Matyáš Lerch

O novém druhu analytických výrazů, jež se vyskytují v theorii jistých integrálů

Rozpravy Čes. akademie, II. tř., 9 (1900), č. 6, 1–17

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/501536

O novém druhu analytických výrazů, jež se vyskytují v theorii jistých integrálů.

Sdílí

M. Lerch.

(Předloženo 20. prosince 1899.)

---

1. Na konci svojí rozpravy »Z počtu integrálního«, zejména pak v rozpravě »Úvahy z počtu integrálního« *) a nejnověji v časopise Acta mathematica **) zabýval jsem se integrálem

$$(1) \qquad L(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{\left(w^2 + 2\,w\,x \cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1 + x^\sigma)}.$$

Řady tam uvedené měly tu vlastnost, že konvergovaly toliko pro komplexní hodnoty veličiny σ, což se zdálo souviseti s větou o nemožnosti funkcí s dvěma realnými periodama, nalézajícíma se v poměru irracionalném. Upraví-li se však tyto řady zcela jednoduchou transformací, zjednáme si výrazy, jež konvergují též pro realné hodnoty σ, pokud s je komplexní, předpokládá-li se kladná realná veličina w v mezích $(0 \ldots 1)$.

V první z uvedených rozprav dokázána základní vlastnost funkce L, a sice pro realné $\sigma > 1$; píšeme-li na dále $L(s)$ na místě $L(w, s, \sigma)$, vyjádří se řečená vlastnost rovnicí

*) Rozprav č. A. II. třídy ročník V., číslo 23.

**) Sur quelques intégrales définies ayant rapports avec les fonctions elliptiques; svazek 22.

$$(2) \qquad w \sin \frac{s+1}{\sigma} \pi \,.\, L(s) + \sin \frac{s\pi}{\sigma} L(s+1) = \frac{\pi}{\sigma(w+1)}.$$

Abychom jí rozuměli, třeba řešiti otázku, pro které hodnoty s integrál (1) konverguje. Jsou to patrně hodnoty, jichž realná část jest obsažena mezi -1 a $1+\sigma$; tyto hodnoty proměnné s v geometrickém znázornění odpovídají bodům nekonečného pásu $(-1 \ldots . 1+\sigma)$, omezeného rovnoběžkami s osou pomyslnou vedenými body -1 a $1+\sigma$; v tomto pásu chová se funkce $L(s)$ pravidelně a lze v něm umístiti celé kontinuum bodů s, pro něž také $s+1$ přísluší do pásu.

Vztah (2) lze psáti po dělení na $\sin \frac{s\pi}{\sigma} . \sin \frac{s+1}{\sigma}\pi$ a po užití vztahu

$$\frac{1}{\sin \frac{s\pi}{\sigma} . \sin \frac{s+1}{\sigma}\pi} = \frac{\cot \frac{s\pi}{\sigma} - \cot \frac{s+1}{\sigma}\pi}{\sin \frac{\pi}{\sigma}}$$

ve tvaru následujícím:

$$w \frac{\sin \frac{\pi}{\sigma}}{\sin \frac{s\pi}{\sigma}} L(s) + \frac{\sin \frac{\pi}{\sigma}}{\sin \frac{s+1}{\sigma}\pi} L(s+1) + \frac{\pi}{\sigma(w+1)} \cot \frac{s+1}{\sigma}\pi$$
$$= \frac{\pi}{\sigma(w+1)} \cot \frac{s\pi}{\sigma}.$$

Nahradíme-li na pravé straně veličinu

$$\frac{1}{w+1} \quad \text{výrazem} \quad -\frac{w}{w+1} + 1,$$

bude lze výsledek upraviti takto:

$$w \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\sigma}}{\sin \frac{s\pi}{\sigma}} L(s) + \frac{\pi}{\sigma(w+1)} \cot \frac{s\pi}{\sigma} \right)$$
$$+ \left(\frac{\sin \frac{\pi}{\sigma}}{\sin \frac{s+1}{\sigma}\pi} L(s+1) + \frac{\pi}{\sigma(w+1)} \cot \frac{s+1}{\sigma}\pi \right) = \frac{\pi}{\sigma} \cot \frac{s\pi}{\sigma};$$

znamenáme-li tedy

$$(3) \qquad F(s) = \frac{\sin\frac{\pi}{\sigma}}{\sin\frac{s\pi}{\sigma}} L(s) + \frac{\pi}{\sigma(w+1)} \cot\frac{s\pi}{\sigma},$$

obdržíme vztah náš ve tvaru

$$(2^a) \qquad w\,F(s) + F(s+1) = \frac{\pi}{\sigma} \cot\frac{s\pi}{\sigma}.$$

Druhá základní vlastnost funkce L spočívala ve vztahu

$$(4) \qquad L(s) + L(s+\sigma) = \frac{\pi\, w^{s-1} \sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi},$$

jenž po zavedení funkce F obdrží tvar rovněž jednodušší:

$$(4^a) \qquad F(s) - F(s+\sigma) = \frac{\pi\, w^{s-1}}{\sin s\pi}.$$

Z rovnic (2^a) a (4^a) vyvodíme nyní přímo analytické vyjádření funkce $F(s)$ Především kladme v rovnici (2^a) $s - m$ za s, a násobme $-(-w)^m$; v rovnici tak vzniklé

$$\begin{aligned}(-1)^{m-1} w^{m-1} F(s-\overline{m-1}) - (-1)^m w^m F(s-m) \\ = (-1)^m w^{m-1} \frac{\pi}{\sigma} \cot\frac{m-s}{\sigma}\pi\end{aligned}$$

položme $m = 1, 2, 3, \ldots n$ a sečtěme výsledky; i vyjde

$$F(s) = (-1)^n w^n F(s-n) + \frac{1}{w}\sum_{m=1}^{n} (-w)^m \frac{\pi}{\sigma} \cot\frac{m-s}{\sigma}\pi.$$

