Matyáš Lerch
Poznámka z theorie funkcí

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 9 (1900), č. 8, 1–5

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501539

Poznámka z theorie funkcí.

Podává

M. Lerch.

(Předloženo 20. prosince 1899.)

1. Předpokládejme, že lze analytickou realnou funkci realné proměnné $f(x)$, která se na všech místech (realného) oboru $(x_0 \ldots x_1)$ délky $x_1 - x_0 = l$ chová pravidelně, rozvinouti v řadu trigonometrickou

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(a_\nu \cos \frac{2\nu x\pi}{l} + b_\nu \sin \frac{2\nu x\pi}{l} \right),$$

platnou v tomto oboru

$$(x_0 < x < x_1).$$

Předpokládejme dále, že řada (1) tak rychle konverguje, že též veškery řady

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^k \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

jsou konvergentní; pak platí rovnice (1) též pro $x = x_0$ a pro $x = x_1$ a dále obdrží se veškery derivace $f^{(k)}(x)$ funkce $f(x)$ přímým differencováním řady (1) člen po členu; odtud pak plynou rovnice

$$(3) \qquad f(x_0) = f(x_1),\ f'(x_0) = f'(x_1),\ f''(x_0) = f''(x_1), \ldots$$

z nichž vychází, že Taylorovské rozvoje funkce $f(x)$ platné v okolí bodů x_0 a x_1 mají stejné součinitele. To jest, bude v jistém okolí bodu x_0 a ve shodném s ním okolí bodu x_1 platit rovnice

$$f(x) = \mathfrak{P}(x - x_0), \text{ resp. } f(x) = \mathfrak{P}(x - x_1).$$

Je-li x v okolí bodu x_0, bude $x+l$ v okolí bodu x_1, takže máme současně

$$f(x)=\mathfrak{P}(x-x_0),\ f(x+l)=\mathfrak{P}(x+l-x_1)=\mathfrak{P}(x-x_0),$$

čili

$$f(x)=f(x+l).$$

Funkce $f(x)$ má tedy periodu l a musí se chovati pravidelně uvnitř jistého pásu obsahujícího osu realnou. Musí tedy existovati kladná veličina σ, tak že pro veškery hodnoty y obsažené mezi $-\sigma$ a σ bude lze funkci $f(x+iy)$ vyjádřiti řadou Laurentovou; ta však musí splývati pro $y=0$ s naší řadou (1), a tedy bude

$$f(x+iy)=a_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(a_\nu \cos\frac{2\nu\pi(x+iy)}{l}+b_\nu \sin\frac{2\nu\pi(x+iy)}{l}\right),$$

t. j. řada (1) musí též konvergovati pro jisté komplexní hodnoty proměnné x.

Výsledek náš lze takto vyjádřiti:

»Řada trigonometrická

$$\sum_{1}^{\infty}\left(a_\nu \cos\frac{2\nu x\pi}{l}+b_\nu \sin\frac{2\nu x\pi}{l}\right),$$

kterou lze do nekonečna postupně differencovati člen po členu, konverguje buď také pro jisté komplexní hodnoty (ve kterémžto případě chová se analyticky pravidelně poblíže osy realné), aneb konverguje pouze pro realné hodnoty x a v tom případě má nutně v každém oboru $(x_0 \ldots x_0+l)$ místa zvláštní.«

2. Znamenejme nyní

(4) $$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots .\ m_\nu,\ \ldots .$$

řadu kladných celistvých čísel v pořádku rostoucím, která od jistého místa počínaje mají vždy určitého společného dělitele, jenž se může státi tak velkým jak libo, začneme-li od čísel na místě dosti vzdáleném stojících.

Realné konstanty

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots .$$

buďte tak voleny, aby veškery řady

(5) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} m_\nu^{\varkappa}\sqrt{a_\nu^2+b_\nu^2}\quad (\varkappa=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

konvergovaly, ale aby řada trigonometrická

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\, m_\nu\, x\, \pi + b_\nu \sin 2\, m_\nu\, x\, \pi) \tag{6}$$

konvergovala jediné pro realná x.

I tvrdíme, že funkce $f(x)$ není nikde analytickou, takže nikdy nebude lze ji vyjádřiti řadou Taylorovou.

