bestimmung des analytischen Existenzbereiches in der Theorie der elliptischen Functionen.

Von **M. Lerch** in Freiburg (Schweiz).

Es soll das Verhalten der Function

$$\varphi(\omega) = \prod_{1}^{\infty} (1 - q^{2\mu}), \quad q = e^{\omega \pi i},$$

in welcher ω eine complexe Veränderliche mit positiv imaginärem Bestandtheile ist, in der Nähe der reellen Axe der ω-Ebene untersucht werden.

Der Logarithmus von $\varphi(\omega)$ lässt sich in die Form

$$\log \varphi(\omega) = -\sum \frac{1}{\nu} q^{2\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \ldots.)$$

setzen; derselbe hängt mit der Function

$$\psi(\omega) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu \nu^2 \pi} q^{2\mu\nu}, \tag{1}$$

durch die Gleichung

$$\frac{d\psi(\omega)}{d\omega} = -2 i \log \varphi(\omega). \tag{2}$$

zusammen.

Die Gleichung (1) lässt sich in der Form

$$\psi(\omega) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \log(1 - e^{2\nu\omega\pi i}) \tag{1a}$$

schreiben, die der folgenden Betrachtung zugrunde liegt. Ist $\omega = x + i y$, $y > o$, so strebt, wie jetzt gezeigt werden soll, der imaginäre Theil $i \psi_1(x, y)$ der Größe $\psi(x + i y)$ für ein unendlich abnehmendes y einem Grenzwert zu.

Damit reichen wir für unsere Aufgabe aus. Nach (1a) ist, wie leicht zu sehen ist,

$$(3) \qquad \psi_1(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y \pi} \sin 2\nu x \pi}{1 - e^{-2\nu y \pi} \cos 2\nu x \pi}.$$

Für ein unendlich abnehmendes y convergiert diese Größe bei irrationalem x gegen

$$(3a) \qquad \psi_1(x, o) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi}.$$

Um dies zu beweisen, hat man zu zeigen, dass man für y eine obere Grenze η angeben kann, derart, dass für alle $y \leqq \eta$ die Differenz $\psi_1(x, y) - \psi_1(x, o)$ absolut kleiner bleibt als eine vorgeschriebene beliebig kleine Größe δ.

Weil die Function arcustangens absolut kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bleibt, so wird jede der Ungleichungen

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y \pi} \sin 2\nu x \pi}{1 - e^{-2\nu y \pi} \cos 2\nu x \pi} \right| < \frac{\delta}{4},$$

$$\left| \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} \right| < \frac{\delta}{4}$$

erfüllt sein, sobald die Zahl m so groß genommen wird, dass

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\delta}{2}$$

ist. Nachdem die Zahl m dieser Bedingung gemäß bestimmt wurde, lässt sich eine positive Größe η angeben, die so klein ist, dass für $y \leqq \eta$ jede der m Differenzen

$$\frac{1}{\nu^2 \pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y \pi} \sin 2\nu x \pi}{1 - e^{-2\nu y \pi} \cos 2\nu x} - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} \right);$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots m)$$

absolut kleiner als $\frac{\delta}{2m}$ sein wird, und deren Summe daher kleiner als $\frac{\delta}{2}$.

Nun ist

$$\psi_1(x,y) - \psi_1(x,o) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu^2 \pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y \pi} \sin 2\nu x \pi}{1 - e^{-2\nu y \pi} \cos 2\nu x \pi} - \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} \right) +$$

$$+ \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-2\nu y \pi} \sin 2\nu x \pi}{1 - e^{-2\nu y \pi} \cos 2\nu x \pi} -$$

$$- \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 \pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi}.$$

Die erste Summe rechts ist kleiner als $\frac{\delta}{2}$, die beiden anderen sind je kleiner als $\frac{\delta}{4}$, und somit die rechte Seite kleiner als δ; es besteht daher die Ungleichung

$$|\psi_1(x,y) - \psi_1(x,o)| < \delta$$

für alle Werte y zwischen Null und η, und unsere Behauptung $\lim\limits_{y=0} \psi_1(x,y) = \psi_1(x,o)$ ist erwiesen, sobald nur x eine irrationale Zahl ist.

Da nun

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} = \operatorname{arctg} (\cot \nu x \pi)$$

ist und da diese Größe mit $\operatorname{arctg} (\cot \rho \pi)$ übereinstimmt, falls $\nu x - \rho$ eine ganze Zahl ist, wobei man für ρ die Bedingung $o \leqq \rho < 1$ aufstellen kann, so wird unsere Größe den Wert

$$\operatorname{arctg} (\cot \rho \pi) = \left(\frac{1}{2} - \rho\right) \pi$$

haben, da die rechte Seite immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ enthalten ist.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{R}(z)$ den kleinsten positiven Rest der reellen Größe z, so dass also

$$\mathfrak{R}(z) = z - E(z)$$

ist, so wird $\rho = \mathfrak{R}(\nu x)$, und daher

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin 2\nu x \pi}{1 - \cos 2\nu x \pi} = \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{R}(\nu x)\right) \pi,$$

so dass der Ausdruck (3a) die Form

$$(4)\qquad \psi_1(x, o) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x)}{\nu^2}$$

annimmt.