Řada na pravé straně stojící bude konvergentní, jakmile s není reálné a je-li $|w| < 1$. Proto musí existovati též

$$\lim_{n=\infty} (-w)^n F(s-n) = \varphi(s),$$

i bude

$$(5) \qquad F(s) = \varphi(s) + \frac{\pi}{\sigma w} \sum_{m=1}^{\infty} (-w)^m \cot\frac{m-s}{\sigma}\pi.$$

Dosadíme-li tento výraz do rovnice (2^a), obdržíme

$$(6^a) \qquad w\,\varphi(s) + \varphi(s+1) = 0;$$

dosadíme-li hodnotu (5) do rovnice (4ª), ukáže se výsledek

$$(6^b) \qquad \varphi(s) - \varphi(s+\sigma) = \frac{\pi\, w^{s-1}}{\sin s\pi},$$

z něhož máme kladouce $s + \nu\sigma$ za s

$$\varphi(s+\nu\sigma) - \varphi(s + \overline{\nu+1}\,\sigma) = \frac{\pi\, w^{s+\nu\sigma-1}}{\sin(s+\nu\sigma)\pi},$$

a odtud plyne sečtením pro $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$:

$$\varphi(s) = \varphi(s+n\sigma) + \sum_{0}^{n-1} \frac{\pi\, w^{s+\nu\sigma-1}}{\sin(s+\nu\sigma)\pi}.$$

Pokud $|\,w\,| < 1$, bude lze při kladném σ a při komplexním s prodloužiti řadu do nekonečna, z čehož plyne existence limity

$$\lim_{n=\infty} \varphi(s+n\sigma) = \psi(s),$$

načež

$$(7) \qquad \varphi(s) = \psi(s) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\pi\, w^{s+\nu\sigma-1}}{\sin(s+\nu\sigma)\pi};$$

dosadíme-li tento výraz do rovnic (6ª) a (6ᵇ), vyjde

$$(8) \qquad \begin{cases} w\,\psi(s) + \psi(s+1) = 0, \\ \psi(s) - \psi(s+\sigma) = 0. \end{cases}$$

Z rovnic těchto plyne

$$\frac{\psi'(s+1)}{\psi(s+1)} = \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} = \frac{\psi'(s+\sigma)}{\psi(s+\sigma)},$$

předpokládá-li se, že ψ jest od nully různo. Funkce analytická

$$\frac{\psi'(s)}{\psi(s)}$$

má tedy dvě realné periody 1 a σ, a musí tedy při irracionalném σ býti konstantou, takže bude

$$\psi(x) = c\,e^{a x}.$$

Rovnice (8) pak poskytnou

$$(w+e^{a})\,c\,e^{ax}=0,\ (e^{a\sigma}-1)\,c\,e^{ax}=0;$$

je-li $a \gtrless 0$, bude vůči podmínce $\sigma > 0$ veličina $e^{a\sigma}-1$ od nully různou a tedy $c\,e^{ax}=0$, t. j. $c=0$, z čehož by následovalo $\psi(x)=0$.

Je-li však $a=0$, bude nutně $w+e^{a}=w+1$ od nully různo, ježto jsme předpokládali $|w|<1$, a tedy musí opět $c=0$.

Rovnice (8) tedy nelze splniti jinou jednoznačnou funkcí analytickou než $\psi(s)=0$; vůči tomuto výsledku nabýváme z rovnic (7) a (5) hledaného vyjádření funkce F ve tvaru

$$F(s)=\frac{\pi}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi}+\frac{\pi}{\sigma w}\sum_{m=1}^{\infty}(-w)^{m}\cot\frac{m-s}{\sigma}\pi. \tag{9}$$

Vztah tento, jejž lze psáti

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{w}{\sigma(w+1)}\cot\frac{s\pi}{\sigma}+\frac{w\sin\frac{\pi}{\sigma}}{\pi\sin\frac{s\pi}{\sigma}}L(w,s,\sigma)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi}+\frac{1}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}(-w)^{m}\cot\frac{m-s}{\sigma}\pi\end{aligned}\right. \tag{9a}$$

dokázán byl za podmínek $|w|<1$, $\sigma>1$, z nichž druhá pochází odtud že základní vztah (2) byl odvozen při její platnosti.