Připusťme, že opak platí, takže se funkce (6) chová pravidelně na jistém třeba jen úzkém oboru realném $(\alpha \ldots \beta)$. Ustanovme celistvé číslo p tak, aby největší společný dělitel čísel

$$m_{p+1},\ m_{p+2},\ m_{p+3},$$

přesahoval veličinu $\dfrac{1}{\beta-\alpha}$; znamenáme-li n zmíněného dělitele, bude lze uvnitř oboru $(\alpha \ldots \beta)$ vytknouti obor $\left(x_0 \ldots . x_0+\dfrac{1}{n}\right)$, ve kterémž se funkce $f(x)$ chová tím spíše pravidelně. Rozdělme nyní řadu (6) ve dvě části

$$S(x)=\sum_{\nu=1}^{p}(a_\nu \cos 2\, m_\nu\, x\, \pi + b_\nu \sin 2\, m_\nu\, x\, \pi),$$

$$f_1(x)=\sum_{\nu=p+1}^{\infty}(a_\nu \cos 2\, m_\nu\, x\, \pi + b_\nu \sin 2\, m_\nu\, x\, \pi),$$

z nichž první jest funkce analytická.

V části druhé budou podíly

$$\frac{m_\nu}{n}=m_\nu'$$

čísla celistvá, a zavedeme-li označení

$$l=\frac{1}{n},$$

bude lze výraz $f_1(x)$ psáti takto:

$$f_1(x)=\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\left(a_\nu \cos\frac{2\, m_\nu'\, x\, \pi}{l} + b_\nu \sin\frac{2\, m_\nu'\, x\, \pi}{l}\right). \tag{7}$$

Dle supposice nemůže tato řada konvergovati pro žádné opravdu komplexní x, ale lze ji differencovati člen po členu tolikrát za sebou, kolik libo; zároveň ale jest $f_1(x)$ rozdílem funkcí $f(x)$ a $S(x)$, jež na $(x_0 \ldots x_0+l)$ jsou analyticky pravidelny, a tedy jest sama funkcí analyticky pravidelnou.

Tato okolnost se však s předešlou nesnáší, poněvadž řada (7) je zvláštní případ řady (1) v předešlém odstavci studované. Dospěvše k odporu, musili jsme vyjíti ze supposice nesprávné, a ta byla, že funkce $f(x)$ se chová pravidelně v jistém oboru $(\alpha \ldots \beta)$. Dokázali jsme tímto nepřímým způsobem, že funkce daná řadou (6) se v žádném sebe menším oboru pravidelně chovati nemůže.

Takovou řadou, jako zde uvažovaná funkce (6) jest řada

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2\, a^n\, x\, \pi}{n!}, \tag{8}$$

v níž a znamená číslo celistvé větší jedné. Neboť předně čísla $m_\nu = a^\nu$, v nichž $\nu \geqq p$, mají společného dělitele a^p, jenž se může státi tak velikým, jak si kdo přeje, zvětšíme-li dostatečně číslo p; dále jsou všecky řady

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a^{\varkappa \nu}}{\nu!} \; (\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

konvergentní, kdežto pro komplexní x řada direrguje. Neb součet

$$2 \cos k\,(x + i y) = e^{k(ix-y)} + e^{k(-ix+y)}$$

jest absolutně větší než rozdíl prostých hodnot sčítanců

$$e^{ky} - e^{-ky}.$$

V našem případě $k = 2\, a^n\, \pi$ roste přes všecky meze, a tím při $y > 0$ stává se e^{-ky} malým, takže lze říci, že platí

$$|\cos 2\, a^n\, \pi\,(x + i y)| > \tfrac{1}{4}\, e^{2 a^n y \pi},\; y > 0,$$

a poněvadž řada

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{2 a^n y \pi}}{n!}$$

při kladném y vždy diverguje,*) jest tvrzení dokázáno.

Trigonometrická řada (8) tedy funkcí analytickou není, ačkoli veškery její derivace jsou funkce veskrze konečné a spojité. Vyložený právě výsledek řady (8) se týkající odůvodnil jsem jiným způsobem ve svojí práci Ueber die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen uveřejněné ve 103. svazku Crelleova žurnálu. Před tím byl Paul du

---

*) Jest patrně $n! < n^n$, tedy obecný člen

$$\frac{e^{2 a^n y \pi}}{n!} > \frac{e^{2 a^n y \pi}}{n^n} = e^{2 a^n y \pi - n \log n},$$

a tu pro dosti veliká n exponent je velmi veliký a kladný.

Bois-Reymond (Mathem. Annalen, sv. 22.) tušil existenci tohoto druhu funkcí, ale příklady, kterými znamenitý tento mathematik pokoušel se doložiti svoje domnění, ukázaly se býti klamnými, o čemž čtenář nalezne bližší výklad v naší rozpravě Ueber die analytische Natur einer von P. du Bois-Reymond betrachteten Function (Monatshefte für Mathematik und Physik, VIII. ročník), po případě v její francouzském překladu (Acta mathematica, sv. 22. str. 371).