Diese Function erinnert in Bezug auf ihre arithmetische Definitionsart an diejenige überall unstetige Function, welche Riemann in seiner Habilitationsschrift behandelt. Der Umstand, dass derartige Ausdrücke, welche nach dem Princip der Singularitätenverdichtung gebildet werden können, mit dem äußerst regelmäßigen Gebiete der elliptischen Functionen in Verbindung stehen, ist wohl bemerkenswert.

Die Function $\psi_1(x, o)$ ist in jedem einzelnen einem irrationalen Werte x entsprechenden Punkte stetig, sie besitzt außerdem für jeden rationalen Wert x_0 völlig bestimmte Grenzwerte

$$\lim_{h=0} f(x_0 + h) = f(x_0 + 0), \lim_{h=0} f(x_0 - h) = f(x_0 - 0),$$

wenn der Kürze wegen $\psi_1(x, o) = f(x)$ gesetzt wird. Dieser Umstand hat in den Formeln

$$\lim_{h=0} \Re(z \pm h) = \Re(z), \text{ wenn } z \text{ gebrochen,}$$

$$\lim_{h=0} \Re(z + h) = \Re(z + 0) = \Re(z) = 0,$$

und

$$\lim_{h=0} \Re(z - h) = \Re(z - 0) = \Re(z) + 1 = 1, \text{ wenn}$$

z ganzzahlig, seinen Ursprung, und wird wie folgt bewiesen.

Es sei $x_0 = \frac{p}{q}$ eine rationale Zahl, wobei p und q theilerfremd und $q > 0$ angenommen werde. Man bilde nun die zwei Reihen

$$f(x_0 + h) = \sum_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 + \nu h)}{\nu^2},$$

$$f(x_0 - h) = \sum_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x_0 - \nu h)}{\nu^2}.$$

Dass die durch folgende Gleichungen erklärten Größen $f(x_0+0)$ und $f(x_0-0)$

$$\sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2}-\Re(\nu x_0+0)}{\nu^2}=f(x_0+0)$$

$$\sum_1^\infty \frac{\frac{1}{2}-\Re(\nu x_0-0)}{\nu^2}=f(x_0-0)$$

verschieden sind, folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)=\sum_1^\infty \frac{\Re(\nu x_0-0)-\Re(\nu x_0+0)}{\nu^2},$$

deren rechte Seite lauter positive oder verschwindende Glieder hat. Die von Null verschiedenen Glieder haben immer die Zahl Eins im Zähler und entsprechen denjenigen Werten von ν, welche Multipla von q sind, also

$$f\left(\frac{p}{q}+0\right)-f\left(\frac{p}{q}-0\right)=\sum_{\mu=1}^\infty \frac{1}{\mu^2 q^2}=\frac{\pi^2}{6q^2}.$$

Nun soll die Übereinstimmung des Ausdruckes $f(x_0+0)$ mit dem Grenzwerte $\lim\limits_{h=0} f(x_0+h)$ bewiesen werden.

Wir betrachten die Differenz

$$(5)\qquad \begin{aligned} f(x_0+h)-f(x_0+0) &= \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\Re(\nu x_0+0)-\Re(\nu x_0+\nu h)}{\nu^2} \\ &+\sum_{\nu=m+1}^\infty \frac{\frac{1}{2}-\Re(\nu x_0+\nu h)}{\nu^2}-\sum_{\nu=m+1}^\infty \frac{\frac{1}{2}-\Re(\nu x_0+0)}{\nu^2}. \end{aligned}$$

Wenn man für eine beliebig vorgelegte positive Zahl δ die ganze Zahl m so bestimmt, dass

$$\sum_{\nu=m+1}^\infty \frac{1}{\nu^2}<\frac{\delta}{2}$$

wird, so wird jede der beiden Reihen auf der rechten Seite der letzten Gleichung absolut kleiner sein als $\frac{\delta}{4}$, und nachdem m bestimmt ist, wird man eine so kleine Zahl k finden können, dass für alle h, welche den Ungleichungen $0<h\leqq k$ genügen, die m Glieder des endlichen Ausdrucks sich stetig ändern, und absolut

kleiner als $\frac{\delta}{2m}$ werden. Alsdann ist die rechte Seite von (5) absolut kleiner als δ, und daher

$$|f(x_0+h)-f(x_0+0)|<\delta \text{ für alle } h \leqq k.$$

Daher ist:

$$\lim_{h=0} f(x_0+h)=f(x_0+0).$$

Auf demselben Wege lässt sich auch die Gleichung

$$\lim f(x_0-h)=f(x_0-0)$$

beweisen.