Má-li integrál (1) existovati, musí v celém integračním oboru $(0\ldots.\infty)$ veličiny

$$1+x^{\sigma},\ w^{2}+2\,w\,x\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^{2}$$

býti od nully různy; o prvé to zajištěno tím, že σ není ryze pomyslné, druhá veličina pak by zmizela pro hodnoty x tvaru

$$x=-w\,e^{\frac{\pi i}{\sigma}};$$

hodnoty σ této rovnici pro realná kladná x hovící jsou v případě realného kladného w dány rovnicí

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\pi i}\log\frac{x}{w}+\lambda,\ (\lambda=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots),$$

i dlužno vyloučiti hodnoty σ, pro něž tato možnost nastane. Poněvadž původně bylo $0<\frac{1}{\sigma}<1$, dlužno předpokládati, že realná část veličiny $\frac{1}{\sigma}$ zůstává mezi -1 a 1.

VI.

Proto jsme v našem vzorci (9^a) nuceni předpokládati $\sigma > 1$ (ježto chceme míti σ realné), an by po případě za nedodržení této podmínky integrál L znamenal zcela jinou funkci.

Při irracionalném σ pouze jeden člen na pravé straně stane se nekonečným pro $s = 0$, a sice je to začáteční člen $n = 0$ první řady; převeďme jej na levou stranu, a u výsledku

$$(9^b)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{w}{\sigma(w+1)}\cot\frac{s\pi}{\sigma} + \frac{w\sin\frac{\pi}{\sigma}}{\pi\sin\frac{s\pi}{\sigma}} L(s) - \frac{w^s}{\sin s\pi} \\ &= \sum\left(\frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi} + \frac{1}{\sigma}(-w)^m\cot\frac{m-s}{\sigma}\pi\right) \end{aligned}\right.$$

přejděme k mezím pro $s = 0$; vyjde tak vzorec

$$(10)\quad \begin{aligned} &\frac{\sigma w}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{\sigma} L'(0) - \frac{\log w}{\pi} \\ &= \lim_{s=0}\sum\left(\frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi} + \frac{1}{\sigma}(-w)^m\cot\frac{m-s}{\sigma}\pi\right), \end{aligned}$$

při čemž znamenáno

$$L'(0) = \int_0^\infty \frac{\log x\, dx}{(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2)(1+x^\sigma)}.$$

Proti obyčeji přicházejí na pravých stranách rovnic (9^b) a (10) za znamením součtu Σ dva ukazovatelé součtoví m a n; má se tím naznačiti, že v prvním členu se má klásti za n každá z hodnot $n = 1, 2, 3, \ldots$ jen jednou, podobně ve členu druhém za m, ale že bude po případě nutno jisté členy (m) spojiti s určitými členy (n), aby se mezní přechod dal provésti.

2. Nežli provedeme mezní přechod na pravé straně rovnice (10), ukažme, že existují veličiny irracionalné σ (> 1), pro něž obě řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi},\quad \frac{1}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}(-w)^m\cot\frac{m\pi}{\sigma},$$

které vzniknou z pravé strany (10) prostým dosazením $s = 0$, jsou konvergentní; a sice mají tuto vlastnost veškery realné veličiny algebraické σ, t. j. takové, které jsou kořeny rovnic algebraických s celistvými součiniteli.

Buď na př. σ realný kořen rovnice nepřevodné stupně $\varkappa > 1$,

$$\varphi(x) \equiv a_0 x^\varkappa + a_1 x^{\varkappa-1} + a_2 x^{\varkappa-2} + \ldots + a_\varkappa = 0,$$

a buďte $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{\varkappa-1}$ ostatní kořeny této rovnice. Výraz

$$\pm a_0 (n\sigma - m)(n\sigma_1 - m)(n\sigma_2 - m)\ldots(n\sigma_{\varkappa-1} - m)$$
$$= a_0 m^\varkappa + a_1 m^{\varkappa-1} n + a_2 m^{\varkappa-2} n^2 + \ldots + a_\varkappa n^\varkappa$$

bude číslo celistvé kladné neb záporné, ale od nully různé, značí-li m, n jakákoli čísla celistvá; prostá hodnota jeho bude tedy nanejméně jednotkou a z toho plyne nerovnost

$$\left|(n\sigma - m).\left(\sigma_1 - \frac{m}{n}\right)\left(\sigma_2 - \frac{m}{n}\right)\ldots\left(\sigma_{\varkappa-1} - \frac{m}{n}\right)\right| \geqq \frac{1}{a_0 n^{\varkappa-1}}.$$

Je-li $n\sigma - m = \vartheta$ malá veličina, bude při dosti velikém n výraz

$$\left(\sigma_1 - \frac{m}{n}\right)\left(\sigma_2 - \frac{m}{n}\right)\ldots\left(\sigma_{\varkappa-1} - \frac{m}{n}\right)$$

míti hodnotu

$$\left(\sigma_1 - \sigma + \frac{\vartheta}{n}\right)\left(\sigma_2 - \sigma + \frac{\vartheta}{n}\right)\ldots\left(\sigma_{\varkappa-1} - \sigma + \frac{\vartheta}{n}\right),$$

která se velmi málo liší od veličiny

$$(\sigma_1 - \sigma)(\sigma_2 - \sigma)\ldots(\sigma_{\varkappa-1} - \sigma) = \pm\frac{1}{a_0}\varphi'(\sigma);$$

znamenáme-li její hodnotu

$$\pm\frac{1}{a_0}[\varphi'(o) + \vartheta_1],$$

bude tedy platit nerovnost

$$|n\sigma - m| \geqq \frac{1}{|\varphi'(\sigma) + \vartheta_1| . n^{\varkappa-1}}.$$

Znamenáme-li pak ε jakoukoli malou veličinu kladnou, ale stálou, bude pro dosti veliká n veličina ϑ_1 absolutně menší než ε, a tedy tím spíše *)

(11) $$|n\sigma - m| > \frac{1}{G n^{\varkappa-1}},$$

při čemž G značí veličinu $|\varphi'(\sigma)| + \varepsilon$.

Není-li pak veličina $n\sigma - m$ velmi malá, bude nerovnost (11) tím spíše splněna, je-li jen číslo n dosti veliké.

Následovně bude lze ke každému algebraickému číslu σ stupně $\varkappa$ určiti konstantu G tak, že pro všecka celistvá čísla m, n, z nichž druhé n převyšuje určitou mez, bude platit nerovnost (11.)

*) Viz o této větě Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen.

Z nerovnosti té plyne též, je-li $m = \left[n\sigma + \frac{1}{2}\right]$ celistvé číslo veličině $n\sigma$ nejblíže ležící, že bude

$$|\sin n\sigma\pi| > \sin\frac{\pi}{G n^{\varkappa - 1}},$$

a tedy budou členové řady

$$\sum \frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi}$$

od jistého místa počínaje absolutně menší než členové řady

$$\sum \frac{w^{n\sigma}}{\sin\frac{\pi}{G n^{\varkappa-1}}},$$

která za podmínky $w < 1$ konverguje, a sice stejně rychle jako řada

$$\sum_{1}^{\infty} n^{\varkappa - 1} w^{n\sigma}.$$

Tím dokázáno, že za podmínky $|w| < 1$ prvá z našich řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi}$$

konverguje absolutně, značí-li σ číslo algebraické irracionalné, a podobně se to ukáže o řadě druhé:

$$\frac{1}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}(-w)^m \cot\frac{m\pi}{\sigma}.$$

3. Je-li σ číslo transcendentní, t. j. takové, že nehoví žádné rovnici algebraické s celistvými součiniteli*), není mi známo, může-li také v tomto případě jedna neb druhá z našich řad konvergovati. Můžeme však nalézti transcendentní hodnoty σ, pro něž řady ty divergují tím způsobem, že členové jich, příslušní k jisté řadě hodnot n rostou přes vsecky meze.

Tuto vlastnost mají na příklad veličiny tvaru

$$\sigma = c_0 + \frac{c_1}{g^{\mu_1}} + \frac{c_2}{g^{\mu_1+\mu_2}} + \frac{c_3}{g^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}} + \dots, \tag{12}$$

*) Takými jsou na př. čísla e a π. O prvním to dokázal p. Hermite ve své slavné práci Sur la fonction exponentielle, jejíž výsledky přivedly Lindemanna na důkaz transcendentnosti čísla π.

ve kterých c_0 značí libovolné číslo celistvé, g celistvé kladné číslo větší jedné a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ čísla z řady $0, 1, 2, \ldots g-1$; při tom jsou dále $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ celistvá kladná čísla určená tak, aby platily nerovnosti:

$$g^{\mu_2-1} > \frac{1}{r_1^{g^{\mu_1}}},\quad g^{\mu_3-1} > \frac{1}{r_2^{g^{\mu_1+\mu_2}}},\quad g^{\mu_4-1} > \frac{1}{r_3^{g^{\mu_1+\mu_2+\mu_3}}},\ldots,$$

v nichž $r_1, r_2, r_3, \ldots$ značí nekonečnou řadu kladných ryzích zlomků, ubývajících do nekonečna, t. j.

$$1 > r_\nu > r_{\nu+1},\quad \lim_{\nu=\infty} r_\nu = 0.$$

Volíme-li zde na příklad

$$n = g^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}$$

bude zbytek

$$\delta_\nu = n\sigma - m = \frac{c_{\nu+1}}{g^{\mu_{\nu+1}}} + \frac{c_{\nu+2}}{g^{\mu_{\nu+1}+\mu_{\nu+2}}} + \frac{c_{\nu+3}}{g^{\mu_{\nu+1}+\mu_{\nu+2}+\mu_{\nu+3}}} + \cdots$$

kladná veličina, která jest menší než

$$\frac{g}{g^{\mu_{\nu+1}}} = \frac{1}{g^{\mu_{\nu+1}-1}},$$

kterýžto zlomek dle učiněných supposic jest menší než veličina

$$r_\nu^{g^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}},$$

t. j. bude

$$0 < \delta_\nu < r_\nu^n.$$

Následovně bude

$$|\sin n\sigma\pi| = \sin\delta_\nu\pi < r_\nu^n\pi,$$

a tedy člen naší řady příslušný k uvažované hodnotě n

$$\frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi}$$

bude absolutně větší než veličina

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{w^\sigma}{r_\nu}\right)^n,$$

která roste zároveň s ν přes všecky meze. Hodnoty σ tvaru (12) vedou tedy k řadám divergentním; totéž platí o veličinách σ, jež z hodnot (12) vzniknou přičtením racionalného čísla s jmenovatelem g^k $(k = 1, 2, 3, 4, \dots)$, jak snadno se přesvědčíme.