Nehmen wir jetzt an, dass sich unsere Function $\varphi(\omega)$ in einem Gebiete regulär verhält, in dessen Innern ein Stück der reellen Axe der ω-Ebene verläuft; im betrachteten Gebiete wird vermöge (2) auch $\psi(\omega)$ eine reguläre analytische Function sein, und es wird auch die Größe $\lim\limits_{y=0} \psi(x+iy)=\psi(x)$ eine analytische Function der reellen Variablen x sein müssen, und infolgedessen auch ihre beiden Componenten $\psi_0(x,0)$ und $\psi_1(x,0)$. Für irrationale Werte von x haben wir aber für die Function $\psi_1(x,0)$ die Darstellung (4) bewiesen, und haben zu gleicher Zeit erkannt, dass für rationale x_0 die beiden Grenzwerte $\psi_1(x+0,0)$, $\psi_1(x-0,0)$ verschieden ausfallen; da man dieselben jedoch vermittelst irrationaler Werte h erzeugen kann, so benützt man bei dem Grenzübergange der Voraussetzung nach analytische Functionen $\psi_1(x+h,0)$ und $\psi_1(x-h,0)$. Für solche nothwendig stetige Functionen sind aber die beiden Grenzwerte identisch, so dass man also auf einen Widerspruch stößt. Deshalb ist unsere Annahme betreffs des regulären Verhaltens von $\psi(\omega)$ unzulässig und die Function lässt sich über die reelle Axe hinaus nicht fortsetzen. Infolge dessen ist auch der Existenzbereich der Function $\varphi(\omega)$ mit dem Convergenzbereich des Productes identisch.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen Platz finden, die mit den obigen Ausführungen in einem gewissen Zusammenhang stehen.

Der reelle Theil der Function $\psi(x+iy)$ lautet

$$\psi_0(x,y)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\log\sqrt{1+e^{-4\nu y\pi}-2e^{-2\nu y\pi}\cos 2\nu x\pi}$$

und ein bloß formaler Grenzübergang würde ergeben

$$\psi_0(x,0)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2\pi}\log|2\sin\nu x\pi|. \tag{6}$$

Die rechte Seite hat zunächst für rationale x keinen Sinn; von irrationalen x sind es dann alle algebraischen Zahlen, für welche die Reihe convergiert. Unter den übrigen irrationalen, also transcendenten Zahlen, kann es wahrscheinlich auch solche geben, die eine convergente Reihe ergeben, man ist aber im Stande in jedem

Intervalle transcendente Werte anzugeben, für welche die Reihe divergiert.

Die Formel (1) erhält eine neue Gestalt, wenn man darin $\mu\nu = n$ setzt und mit $\Theta_1(n)$ die Summe aller Divisoren von n (die Zahl selbst und die Einheit inbegriffen) bezeichnet. Es ergibt sich

$$\psi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} q^{2n};$$

wenn es erlaubt ist, hier den Grenzübergang zu $y = 0$ durch bloßes Einsetzen auszuführen, wird man auf die Formel

$$\psi_1(x, 0) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} \sin 2nx\pi \tag{7}$$

geführt.

Ist nun die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \Re(\nu x)}{\nu^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^2 \pi} \sin 2nx\pi \tag{8}$$

richtig oder nicht, so lassen sich aus ihr doch richtige Folgerungen ziehen. Multipliciert man z. B. mit $e^{-ax}dx$ und integriert von Null bis Unendlich, so ergibt sich die Relation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{a}{\nu}}} - \frac{\nu}{a} - \frac{1}{2}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n} \cdot \frac{2a\pi}{a^2 + 4n^2\pi^2}. \tag{9}$$

Ebenso lässt sich die folgende Gleichung, die sich aus (8) durch Integration ergibt, streng begründen:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\Re^2(\nu x) - \Re(\nu x) + \frac{1}{6}}{\nu^3} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Theta_1(n)}{n^3} \cos 2nx\pi. \tag{10}$$ [1]

[1] Ich bemerkte erst während des Druckes, dass die vorliegenden Ausführungen bereits in Riemann's Fragmenten über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen (Werke, II. Auflage, p. 453 u. ff.) implicite enthalten sind. Dieselben verfolgen allem Anscheine nach die gleiche Tendenz und scheinen einige Partien der Riemann'schen Habilitationsschrift veranlasst zu haben. Der darin im ausgedehnten Maße gemachte Gebrauch von analytischen Darstellungen arithmetischer Ausdrücke macht Riemann zum Urheber dieses später von Kronecker wieder aufgenommenen Forschungsgebietes.

Dass ich trotz dieser Erkenntnis die Veröffentlichung dieser Note nicht einzustellen brauchte, wird der kundige Leser wohl einsehen.