4. Po této přípravě přistupme k stanovení sdružení členů m a n ve výrazu (10), o němž učiněna výše zmínka. Proveďme sdružení to pro součet

$$\sum \left(\frac{w^{n\sigma}}{\sin n \sigma \pi} + (-w)^m \frac{1}{\sigma} \cot \frac{m\pi}{\sigma} \right). \tag{13}$$

Buď ϱ veličina kladná, jež nepřevyšuje polovinu, jinak libovolná; čísla n, pro něž absolutně nejmenší zbytek veličiny $n\sigma$ převyšuje neb rovná se ϱ, znamenejme n''; čísla n, pro něž platí opak, znamenejme n'.

Ke každému číslu (kladnému a celistvému) n' přísluší kladné celistvé číslo m', tak aby rozdíl $n'\sigma - m' = \vartheta$ byl absolutně menší veličiny ϱ. Touto podmínkou jest souhrn párů čísel celistvých a kladných m' a n' úplně charakterisován.

Žádné dva páry čísel (m', n') nemají jeden prvek společný. Neb je-li dáno n', jest m' jednoznačně určeno; naopak odpovídá danému m' pouze jedno n', a sice podmínkou

$$\left| \frac{m'}{\sigma} - n' \right| < \frac{\varrho}{\sigma}.$$

Vyloučíme-li z řady přirozených čísel 1, 2, 3, ... veškera čísla m' zbudou čísla, jež znamenati chceme m''. Pro tato bude absolutně nejmenší zbytek veličiny $\frac{m''}{\sigma}$ buď větší než $\frac{\varrho}{\sigma}$, aneb bude roven tomuto číslu.

Z definice čísel m'' a n'' plyne, že řady

$$\sum_{n''} \frac{w^{n''\sigma}}{\sin n'' \sigma \pi}, \quad \frac{1}{\sigma} \sum_{m''} (-w)^{m''} \cot \frac{m''\pi}{\sigma}$$

konvergují absolutně, i zbývá jen vyšetřiti součet párů

$$\sum \left(\frac{w^{n'\sigma}}{\sin n' \sigma \pi} + (-w)^{m'} \frac{1}{\sigma} \cot \frac{m'\pi}{\sigma} \right). \tag{13a}$$

Nahradíme-li zde $n'\sigma$ jeho hodnotou $m' + \vartheta$, bude

$$\sin n' \sigma \pi = (-1)^{m'} \sin \vartheta \pi, \quad \cot \frac{m'\pi}{\sigma} = -\cot \frac{\vartheta \pi}{\sigma},$$

a obecný člen součtu (13ª) obdrží tvar

$$(-1)^{m'} w^{m'} \left(\frac{w^{\vartheta}}{\sin \vartheta \pi} - \frac{1}{\sigma} \cot \frac{\vartheta \pi}{\sigma} \right). \tag{14}$$

Poněvadž $\left|\frac{\vartheta\pi}{\sigma}\right| < \frac{\varrho\pi}{\sigma}$, a $\sigma > 1$, bude dle vzorce

$$\pi\cot u\pi = \frac{1}{u} - \sum_1^\infty \frac{2u}{v^2 - u^2}$$

veličina

$$\frac{1}{\sigma}\cot\frac{\vartheta\pi}{\sigma} - \frac{1}{\vartheta\pi}$$

absolutně menší než

$$\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\frac{2\varrho}{\sigma}}{r^2 - \frac{\varrho^2}{\sigma^2}},$$

kteréžto veličina je nezávislá na m', n'.

Podobnou vlastnost má rozdíl

$$\frac{1}{\sin\vartheta\pi} - \frac{1}{\vartheta\pi},$$

a tedy bude lze veličinu (14) psáti takto:

$$(-1)^{m'} w^{m'}\left(\frac{w^\vartheta - 1}{\vartheta\pi} + c_\vartheta\right),$$

kde c_ϑ jest obsaženo ve stálých mezích. Řada

$$\sum(-1)^{m'} w^{m'}\,.\,c_\vartheta$$

konverguje absolutně, taktéž řada

$$\sum(-1)^{m'} w^{m'}\frac{w^\vartheta - 1}{\vartheta},$$

poněvadž veličinu $\frac{w^\vartheta - 1}{\vartheta}$ lze psáti ve tvaru $w^{\vartheta_1}\log w$, $0 < \frac{\vartheta_1}{\vartheta} < 1$.

Součet (13) lze tedy rozložiti ve tři absolutně konvergentní výrazy

$$(13^*)\qquad \begin{aligned} &\sum\frac{w^{n''\sigma}}{\sin n''\sigma\pi} + \frac{1}{\sigma}\sum(-w)^{m''}\cot\frac{m''\pi}{\sigma} \\ &+\sum\left(\frac{w^{n'\sigma}}{\sin n'\sigma\pi} + (-w)^{m'}\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m'\pi}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Zbývá ještě dokázati, že mezní výraz na pravé straně rovnice (10) splývá se součtem (13). Při tom předpokládáme, že veličina s je ryze pomyslná a kladná, i znamenáme ji $i\xi$. Bude pak dle známé věty Darbouxovy

$$f(i\xi) - f(0) = \xi \,.\, \Theta f'(i\xi_1), \;\left(\begin{matrix} |\,\Theta\,| < 1 \\ 0 < \xi_1 < \xi \end{matrix}\right)$$

platit nerovnost

$$\frac{w^{n''\sigma + i\xi}}{\sin(n''\sigma + i\xi)\pi} - \frac{w^{n''\sigma}}{\sin n''\sigma\pi}$$
$$= \xi \,.\, \Theta\, w^{n''\sigma + i\xi_1} \left[\frac{\log w}{\sin(n''\sigma + i\xi_1)\pi} - \frac{\pi\cos(n''\sigma + i\xi_1)\pi}{\sin^2(n''\sigma + i\xi_1)\pi}\right];$$

pomocí této a na základě nerovností

$$|\sin(n''\sigma + i\xi_1)\pi| > |\sin n''\sigma\pi| \,.\, \cos i\xi_1\pi,$$
$$|\cos(n''\sigma + i\xi_1)\pi| < \cos i\xi_1\pi$$

shledáme, že bude rozdíl

$$\sum \frac{w^{n''\sigma + i\xi}}{\sin(n''\sigma + i\xi)\pi} - \sum \frac{w^{n''\sigma}}{\sin n''\sigma\pi}$$

absolutně menší než veličina

$$\frac{\xi}{\cos i\xi_1\pi} \sum_{n''} w^{n''\sigma} \left(\left|\frac{\log w}{\sin n''\sigma\pi}\right| + \frac{\pi}{\sin^2 n''\sigma\pi}\right),$$

čímž dokázáno, že

$$\lim_{\xi = 0} \sum \frac{w^{n''\sigma + i\xi}}{\sin(n''\sigma + i\xi)\pi} = \sum \frac{w^{n''\sigma}}{\sin n''\sigma\pi}.$$

Podobně se dokáže platnost vzorce

$$\lim_{\xi = 0} \sum (-w)^{m''} \cot \frac{m'' - i\xi}{\sigma}\pi = \sum (-w)^{m''} \cot \frac{m''\pi}{\sigma},$$

takže zbývá jen vyšetřiti limitu výrazu

$$\sum \left(\frac{w^{n'\sigma + i\xi}}{\sin(n'\sigma + i\xi)\pi} + (-w)^{m'} \frac{1}{\sigma} \cot \frac{m' - i\xi}{\sigma}\pi\right).$$

K tomu cíli nám podá zmíněná věta Darbouxova

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{w^{n'\sigma + i\xi}}{\sin(n'\sigma + i\xi)\pi} + (-w)^{m'} \frac{1}{\sigma} \cot \frac{m' - i\xi}{\sigma}\pi\right) \\ &- \left(\frac{w^{n'\sigma}}{\sin n'\sigma\pi} + (-w)^{m'} \frac{1}{\sigma} \cot \frac{m'\pi}{\sigma}\right) = \xi\, \Theta\, \varphi(\xi_1), \end{aligned}\right.$$
$$|\,\Theta\,| < 1, \; 0 < \xi_1 < \xi,$$

VI.

při čemž znamenáno

$$\varphi(\xi_1) = w^{n'\sigma + i\xi_1}\left(\frac{\log w}{\sin(n'\sigma + i\xi_1)\pi} - \frac{\pi\cos(n'\sigma + i\xi_1)\pi}{\sin^2(n'\sigma + i\xi_1)\pi}\right)$$

$$+ (-w)^{n'}\frac{\pi}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{m' - i\xi_1}{\sigma}\pi}.$$

Tu jest pak jako výše $n'\sigma = m' + \vartheta$, $\frac{m'}{\sigma} = n' - \frac{\vartheta}{\sigma}$, tedy

$$\varphi(\xi_1) = (-1)^{n'} w^{m' + i\xi_1 + \vartheta}\cdot\left(\frac{\log w}{\sin(\vartheta + i\xi_1)\pi} - \frac{\pi\cos(\vartheta + i\xi_1)\pi}{\sin^2(\vartheta + i\xi_1)\pi}\right)$$

$$+ (-1)^{n'} w^{m'}\frac{\pi}{\sigma^2\sin^2\frac{\vartheta + i\xi_1}{\sigma}\pi}.$$

Volíme-li veličinu ρ, která sloužila k stanovení párů m', n', dosti malou, bude nám lze učiniti $\vartheta + i\xi_1$ absolutně menší než jistá veličina malá. Pak bude

$$\frac{1}{\sin(\vartheta + i\xi_1)\pi} = \frac{1}{(\vartheta + i\xi_1)\pi} + A$$

$$\frac{\pi\cos(\vartheta + i\xi_1)\pi}{\sin^2(\vartheta + i\xi_1)\pi} = \frac{1}{(\vartheta + i\xi_1)^2\pi} + B$$

$$\frac{\pi}{\sigma^2\sin^2\frac{\vartheta + i\xi_1}{\sigma}\pi} = \frac{1}{(\vartheta + i\xi_1)^2\pi} + C,$$

při čemž A, B, C značí veličiny nacházející se ve stálých mezích. Obdržíme tak pro naši veličinu $\varphi(\xi_1)$ výraz

$$\varphi(\xi_1) = (-1)^{m'} w^{m'}\left[w^{\vartheta + i\xi_1}(A\log w - B) + C\right]$$

$$+ (-1)^{n'}\frac{w^{m'}}{\pi}\left\{w^{\vartheta + i\xi_1}\frac{\log w}{\vartheta + i\xi_1} - \frac{w^{\vartheta + i\xi_1}}{(\vartheta + i\xi_1)^2} + \frac{1}{(\vartheta + i\xi_1)^2}\right\}.$$

Výraz obsažený v závorce $\{\}$ po dosazení hodnoty

$$w^{\vartheta + i\xi_1} = 1 + (\vartheta + i\xi_1)\log w + D\,.\,(\vartheta + i\xi)^2,$$

kde D zůstává v konečných mezích, obdrží tvar πD_1, kterážto veličina zůstává ve stálých mezích, a tedy

$$\varphi(\xi_1) = (-1)^{m'} w^{m'}\left[w^{\vartheta + i\xi_1}(A\log w - B) + C + D_1\right];$$

Tato veličina jest absolutně menší než jistá konstanta násobená $w^{m'}$, a je tedy členem řady absolutně konvergentní. Odtud je zřejmo, že též součet výrazů (15) současně s ξ blíží se nulle, a že tedy platí

$$\lim_{\xi=0}\sum\left(\frac{w^{n'\sigma+i\xi}}{\sin(n'\sigma+i\xi)\pi}+(-w)^{m'}\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m'-i\xi}{\sigma}\pi\right)$$
$$=\sum\left(\frac{w^{n'\sigma}}{\sin n'\sigma\pi}+(-w)^{m'}\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m'\pi}{\sigma}\right).$$

Tím dokázáno, že pravá strana rovnice (10) má za hodnotu součet (13). Následovně máme rovnici

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\sigma w}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{\sigma}\int\limits_0^\infty\frac{\log x\,d x}{(w^2+2\,w\,x\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2)(1+x^\sigma)}-\frac{\log w}{\pi}\\&=\sum\left(\frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi}+(-w)^m\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m\pi}{\sigma}\right),\quad\binom{0<w<1,}{\sigma>1;}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m,\,n=1,2,3,4,\ldots\end{aligned}\right.$$

ze které je zřejmo, že náš součet (13) jest funkcí analytickou realné proměnné σ.

Pravá strana rovnice (16) liší se ode všech druhů výrazů v analysi dosud užívaných. Jednak postrádá smyslu pro všecka racionalná σ, tedy pro soustavu hodnot všehustě rozložených, jednak přejde aspoň za jistých rovněž všehustě rozložených hodnot transcendentních v určitou hodnotu jen při vhodném sdružení ukazovatelů m a n, a způsob tohoto sdružení závisí na hodnotě a na povaze arithmetické proměnné σ.

Avšak vzdor tomu, že zevnější tvar a sestavení výrazu do tak značné míry závisí na arithmetické povaze argumentu, jest vnitřní analytická povaha jeho hodnoty zcela jednoduchou.

Rovněž co se tkne proměnné w narážíme zde na překvapující zvláštnosti. Je-li σ algebraické číslo irracionalné, je pravá strana (16) součtem dvou mocninových řad, z nichž jedna obsahuje celistvé mocnosti veličiny w, druhá celistvé mocnosti veličiny w^σ; je-li však σ transcendentní veličina jistého druhu, ztrácí se tu povaha (od sebe neodvislých) řad mocninových úplně; obě řady dostávají se do závislosti, ve které jednotlivé členy zachovají sice povahu mocnin, ale řady o sobě vzaty divergují.

Vyšetříme ještě pravou stranu rovnice (10) pro případ racionalného σ, aby se poznalo, jaký výraz doplňuje pravou stranu na úplnou definici funkce.

Daná hodnota σ budiž

$$\sigma=\frac{p}{q},\quad(\sigma>1)$$

kde p, q jsou celistvá kladná čísla nesoudělná.

V řadách

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^{s+n\sigma}}{\sin(s+n\sigma)\pi},\quad \frac{1}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}(-w)^m\cot\frac{m-s}{\sigma}\pi$$

stane se nekonečně mnoho členů nekonečně velikými pro $s=0$. Jsou to členy, jež příslušejí hodnotám $n=q,\ 2q,\ 3q,\ldots$ resp. $m=p,\ 2p,\ 3p,\ldots$

Vyloučíme-li je, zbudou členové, jež jsou funkce pravidelné na místě $s=0$, a jež tam mají hodnotu

$$\sum{}'\left(\frac{w^{n\sigma}}{\sin n\sigma\pi}+\frac{1}{\sigma}(-w)^m\cot\frac{m\pi}{\sigma}\right),$$

při čemž v součtu se podrží pouze členové koneční, t. j. smyslu nepostrádající.

Součet vynechaných členů sestává z výrazů

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{\nu p}\frac{w^{s+\nu p}}{\sin s\pi}=\frac{1}{\sin s\pi}\cdot\frac{(-w)^p\cdot w^s}{1-(-w)^p}$$

a

$$-\frac{q}{p}\sum_{1}^{\infty}(-w)^{\mu p}\cot\frac{qs\pi}{p}=-\frac{q}{p}\cdot\cot\frac{qs\pi}{p}\cdot\frac{(-w)^p}{1-(-w)^p},$$

takže součet bude

$$\left(\frac{w^s}{\sin s\pi}-\frac{q}{p}\cdot\cot\frac{qs\pi}{p}\right)\frac{(-w)^p}{1-(-w)^p}.$$

Výraz tento se na místě $s=0$ chová taktéž pravidelně a má tam hodnotu

$$\frac{\log w}{\pi}\cdot\frac{(-w)^p}{1-(-w)^p}.$$

Odtud plyne, že rovnice (16) *platí též pro racionalná* $\sigma=\frac{p}{q}$, *podrží-li se na pravé straně pouze členové koneční*, a *připojí-li se k výsledku výraz*

$$\frac{(-w)^p}{1-(-w)^p}\cdot\frac{\log w}{\pi};$$

jinými slovy: Pro racionalné hodnoty $\sigma=\frac{p}{q}>1$ bude dlužno pravou stranu rovnice (16) nahraditi výrazem

$$(16^a)\qquad \frac{(-w)^p}{1-(-w)^p}\cdot\frac{\log w}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{w^{\frac{np}{q}}}{\sin\frac{np\pi}{q}} + \frac{q}{p}\sum_{m=1}^{\infty}{}'(-w)^m \cot\frac{mq\pi}{p},$$

při čemž čárky u znamení součtu znamenají, že dlužno vynechati členy nekonečné.

Z výsledku tohoto je zřejmo, jak se tu vyjímá chování funkce w definované rovnicí (16). Pro racionalná σ ztrácí se povaha pravé strany jako součtu mocninových řad na dobro, a připojují se členové logarithmičtí, jichž součet jest

$$\frac{(-w)^p}{1-(-w)^p}\,\frac{\log w}{\pi}.$$

Netřeba připomínati, že lze obě řady (16^a) vyjádřiti ve tvaru zakončeném, což konečně patrno také z integrálu (16) přímo. Cennější jest poznamenati, že lze výraz (16^a) též vyvinouti z obecného (16), klade-li se $\sigma=\frac{p}{q}+\xi$, při čemž ξ značí nekonečně ubývající hodnotu irracionalnou.

5. Součet na pravé straně rovnice (16) dává podnět ke studiu nového druhu výrazů analytických, které na rozdíl od řad obyčejných nazývám dvojicemi řad. Jsou to tři typy součtů, a sice

$$\sum\left\{f(n\sigma)\cot n\sigma\pi+f(m)\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m\pi}{\sigma}\right\},$$

$$\sum\left\{\frac{f(n\sigma)}{\sin n\sigma\pi}+(-1)^m f(m)\frac{1}{\sigma}\cot\frac{m\pi}{\sigma}\right\},$$

$$\sum\left\{(-1)^n\frac{f(n\sigma)}{\sin n\sigma\pi}+(-1)^m\frac{f(m)}{\sigma\sin\frac{m\pi}{\sigma}}\right\}.$$

Funkce $f(x)$ má tu hověti podmínce, aby řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+\vartheta_n),\quad \sum_{n=1}^{\infty} f'(n+\vartheta_n)$$

sestrojené z hodnot funkce $f(x)$ a její derivace $f'(x)$ konvergovaly absolutně a to při každé řadě hodnot veličin $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$, vzatých z mezery $\left(-\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{2}\right)$.

Konvergují-li mimo to řady

$$\sum_1^{\infty} n^a f(n+\vartheta_n)$$

pro $a \leqq \varkappa - 1$, budou naše součty složeny ze dvou řad konvergentních, jakmile σ značí algebraické číslo stupně $\leqq \varkappa$. Takovými jsou na př. dvojice sestrojené pomocí funkce

$$f(x) = \frac{1}{(u+x)^{\varkappa+1}}.$$

O udaných dvojicích řad lze dokázati, že definují spojité funkce proměnné σ, byla-li za základ vzata spojitá funkce $f(x)$ [kterážto podmínka jest ostatně nutna k existenci derivace $f'(x)$] a není nesnadno nalézti hodnotu, jíž tato spojitá funkce nabývá na místech racionalných.

Tak na př. nalezneme, že funkce definovaná dvojicí

$$\sum \left\{ f(n\sigma) \cot n\sigma\pi + \frac{1}{\sigma} f(m) \cot \frac{m\pi}{\sigma} \right\}, \quad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

pro racionalné hodnoty $\sigma = \frac{p}{q}$ obdrží hodnotu

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} f'(\nu p) + \sum_{n=1}^{\infty}{}' f\left(\frac{np}{q}\right) \cot \frac{np\pi}{q} + \frac{q}{p} \sum_{m=1}^{\infty}{}' f(m) \cot \frac{mq\pi}{p},$$

při čemž v součtech Σ' dlužno vynechati členy nekonečné, příslušné k hodnotám $n = q, 2q, 3q, \ldots$; $m = p, 2p, 3p, \ldots$. Co se tkne theorie těchto veličin, dlužno vyčkati, až nám analytická prakse poskytne dostatečný fond zkušenosti, aby se vědělo, v jakém směru se tu třeba ubírati, má-li se dospěti k výsledkům nejen správným, ale také užitečným. Prozatím postačí poukázati k četným i překvapujícím zvláštnostem, jakými se honosí případ zvláštní (16), a vzpomeneme-li si, jakého druhu úvahy k jeho odvození vedly, můžeme s odůvodněnou předtuchou očekávati podobného druhu a snad ještě mnohem zajímavější i cennější výsledky od studia oněch funkcí, které majíce k rovnoběžníku period 1 a σ vztahy jednoduché a tedy s funkcemi elliptickými souvisejíce, zachovají na rozdíl od těchto pravidelnou povahu analytickou i vůči realným hodnotám komplexní proměnné σ.
